ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2009, том 45, № 4, с. 16–28

ИЗ ИСТОРИИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ МЫСЛИ

О ДВУХ ЮБИЛЕЯХ ОДНОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ РАБОТЫ Л.В. КАНТОРОВИЧА (ИЗ ИСТОРИИ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО НАПРАВЛЕНИЯ)*

© 2009 г. В.Н. Лившиц

(Москва)

Излагаются классические результаты исследования потенциальности оптимальных потоков в линейных сетях, полученные Л.В. Канторовичем в 1939 г. и опубликованные затем в 1949 г. (вместе с М.К. Гавуриным). Затем классические результаты Л.В. Канторовича распространяются на случай нелинейных сетей. Приводятся соответствующие модели и алгоритмы оптимизации потоков в нелинейных сетях при фиксированном состоянии и при повышении уровня технического оснащения их элементов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Сегодня, если бы это было принято, математики, транспортники и экономисты нашей страны, да и всего мира могли бы с помпой отметить двойной юбилей. Первый – 70 лет с тех пор, как в 1939 г. Леонид Витальевич Канторович[1] серьезно занялся задачами оптимального планирования производства (в том числе и оптимизации потоков в транспортных сетях; второй – 60 лет с момента выхода в 1949 г. знаменитой статьи Л.В. Канторовича и М.К. Гавурина в сборнике Академии наук СССР (Канторович, Гавурин, 1949)[2].

Представляется, что богатство содержащихся в этой статье идей, в фарватере которых находятся излагаемые ниже положения, заслуживает юбилейных воспоминаний и подробного изучения. Следует также отметить, что статья (Канторович, Гавурин, 1949), в которой дано описание алгоритмов и примеров расчета оптимальных однородных потоков в сетях с ограничениями и без ограничений пропускной способности звеньев, т.е., по существу, решение в рассматриваемых условиях сетевой транспортной задачи, была (впрочем, как и большинство экономических и транспортных работ Л.В. Канторовича) написана достаточно общо и строго, хотя просто и понятно. Она сразу вызвала поток связанных с темой научных исследований и, что не менее удивительно, практических применений на различных видах транспорта, да и в других отраслях. Объясняется это тем, что сетевые транспортные задачи имеют чрезвычайно широкую сферу применения (Канторович, 1989а) и допускают различного рода обобщения. Эти задачи в советской, да и западной экономике затем использовались не только для планирования движения транспорта – выбора направлений грузопотоков и пассажиропотоков в сетях, при установлении транспортно-экономических связей, определении наиболее выгодных вариантов развития сети и т.д., – но и в качестве самостоятельных блоков в задачах размещения однородного и неоднородного производства, при планировании материально-технического снабжения, для решения многих задач в энергетике, градостроительстве и т.п.

Интерес Л.В. Канторовича к задачам рационального планирования потоков в сетях возник не на пустом месте. Решением этих задач интересовались экономисты-плановики еще в 1929–1930 гг. Намеченные в то время постановки и методические приемы, нацеленные на обеспечение наи-

---

* Статья выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08-06-12011-офи) и Российского гуманитарного научного фонда (проект 09-02-00159а).

[1] Незадолго перед тем блестяще решивший для фанерного треста задачу оптимального “раскроя фанеры” и заложивший тем самым основы нового математического направления, получившего спустя десятилетие с легкой руки Дж. Данцинга название линейного программирования.

[2] Статья была написана еще в 1940 г. (см. (Канторович, 1959)).

меньшего суммарного километража перевозок при любой конфигурации сети и любом расположении пунктов отправления и прибытия грузов, были затем развиты рядом авторов и подробно изложены в работах А.Н. Толстого (Толстой, 1939, 1941). Наиболее существенным результатом можно считать созданный ими метод "круговых" или "контурных" разниц для составления рациональных планов перевозок. Однако эти работы имели в основном описательный нематематический характер, в них не был приведен общий алгоритмический подход к решению этих задач.

Между тем практически в те же годы Л.В. Канторович создал строгую теорию оптимизации потоков в сетях, которая положила начало последующей разработке многочисленных алгоритмов решения задач. Теория опирается на выдвинутую им же идею потенциальности оптимального плана сетевых потоков, которая впервые применительно к непрерывному случаю была опубликована в 1942 г. в работе "О перемещении масс" (Канторович, 1942)[3], а применительно к дискретным сетям – в 1949 г. в упомянутой выше работе (Канторович, Гавурин, 1949).

2. РАБОТЫ Л.В. КАНТОРОВИЧА ПО РЕШЕНИЮ ЛИНЕЙНЫХ СЕТЕВЫХ ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧ И ИХ РАЗВИТИЕ В 1950–1960-е ГОДЫ В СССР

Приведем формальную постановку сетевой транспортной задачи и условий потенциальности оптимального плана в соответствующей форме, достаточно строго следуя изложению этих вопросов в статье (Канторович, Гавурин, 1949) и знаменитой монографии (Канторович, 1959), по существу основополагающей в теории оптимального планирования, за которую Л.В. Канторович в 1965 г. был удостоен Ленинской премии, а в 1975 г. премии Альфреда Нобеля по экономике. Кстати, полувековой юбилей опубликования этой великой книги также приходится на текущий год.

Итак, пусть имеется m пунктов, соединенных транспортной сетью, состоящей из r участков. По участку сети s, $s = 1, ..., r$, можно производить перевозки из пункта i_s в пункт j_s, при этом затраты по перемещению единицы груза составляют a_s. В каждом пункте – узле сети i, $i = 1, ..., m$, задан объем потребления b_i некоторого однородного продукта (для пунктов потребления $b_i > 0$, для пунктов производства $b_i < 0$, для прочих пунктов $b_i = 0$); причем $\sum_{i=1}^{m} b_i = 0$ (суммарные объемы производства и потребления совпадают). В задаче требуется найти такой вектор перевозок $\pi = (h_1, ..., h_r)$, где h_s – объем перевозок по участку сети s, $s = 1, ..., r$, чтобы

$$Z = \sum_{s=1}^{r} a_s h_s \to \min$$

при условиях:

1) $h_s \geq 0$, $s = 1, ..., r$;

2) $\sum_{j_s = i} h_s - \sum_{i_s = i} h_s = b_i$, $i = 1, ..., m$ (в каждый пункт поступает необходимое количество продукта).

В (Канторович, 1959, с. 289, теорема 5) приводится ранее доказанная им теорема: *для оптимальности допустимого вектора перевозок* $\pi = (h_1, ..., h_r)$, *удовлетворяющего условиям* 1 *и* 2, *необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа* $c_1, ..., c_m$, *называемые потенциалами соответствующих пунктов* 1, ..., m, *что выполняются условия:*

а) $c_{js} - c_{is} \leq a_s, \quad s = 1, ..., r;$

б) $c_{js} - c_{is} = a_s, \quad h_s \neq 0.$

Величины c_{js}, c_{is} *представляют собой инцидентные (т.е. непосредственно связанные с участком s) потенциалы пунктов i и j.*

---

[3] Изложение содержания этой ставшей классической работы с постановкой задачи для непрерывного случая и формулировкой теоремы Канторовича о потенциальности оптимального плана перемещений можно найти также в других работах (см. (Канторович, 1989; Васильева, Лившиц, 1989, и др.)).

Приведенные условия потенциальности оптимального плана допускают трактовку в терминах теории оптимального планирования в виде требований “бесприбыльности” и “безубыточности” наивыгоднейших перевозок. В самом деле, как подчеркнуто в (Лурье, 1964), потенциалы должны быть такими, чтобы перевозки не могли принести прибыль (т.е. оценка груза в любом пункте потребления не должна превышать оценки его в любом пункте производства, увеличенной на расходы по перевозке в данный пункт $c_{js} \le c_{is} + a_s$). И в то же время (безубыточность) перевозки должны быть такими, чтобы оценка груза в пункте производства и издержки его на перевозки в точности покрывались оценкой груза в пункте потребления $s = 1, ..., r$; $c_{js} = c_{is} + a_s$.

В работе (Лурье, 1964) также показано, как можно пользоваться потенциалами не только для проверки оптимальности плана, но и для экономического анализа транспортных задач, последовательного улучшения плана перевозок, если он неоптимален. Разность между потенциалами двух пунктов производства показывает, насколько уменьшились бы транспортные затраты в оптимальном плане, если бы ресурсы пункта производства с большим потенциалом увеличились на единицу за счет пункта с меньшим потенциалом. Аналогичное утверждение (но об увеличении транспортных затрат) можно сделать при сравнении потенциалов пунктов потребления и соответствующем изменении его размеров. При одновременном увеличении на единицу размеров потребления в некотором пункте j_s и размеров производства в некотором пункте i_s величина $c_{js} - c_{is}$ покажет, как изменятся транспортные затраты при наиболее выгодном использовании ресурсов.

Если рассматривается транспортная задача с ограничениями пропускной способности отдельных участков, то применительно к данной линейной постановке требуется добавление условий 3 ($h_s \le q_s$, $s = 1, ..., r$, где q_s – пропускная способность магистралей). В этом случае характеристика оптимального плана принимает вид, указанный в (Канторович, 1959, с. 290), там же приводится теорема (Канторович, 1959, с. 290, теорема 6): *для оптимальности допустимого вектора перевозок* $\pi = (h_1, ..., h_r)$, *удовлетворяющего условиям* 1–3, *необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа* $c_1, ..., c_m$ *(потенциалы) и такие числа* $d_1, ..., d_m$ *(ренты или прокатные оценки отдельных участков маршрута следования, рассчитанные на единицу груза), что:*

а) $c_{js} - c_{is} \le a_s + d_s, \quad s = 1, ..., r;$

б) $c_{js} - c_{is} = a_s + d_s,$ *если* $h_s > 0;$

в) $d_s \ge 0,$ *причем* $d_s = 0,$ *если* $h_s < q_s.$

Заметим, что если a_s представляет собой расстояние между пунктами i_s и j_s, то получается частный случай сетевой транспортной задачи (так называемая задача о кратчайшем пути, имеющая очень важное значение не только для распределения грузо- и пассажиропотоков на сети, но и при решении многих других технико-экономических задач).

Поскольку кратчайшие пути приходится строить многократно в процессе решения сетевых транспортных задач, то временем их построения в значительной степени определяется и время построения оптимального плана задачи в целом. Поэтому отысканию эффективных и быстродействующих алгоритмов поиска кратчайших путей уделялось большое внимание на протяжении нескольких десятилетий. Говоря о развитии этого частного, но весьма важного направления в решении сетевых транспортных задач, отметим, что довольно подробный обзор состояния этой проблемы в рассматриваемом периоде и классификация существующих алгоритмов приведены в (Васильева, Левит, Лившиц, 1981). Как показали итоги проведенного в СССР всесоюзного конкурса алгоритмов и программ построения матрицы кратчайших расстояний “Транспорт-83” (Итоги конкурса программ, 1985), одним из наиболее эффективных алгоритмов тогда оказался предложенный Б.Ю. Левитом метод “двухсторонняя очередь”, описание которого приведено, например, в (Левит, 1971).

Идеи, выдвинутые Л.В. Канторовичем, были использованы для создания в 1950–начале 1960-х годов алгоритмов решения сетевой транспортной задачи с ограничениями пропускной способности для нескольких видов грузов (так называемой многопродуктовой транспортной задачи). Она обычно формулировалась следующим образом:

$$\min_{x_{ij}^{(k)}} \sum c_{ij}^{(k)} x_{ij}^{(k)}; \quad \sum_j x_{ij}^{(k)} - \sum_i x_{ij}^{(k)} = b_i^{(k)}; \quad x_{ij}^{(k)} \ge 0; \quad \sum_k x_{ij}^{(k)} \le q_{ij},$$

где k – номер груза; $b_i^{(k)}$ – объем производства (или потребления) в вершине i для груза k (в транзитных узлах он равен нулю); $x_{ij}^{(k)}$ – величина потока груза k из вершины (узла) i в смежный ему узел j; q_{ij} – пропускная способность участка (звена или дуги сети), непосредственно связывающего эти узлы.

Условия оптимальности плана перевозок для такой задачи были по аналогии сформулированы и обоснованы И.В. Романовским (Романовский, 1962). Они имеют вид:

$$\text{а) если } 0 \le \sum x_{ij}^{(k)} < q_{ij}, \quad \text{то} \quad u_j^{(k)} - u_i^{(k)} \begin{cases} \le c_{ij}^{(k)} & \text{при} \quad x_{ij}^{(k)} = 0; \\ = c_{ij}^{(k)} & \text{при} \quad x_{ij}^{(k)} > 0; \end{cases}$$

$$\text{б) если } \sum x_{ij}^{(k)} = q_{ij}, \quad \text{то} \quad u_j^{(k)} - u_i^{(k)} \begin{cases} \le c_{ij}^{(k)} + \delta_{ij} & \text{при} \quad x_{ij}^{(k)} = 0; \\ = c_{ij}^{(k)} + \delta_{ij} & \text{при} \quad x_{ij}^{(k)} > 0, \end{cases}$$

где для груза k величины $u_j^{(k)}, u_i^{(k)}$ – потенциалы пунктов, инцидентных рассматриваемому звену сети δ_{ij} – прокатная оценка участка ij.

Очевидно, что для всех видов грузов условия потенциальности остаются прежними для звеньев сети с неисчерпанными пропускными способностями, а для потенциально перегруженных[4] звеньев разность потенциалов пунктов (вершин или узлов сети) должна быть увеличена по крайней мере на величину прокатной оценки, которая соответствует удорожанию перевозки, выполняемой не по кратчайшему, а по некоторому кружному маршруту.

Для этого класса задач были предложены различные способы поиска оптимального плана. Из методов, ориентированных на получение строго оптимального решения, отметим соответствующие модификации методов последовательного улучшения плана, предложенные в (Нестеров, 1962; Мокроусова, 1963). Идея этих алгоритмов заключается в последовательном наложении отдельных грузов на сеть (любым известным способом решения линейной сетевой транспортной задачи с ограничениями пропускной способности для однородного груза). При этом на каждом шаге учитываются соответствующие уменьшения пропускной способности звеньев (на величину потока ранее распределенных грузов). Для звеньев же с заполненной пропускной способностью производится совместное перераспределение потоков рассматриваемого вида и размещенных ранее видов грузов по возможным кружным путям. В итоге среди разных прокатных оценок для данных видов грузов в результате последовательной взаимоувязки планов их перевозок находится единая для всех грузов величина прокатной оценки, при которой выполняются требуемые условия потенциальности плана одновременно по всем видам грузов.

Из разработанных в 1960-е годы приближенных методов решения многопродуктовой транспортной задачи на сети с ограничениями пропускной способности упомянем метод прокатных оценок и метод выключения перегруженных звеньев. Эти методы (или их комбинация) также базируются на методе потенциалов и используют различные эвристические приемы, позволяя получать не строго оптимальное решение, но нередко хорошее к нему приближение. Описание некоторых из этих подходов дано, например, в (Ковшов, Нестеров, 1965; Арсенов, 1967).

3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИДЕЙ Л.В. КАНТОРОВИЧА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СЕТЕВЫХ ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧ[5]

Другое важное направление развития идей Л.В. Канторовича по решению сетевых потоковых транспортных задач сформировалось к середине 1960-х годов, когда от рассмотрения линейных задач этого типа перешли к нелинейным. Это было вызвано в том числе потребностями практики планирования потоков, особенно на железнодорожном транспорте, где при возросших грузопотоках затраты на однопутных линиях стали иметь явно выраженный нелинейный характер, и

[4] Имеются в виду те звенья, которые полностью насыщены в оптимальном плане перевозок и поток на которых увеличился бы при увеличении пропускной способности звена.

[5] В настоящем разделе приводится текст доклада автора, сделанного им в 2002 г. в г. Галле (Германия) на конференции в университете этого города, посвященной 90-летию со дня рождения Л.В. Канторовича. Текст этого доклада в материалах конференции не публиковался.

по этим причинам при определенных уровнях загрузки возникала целесообразность, а иногда и необходимость менять технический уровень отдельных участков сети или строить разгружающие новые, так как пропускной способности уже оказывалось недостаточно. Ниже нами будут рассмотрены две важные задачи, относящиеся к анализу и синтезу нелинейных транспортных сетей. Построение и обоснование приводимых алгоритмов опираются на сформулированное выше свойство потенциальности оптимального плана распределения перевозок по сети. Анализ показал, что это свойство, первоначально доказанное и опубликованное в классических работах Л.В. Канторовича 1940-х годов для однородных потоков в линейных сетях, обобщается и на нелинейные сети при неоднородных потоках. Именно для этого достаточно общего случая будут излагаться модели и алгоритмы оптимизации. Рассмотрим следующую содержательную постановку и модель процесса оптимизации потоков в такой сети.

Задача 1. Оптимизация распределения неоднородных потоков по фиксированной нелинейной транспортной сети. Применительно, например, к железнодорожной или автотранспортной сети страны считаются заданными:

а) конфигурация действующей транспортной сети;

б) предполагаемые пункты и объемы отправления и прибытия различных грузов (или соответствующая им шахматная таблица корреспонденций), а также размеры и маршруты следования пассажиропотоков различных категорий;

в) состояние всех элементов сети на момент планирования, а также все необходимые эксплуатационно-технические и экономические характеристики, позволяющие для каждого рассматриваемого элемента сети (звеньев, узлов и т.д.) определить в зависимости от объема и структуры выполняемой им транспортной работы соответствующие величины расходов на перевозки.

Требуется определить, как следует освоить все необходимые перевозки, т.е. как направить потоки по сети с тем, чтобы суммарные затраты на перевозки были минимальны.

Расчетная модель при этом представляется в виде нелинейной сетевой транспортной задачи

$$\min F(X) = \sum_j F_j(X_j) \tag{1}$$

при ограничениях:

$$S_p(X) = b; \tag{2}$$

$$\sum_l x_j^l \le q_j \quad \forall j;$$

$$x_j^l \ge 0 \quad \forall\ i, l, \tag{3}$$

где

$$X = \{X_j\} = \{x_j^l\} \ge 0; \tag{4}$$

$$b = \{b_i\} = \{b_j^l\};$$

X – искомый вектор загрузки сети потоками всех родов грузов и пассажиров; $F(X)$ – нелинейная (в рамках рассматриваемой задачи обычно выпуклая) функция затрат, связанных с освоением потока X; b – вектор объемов отправления–прибытия в вершинах сети; X_j – вектор загрузки элемента (звена) сети j; x_j^l – загрузка элемента сети j потоками вида l; b_i – вектор объемов отправления–прибытия в вершине i; b_j^l – объемы отправления–прибытия вида груза l в вершине i; d_i – пропускная способность элемента сети i; u_i^l – потенциал вершины i по виду груза l; δ_j – прокатная оценка (рента) j элемента сети; S_p – обобщенная матрица инциденций, соответствующая перевозке неоднородных потоков грузов: $S_p = \| s_{ijl} \|$, причем имеет место $l = 1, \ldots, p$;

$$s_{ijl} = \begin{cases} +1, & \text{если дуга сети } j \text{ выходит из узла } i \text{ и по ней может осуществляться} \\ & \text{перевозка груза } l \text{ (всего родов грузов } -p); \\ -1, & \text{если дуга сети } j \text{ входит в узел } i \text{ и по ней может ввозиться груз } l; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Приведенная задача при реальной постановке часто имеет большую размерность, и решать ее общими методами математического программирования довольно непросто. Надо использовать ее транспортную специфику, и поэтому предварительно докажем правомерность распространения (естественно, в измененной адекватной форме) на случай нелинейных сетевых транспортных задач условий Канторовича о потенциальности оптимального плана потоков. Покажем, что имеет место теорема.

Теорема. *Для того чтобы допустимый план потоков нелинейной сетевой транспортной задачи вида* (1)–(4) *был оптимален, необходимо, чтобы он был потенциален*[6].

Доказательство теоремы приведем, опираясь на необходимые условия экстремума, изложенные, например, в (Дубовицкий, Милютин, 1965)[7]. Согласно этой работе для задач типа (1)–(4) должно быть пустым пересечение конусов допустимых направлений для ограничений и конуса направлений убывания для функционала.

Для функционала F направления его убывания образуют выпуклый конус T_1, допустимые направления для ограничения $X \geq 0$ – это также выпуклый конус T_2, а допустимые направления для ограничения $S_pX = b$ – подпространство Q. При этом $T_1^0 = \varnothing$ и $T_2^0 = \varnothing$, где T_i^0 обозначает внутренность конуса T_i, т.е. в итоге необходимым условием минимума в некоторой точке $\check{X}$ является соблюдение в ней равенства

$$T_1^0 \cap T_2^0 \cap Q = \varnothing. \tag{5}$$

Для отыскания точки $\check{X}$ применим следующую теорему Дубовицкого–Милютина: чтобы выполнялось условие $T_1^0 \cap \ldots \cap T_s^0 \cap Q = \varnothing$, необходимо и достаточно, чтобы существовали линейные функционалы $w_1, \ldots, w_s, q$, не равные нулю одновременно и такие, что

$$w_1 + \ldots + w_s + \bar{q} = 0. \tag{6}$$

При этом $\bar{q} \in Q^*$, $w_i \in T_i^*$, где T_i^*, – конус, сопряженный с конусом T_i, т.е. скалярные произведения

$$(w_i, T_i) \geq 0, \quad (\bar{q}, Q) = 0. \tag{7}$$

В силу выпуклости функционала F необходимое условие минимума будет являться и достаточным. В нашем случае условие (6) примет вид:

$$w_1 + w_2 + \bar{q} = 0, \tag{8}$$

где $w_1 = -\mathrm{grad}\, F = \{-\partial F/\partial x_j^l\}$, $w_2 = \{t_j^l\}$. Все компоненты вектора w_2 при $X \geq 0$ неотрицательны, и, кроме того, в точке оптимума выполняется условие дополняющей нежесткости, т.е.

$$w_2 \check{X} = 0. \tag{9}$$

Так как в ограничении $S_pX = b$ матрица S_p – матрица с постоянными членами (1, –1 и 0), то

$$\bar{q} = S_p^* u^* = \{q_j^l\}. \tag{10}$$

При этом S_p^* – оператор, сопряженный к S_p, т.е. транспонированная матрица к S_p; $u^* = \{u_i^l\}$ – вектор потенциалов всех узлов для каждого рода груза. Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что

$$q_j^l = u_{i_1}^l - u_{i_2}^l, \tag{11}$$

где i_1 и i_2 – узлы, ограничивающие дугу j. Подставляя найденные значения w_1, w_2 и q в (8), получим для всех i, j и l условие

$$-\frac{\partial F}{\partial x_j^l} + q_j^l + t_j^l = 0, \tag{12}$$

и так как $t_j^l \check{x}_j^l = 0$, то при $\check{x}_j^l > 0$ имеем $t_j^l = 0$.

[6] Определение потенциалов для нелинейного случая будет ясно ниже при доказательстве теоремы.

[7] Именно так в 1963 г. эту теорему в учебном порядке и доказал автор, в то время обучаясь на мехмате МГУ и слушая там лекции И.В. Гирсанова и Б.Т. Поляка по экстремальным задачам. В этих лекциях излагалась теория Дубовицкого–Милютина и приводились примеры ее использования для установления необходимых условий экстремума. Конечно, можно эту теорему доказать и иначе, например исходя из теоремы Куна–Таккера.

Следовательно, необходимым и достаточным условием достижения минимума в точке $\check{X}$ является существование для каждого невзаимозаменяемого рода груза l такой системы чисел (потенциалов) u_j^l, чтобы для каждой дуги j выполнялись условия

$$u_{i_1}^l - u_{i_2}^l \le \frac{\partial F}{\partial x_j^l}, \tag{13}$$

причем при $\check{x}_j^l > 0$ имеет место строгое равенство

$$u_{i_1}^l - u_{i_2}^l = \frac{\partial F}{\partial x_j^l}. \tag{14}$$

Следовательно, потенциальность оптимального плана нелинейной сетевой транспортной задачи доказана.

В нелинейном случае нет особой необходимости учитывать ограничения пропускной способности звеньев сети, так как это проще сделать соответствующим выбором характера нелинейности функций затрат на перевозки. Однако формально можно рассмотреть и модификацию модели (1)–(4) вида:

$$\min F(X); \quad S_p X = b; \quad D \ge X \ge 0, \tag{15}$$

где D – вектор ограничений пропускной способности звеньев.

В изложенное выше доказательство нетрудно внести необходимые модификации и получить условия оптимальности для задачи (15) в виде:

$$u_{i_1}^l - u_{i_2}^l \le \frac{\partial F}{\partial x_j^l} + \delta_j, \tag{16}$$

где δ_j – прокатная оценка за занятие единицы пропускной способности звена j. Аналогично можно обобщить условия (13) и (14) на случай, когда непрерывность градиента может нарушиться. В частности, для случая сепарабельного функционала F с конечным или счетным числом точек разрыва производных в (Ермольев, Мельник, 1968) доказываются условия оптимальности в виде $u_{i_1}^l - u_{i_2}^l \le \partial F/\partial x_j^l$, а при $\check{x}_j^l > 0$

$$\frac{\partial F^-}{\partial x_j^l} \le u_{i_1}^l - u_{i_2}^l \le \frac{\partial F^+}{\partial x_j^l},$$

где $\partial F^-/\partial x_j^l$, $\partial F^+/\partial x_j^l$ – непрерывные производные слева и справа, соответственно.

Теперь перейдем к рассмотрению способов использования полученных обобщенных условий Канторовича – потенциальности оптимального плана нелинейных сетевых потоков для реализации соответствующих алгоритмов.

Для этого сначала проанализируем простейшую сеть с нелинейными характеристиками – “рыбку”, т.е. две параллельные линии, образующие замкнутый контур, по которым надо оптимально распределить общий поток X. Условия оптимальности для этой частной задачи были впервые изложены в (Гибшман, 1965). Для задачи, когда требуется найти $\min[\phi(x_1) + \psi(x_2)]$ при ограничениях $x_1 + x_2 = X$, $x_i \ge 0$, $i = 1, 2$, где x_i – потоки на линиях, а X, $\phi(x_1)$, $\psi(x_2)$ – заданный объем перевозок и нелинейные функции затрат перевозки по линиям, легко показать, что если в оптимальном плане $x_1^* > 0$ и $x_2^* > 0$, то $\phi'(x_1^*) = \psi'(x_2^*)$. Другими словами, когда поток распределяется по обеим линиям, их загрузка в оптимальном плане перевозок должна быть такой, чтобы совпадали дифференциальные стоимости перевозок (стоимости перевозок “последней тонны”). Это условие оптимальности допускает ясную экономическую интерпретацию: если на одной из линий стоимость перевозки “последней тонны” ниже, то план неоптимален – его можно улучшить, передав с другой “дорогой” линии “тонну” на эту более дешевую линию.

Нетрудно увидеть, что такое условие оптимальности есть частный случай обобщенных условий потенциальности оптимального плана нелинейной сетевой транспортной задачи, которые были получены в приведенной выше теореме, и опубликованных, например, в (Лившиц, 1967, 1969; Левит, Лившиц, 1972).

Учет реального характера затрат на перевозки, естественных “нелинейностей”, связанных с простоями поездов при скрещениях, обгонами и торможениями “быстрых” автомобилей “медленными” в плотном потоке и т.д., обусловил необходимость создания методов, приспособленных к решению сетевых задач с несепарабельным функционалом. Один из таких алгоритмов, известный как метод пошагового распределения потоков, подробно проанализирован в (Левит, Лившиц, 1972). Этот метод в значительной степени опирается на обобщенные условия потенциальности Канторовича (13), (14), он широко апробирован, его работоспособность проверена на сетях реальных размеров, поэтому остановимся на нем подробнее.

Существо метода пошагового распределения потоков состоит в следующем. Заданный объем перевозок реализуется по сети относительно небольшими долями, причем каждая порция направляется по кратчайшему (в смысле дифференциальных затрат) пути. После размещения очередной порции загрузки многих элементов сети меняются и, следовательно, из-за нелинейности функционала меняются и дифференциальные стоимости перевозок. Это значит, что следующая доля объема перевозок направляется, вообще говоря, по другим кратчайшим маршрутам. Допустимый план построен, когда размещен весь заданный объем перевозок (вся шахматная таблица корреспонденции), причем качество плана зависит от трех главных параметров: числа шагов, величины долей корреспонденции, распределяемых на каждом шаге, и частоты пересчета дифференциальных затрат. Наилучшее соотношение между параметрами обычно выбирается экспериментальным путем.

В том случае, когда различные маршруты следования корреспонденции или их частей не содержат одинаковых элементов (звеньев сети), допустимый план является и оптимальным. В случае сетей сложной конфигурации маршруты следования долей одной и той же или разных корреспонденций чаще всего содержат одинаковые звенья, полученный план не обязательно оптимален и допускает улучшение.

Улучшение такого плана базируется на следующем положении: поскольку потоки на маршрутах определяются неоднозначно, можно предположить, что часть из них была распределена “неправильно”, не лучшим образом. Следовательно, целесообразно снять некоторую долю загрузки всех элементов сети, которая была получена на первом этапе алгоритма, и перераспределить ее заново по тем же правилам. При этом, конечно, далеко не все корреспонденции изменят свой маршрут, однако можно показать, что даже изменения маршрута следования некоторых корреспонденций оказывается достаточно для улучшения допустимого плана. Второй этап алгоритма можно повторить несколько раз, снимая на каждом шаге уменьшаемую долю корреспонденции. Доказано (Левит, Лившиц, 1972), что, например, используя приводимый ниже алгоритм (17)–(20) для гладких и выпуклых целевых функций, такая итеративная процедура является релаксационной и обеспечивает сходимость к оптимальному плану перевозок.

4. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Первый этап. Формирование достаточно хорошего первоначального допустимого плана:

$$X^0 = \sum_{p=1}^{P=M} \bar{Z}^p, \quad \bar{Z}^p\colon \ \min\left(\operatorname{grad} F\left(\sum_{j=0}^{j=P-1} \bar{Z}^j\right), Z^p\right), \tag{17}$$

$$SZ^p = \gamma_p b, \quad Z^0 = 0, \tag{18}$$

$$\sum_{P=1}^{P=M} \gamma_p = 1, \quad \gamma_p \geq 0.$$

Второй этап. Улучшение допустимого плана на итерации с номером h:

$$X^{h+1} = (1 - k^h)\, X^h + Y^h, \tag{19}$$

$$Y^h\colon \quad \min(\operatorname{grad} F(X^h - k^h X^h),\, \bar{Y}^h),$$

$$S\bar{Y}^h = k^h b, \tag{20}$$

$$\bar{Y}^h \geq 0, \quad k^h \to 0, \quad \sum_h k^h \to \infty.$$

Задача 2. Оптимизация развития транспортной сети. Задача рассматривается в следующей постановке.

Применительно к железнодорожной сети страны считаются заданными те же параметры, что и в задаче 1, и дополнительно предполагаются известными:

а) не только конфигурация действующей транспортной сети, но и возможности изменения ее топологии в рассматриваемом периоде;

б) не только состояние всех элементов сети на момент планирования, но и возможные этапы их реконструкции (или нового строительства), а также соответствующие вектору загрузки сети величины не только эксплуатационных расходов, но и капитальных вложений на развитие элемента до того или иного уровня мощности (пропускной способности);

в) все дополнительно накладываемые ограничения на централизованно выделяемые ресурсы – трудовые, материальные, финансовые (в частности, капитальные вложения, мощности строительных организаций и т.д.).

С учетом ресурсных ограничений требуется определить мероприятия по развитию существующих элементов сети и строительству необходимых новых транспортных объектов (а также соответствующие сроки осуществления этих мероприятий и нового строительства), при которых будут наименьшими в течение расчетного периода суммарные затраты на изменение сети и перевозку по ней всего объема грузов и пассажиров (при выполнении заданных сроков и качества осуществления перевозок).

Для моделирования этой задачи могут быть использованы разные подходы, которым соответствует различная математическая структура экономико-математических моделей. Ниже рассматриваются наиболее распространенные и прошедшие апробацию.

Статическая модель развития сети с дискретно-непрерывными переменными. Если абстрагироваться от изменений во времени объемов, структуры и направления перевозок, то экономико-математическую модель задачи можно представить следующим образом:

$$\min_{X,\,\eta} F(X,\eta) = \min_{X,\,\eta} \sum_u \sum_k f_{uk}(X, X_\Pi)\eta_{uk} \tag{21}$$

при ограничениях:

$$S_p X = b, \tag{22}$$

$$X \geq 0, \tag{23}$$

$$\eta_{uk} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \forall u, k, \tag{24}$$

$$\sum_k \eta_{uk} \leq 1 \quad \forall u, \tag{25}$$

$$X_u \left(1 - \sum_k \eta_{uk}\right) = 0 \;\; \forall u, \tag{26}$$

$$\sum_u \sum_k r_{juk}\eta_{uk} \leq R_j \quad \forall j, \tag{27}$$

где f_{uk} – функция приведенных затрат на элементе сети u при уровне его развития k (включая затраты на развитие); X – искомый вектор загрузки сети потоками всех родов грузов; X_Π – заданный вектор загрузки сети пассажирскими перевозками; b – вектор объемов отправления–прибытия в вершинах сети; X_u – вектор загрузки элемента сети u; η_{uk} – идентификатор, показывающий состояние k на элементе сети u (если $\eta_{uk} = 1$, то состояние k есть, если $\eta_{uk} = 0$, то его нет); $\eta = \{\eta_{uk}\}$ – искомый вектор состояния технического оснащения элементов сети; r_{juk} – расход ресурса j на элементе сети u для приведения его из исходного в состояние k; R_j – суммарная допустимая величина расхода ресурса j.

Таким образом, согласно целевой функции (21) минимизируются суммарные приведенные затраты при трех группах ограничений:

а) *технологического характера*: ограничения (22) и (23) – условие выполнения всех перевозок;

б) *на процессы реконструкции*: ограничения (24), (25) – каждый элемент может находиться лишь в одном состоянии, а если элемент не создан, то выполняемая им работа равна нулю – ограничение (26);

в) *ресурсного характера*: ограничение (27) – каждый вид ресурса может быть использован в пределах установленного объема.

Решение задачи (21)–(27) дает перечень мероприятий оптимального развития сети, но не указывает сроков их осуществления и тем более последовательности развертывания во времени смены уровней технического состояния элементов (этапности).

Динамическая модель развития сети с дискретно-непрерывными переменными. При динамической постановке задачи будем считать, что заданы изменения во времени объемов отправления и прибытия грузов (вектор b^t), интенсивности загрузки сети пассажирскими потоками $X^t_{\text{П}}$, влияние научно-технического прогресса и других факторов на приведенные затраты функции $f^t_{uk}(X^t, X^t_{\text{П}})$. Будем также полагать, что:

а) возможные на каждом элементе сети состояния технического оснащения частично упорядочены (например, по возрастанию мощности) и эта упорядоченность реализуется во времени, т.е. переход на более низкие уровни не предусматривается;

б) стоимость "бросовых" работ при изменении состояния элементов мала, т.е. капитальные вложения, потребные для перехода от одного состояния элемента к другому непосредственно или через промежуточные состояния иерархической цепи, различаются незначительно;

в) величина эксплуатационных расходов на перевозки по любому элементу сети полностью определяется на каждый год техническим оснащением и загрузкой этого отдельно взятого элемента сети.

Тогда динамическая модель, являющаяся естественным обобщением модели (21)–(27), примет вид:

$$\min_{X^t,\,\eta^t} F(T, X^t, \eta^t) = \min_{X^t,\,\eta^t} \sum_{t=1}^{t=T} \sum_{u,k} f^t_{uk}(X^t, X^t_{\text{П}}, \eta^t)\,\eta^t_{uk}(1+E)^{-t} \tag{28}$$

при ограничениях:

$$S^t_p X^t = b^t, \tag{29}$$

$$X^t \geq 0, \tag{30}$$

$$\eta^t_{uk} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \forall u, k, t, \tag{31}$$

$$\sum \eta^t_{uk} \leq 1 \quad \forall u, t, \tag{32}$$

$$X^t_u\left(1 - \sum_k \eta^t_{uk}\right) = 0 \quad \forall u, t, \tag{33}$$

$$\sum_{t=\theta_1}^{t=\theta_2} \sum_{u,k} r^t_{juk}\,\eta^t_{uk} \leq R_j^{\theta_1\theta_2} \quad \forall j, \tag{34}$$

$$\left(\sum_k k\,\eta^t_{uk} - \sum_k k\,\eta^\tau_{uk}\right)(t-\tau) \geq 0 \quad \forall k, u, t, \tau, \tag{35}$$

где t, τ – индексы текущего года; T – продолжительность расчетного периода; $R_j^{\theta_1\theta_2}$ – ограничение на суммарное значение расхода ресурса[8] j в период от года θ_1 до года θ_2 включительно (обычно θ_1 и θ_2 – соответственно начальный и конечный годы этапа планирования, чаще всего

[8] При определении входящих в (34) значений r^t_{juk} (расходы ресурса, необходимого для приведения элемента u к году t из исходного в состояние k) в качестве исходного принимается состояние в конце года t – 1.

пятилетнего, входящего в расчетный период *T*); если ограничение (14) задано отдельно на некоторый год, то $\theta_1 = \theta_2 = t$.

Смысл целевой функции (28) и ограничений (29)–(34) аналогичен (с распространением на динамику) соответствующим соотношениям (21) и (22)–(27) статической модели. Условие (35) определяет соблюдение упорядоченности возможной смены технических состояний на элементах сети. Решение задачи (28)–(35) дает возможность установить, в какой год и какие элементы должны быть реконструированы (или построены) и до какого состояния. Время при этом принимается дискретным, т.е. шаг изменения величин t, τ, θ_1, θ_1 равен одному году.

Для реальных задач достаточно большого размера (при моделировании железных дорог всей страны) наиболее приемлемым оказался алгоритм последовательной оптимизации по группам дискретных и непрерывных переменных, т.е. сначала задавались топология сети и уровень развития отдельных элементов, а оптимизировалось по изложенному в задаче 1 алгоритму распределение потоков, затем найденные квазиоптимальные значения потоков, т.е. непрерывных переменных, фиксировались и оптимизация проводилась по дискретным переменным. Нетрудно показать, что за конечное число таких двухэтапных итераций будет найден локальный оптимум. Степень его отклонения по функционалу, конечно, может быть различной, но оценки, проведенные на простейших примерах, где удалось построить к исходной задаче выпуклую оболочку, дали обнадеживающие результаты.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Пионерные работы Л.В. Канторовича 1930–1940-х годов по оптимизации потоков в сетях внесли весомый вклад в создание и развитие нового экономико-математического направления в целом и стимулировали формирование оптимизационных моделей и их практическое использование в ряде отраслей, в первую очередь на транспорте. Выше был отмечен ряд работ 1960–1970-х годов, которые на модельном уровне развивали идеи Л.В. Канторовича, высказанные им в статьях, двойной юбилей которых наступил в 2009 г. В неосвещенные в данной статье последующие три прошедших десятилетия (вплоть до настоящего времени) значимость этих идей, да и других работ Л.В. Канторовича по транспорту[9] и обращение к ним не уменьшились, о чем можно судить по достаточно представительному, хотя и ни в коей мере не претендующему на полноту, обзору и анализу публикаций по проблематике оптимизации потоков в сетях, содержащихся, например, в статьях (Белоусова и др., 2004, 2008). В них содержатся ссылки на более чем 100 отечественных и зарубежных работ, опубликованных на эту тему не ранее 1980 г. Эти работы свидетельствуют, что и сегодня идеи Л.В. Канторовича успешно развиваются в России и прочно вошли (в том числе и на образовательном уровне) в состав необходимых профессиональных знаний отечественных и зарубежных экономистов. Конечно, спектр включаемых сюжетов, естественно, расширился, в том числе и в связи с радикальными преобразованиями хозяйственного механизма в нашей стране. В частности, в (Белоусова и др., 2004, 2008) большее внимание уделено информационной технологии решения задач синтеза сложных иерархических нелинейных сетевых структур на базе динамических моделей и алгоритмов их компьютерной реализации, включая блоки имитационного моделирования, уточнению с учетом факторов макроэкономической нестационарности используемых в алгоритмах развития сети критериев (как стоимостных нормативных, так и допускающих самоорганизацию потоков по сети) и, что особенно важно, учитывающих диверсификацию источников и схем финансирования в рыночных условиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Арсенов В.И. (1967): Оценка вариантов развития транспортной сети с помощью методов линейного программирования. В сб.: "*Труды ИКТП*". Вып. 3. М.: ИКТП.

Белоусова Н.И., Бушанский С.П., Васильева Е.М. и др. (2004): Совершенствование теоретических основ, моделей и методов оптимизации развития сети автомобильных дорог. В сб.: "*Компьютерный аудит*". № 3.

[9] Многие из них, включая хронологический перечень всех работ Л.В. Канторовича в области экономики и транспорта, опубликованных в 1939–1987 гг., собраны в монографии (Канторович, 1989б).

Белоусова Н.И., Бушанский С.П., Васильева Е.М. и др. (2008): Информационная технология синтеза сложных сетевых структур нестационарной российской экономики: модели, алгоритмы, программная реализация // *Аудит и финансовый анализ*. № 1.

Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. (1965): Задачи на экстремум при наличии ограничений // *Ж. вычислительной мат. и мат. физ*. № 3.

Васильева Е.М., Левит Б.Ю., Лившиц В.Н. (1981): Нелинейные транспортные задачи на сетях. М.: Фин. и стат.

Васильева Е.М., Лившиц В.Н. (1989): Работы Л.В. Канторовича в области решения сетевых транспортных задач и развитие его идей в СССР. В сб.: "*Экономико-математические модели и методы*". Воронеж: Изд-во Воронежского ун-та.

Гибшман А.Е. (1965): Задачи на экстремум при наличии ограничений // *Вестник ВНИИЖТа.* № 6.

Ермольев Ю.М., Мельник И.М. (1967): Оптимальные неоднородные потоки и вопросы развития сетей. В сб.: "*Труды Первой Всесоюзной конференции по оптимизации и моделированию транспортных сетей*". Киев: Изд-во Института кибернетики АН УССР.

Ермольев Ю.М., Мельник И.М. (1968): Экстремальные задачи на графах. В сб.: "*Труды Первой Всесоюзной конференции по оптимизации и моделированию транспортных сетей*". Киев: Наукова Думка.

Итоги конкурса программ (1985): Итоги конкурса программ построения матрицы кратчайших расстояний "Транспорт–83" // *Экономика и мат. методы*. Т. 21. Вып. 3.

Канторович В.Л. (1989): Первая рукопись по линейному программированию. В сб.: "*Экономико-математические модели и методы*". Воронеж: Изд-во Воронежского ун-та.

Канторович Л.В. (1942): О перемещении масс // *Докл. АН СССР. Новая серия*. Т. 37. № 7–8.

Канторович Л.В., Гавурин М.К. (1949): Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков. В сб.: "*Проблемы повышения эффективности работы транспорта*". М.; Л.: Изд-во АН СССР.

Канторович Л.В. (1959): Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М.: Изд-во АН СССР.

Канторович Л.В. (1989а): О некоторых математических проблемах экономики промышленности, сельского хозяйства и транспорта. В сб.: "*Экономико-математические модели и методы*". Воронеж: Изд-во Воронежского ун-та.

Канторович Л.В. (1989б): Проблемы эффективного использования и развития транспорта. М.: Наука.

Ковшов Г.Н., Нестеров Е.П. (1965): Оперативные и перспективные сетевые задачи. М.: Изд-во ЦЭМИ АН СССР.

Козин Б.С., Козлов И.Т. (1964): Выбор схем этапного развития железнодорожных линий. М.: Транспорт.

Левит Б.Ю. (1971): Алгоритмы поиска кратчайших путей на графе: Труды Института гидродинамики СО АН СССР. В сб.: "*Моделирование процессов управления*". Вып. 4. Новосибирск: Изд-во Института гидродинамики.

Левит Б.Ю., Лившиц В.Н. (1972): Нелинейные сетевые транспортные задачи. М.: Транспорт.

Лившиц В.Н. (1967): О применении математических методов при выборе оптимальной схемы развития транспортной сети. В сб.: "*Труды Первой Всесоюзной конференции по оптимизации и моделированию транспортных сетей*". Киев: Изд-во Института кибернетики АН УССР.

Лившиц В.Н. (1969): Оптимальное распределение неоднородных потоков по нелинейной транспортной сети // *Известия АН СССР. Серия "Энергетика и транспорт"*. № 1.

Лившиц В.Н., Позамантир Э.И. (1969): Решение нелинейных многопродуктовых транспортных задач. В сб.: "*Поиск экстремума*". Томск: Изд-во Томского ун-та.

Лившиц В.Н. (1986): Системный анализ экономических процессов на транспорте. М.: Транспорт.

Лурье А.Л. (1964): О математических методах решения задачи на оптимум при планировании социалистического хозяйства. М.: Наука.

Мокроусова Н.И. (1963): Оптимальное планирование перевозок на сети с ограничениями пропускных способностей. В сб.: "*Труды ИКТП*". Вып. 1. М.: ИКТП.

Нестеров Е.П. (1962): Транспортные задачи линейного программирования. М.: Транспорт.

Романовский И.В. (1962): Об эквивалентности различных постановок транспортной задачи // *Успехи мат. наук*. Т. 17. Вып. 3.

Толстой А.Н. (1939): Методы устранения нерациональных перевозок при планировании // *Социалистический транспорт*. № 9.

Толстой А.Н. (1941): Методы устранения нерациональных перевозок при составлении оперативных планов. М.: Трансжелдориздат.

Поступила в редакцию
13.05.2009 г.

About the Two Anniversaries of One Classic Research by L.V. Kantorovich

V.N. Livshits

The article deals with the classic results of research on the potential optimal flows in linear nets obtained by Kantorovich in 1939, but published in 1949 (with Gavurin M.C.). Then the classic Kantorovich results are referred to the nonlinear nets. The models and algorithms of the flow optimization in the non-linear nets at the fixed and at the higher technical level of its elements are proposed.