
**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ**

**ОБ ОДНОМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ
В ЗАДАЧЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДОХОДА**

© 2009 г. А.Х. Хачатрян, Х.А. Хачатрян

(Республика Армения)

Исследуется класс интегро-дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, имеющих важное применение в эконометрике. Доказывается существование однопараметрического семейства решений этого уравнения. Описывается их структура, и обобщаются законы показательных и нормальных распределений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим класс интегро-дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial Y(t, \omega)}{\partial t} + p(\omega) \frac{\partial Y(t, \omega)}{\partial \omega} + \beta(\omega) Y(t, \omega) = \int_0^{+\infty} W(\omega, \omega') Y(t, \omega') d\omega',$$

$$\omega \in [\omega_0, +\infty), \quad t \in [0, T], \quad \omega_0 > 0,$$
(1)

относительно искомой функции $Y(t, \omega)$. Здесь $p(\omega)$ и $\beta(\omega)$ – заданные неотрицательные измеримые функции на $[\omega_0, +\infty)$, а $0 \leq W(\omega, \omega')$ определена на множестве $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$.

Уравнение (1) имеет важные применения в эконометрике (Sargan, 1957, р. 568–590). В частности, этим уравнением описывается задача распределения богатства страны между ее экономическими агентами, при этом $Y(t, \omega)$ играет роль плотности распределения, причем $Y(t, \omega)d\omega$ приближенно представляет долю экономических агентов в интервале $\omega, \omega + d\omega$ в момент времени t ; $W(\omega, \omega')$ – функция перераспределения, обусловленная разными экономическими причинами (капитальные трансферты, в том числе пожертвования между агентами, возникновение новых агентов, объединение двух или нескольких предприятий, исчезновение старых предприятий и переход имущества в качестве наследства – полностью или частично – к другим агентам); $W(\omega, \omega')d\omega'dt$ – число агентов, богатство которых за время dt в связи с вышеуказанными причинами оказалось в интервале $\omega', \omega' + d\omega'$ при условии, что первоначальное богатство было ω ;

функция $p(\omega)$ характеризует средние сбережения и рост капиталов; $\beta(\omega) = \gamma(\omega) + \frac{dp}{d\omega}$, где $\gamma(\omega)$ – описывает “потери богатств” в связи с банкротством и исчезновением агентов; ω_0 – нижняя граница дохода.

В уравнении (1) переходим от аргумента ω к новому аргументу $x = x(\omega)$ посредством замены

$$x = \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega' / p(\omega').$$
(2)

Функция $x(\omega_0)$ – строго возрастающая непрерывно дифференцируемая, $x(\infty) = \infty$, $x(\omega_0) = 0$. После перехода от аргументов t, ω к новым аргументам t, x обозначим: $Y(t, \omega) = f(t, x)$, $\beta(\omega) = q(x)$, $W(\omega, \omega') = K(x, x')$. Тогда (1) превращается в

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} + q(x)f(t, x) = \int_0^{+\infty} K(x, x')f(t, x')dx', \quad x \in (0, +\infty).$$
(3)

После полного решения задачи возвращение к исходному аргументу ω может быть осуществлено по формуле

$$\omega(x) = \int_0^x p(x') dx',$$

где $\omega(x)$ является обратной к функции $x(\omega)$. (Для $\beta(\omega) = \text{const}$, $p(\omega) = a\omega$, а $W(\omega, \omega')$ – однородная функция нулевого порядка уравнение (1) было исследовано в (Sargan, 1957, p. 568–590).)

В настоящей работе, накладывая некоторые общие и естественные условия на функции $q(x)$ и $K(x, x')$, удастся доказать существование нетривиальных решений уравнения (3) и найти структуру построенных решений.

Исходя из экономических соображений применим метод разделения переменных (метод Фурье), т.е. решение ищем в виде

$$f(t, x) = v(t)u(x). \quad (4)$$

Из (3) следует

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dt} = \left[-\frac{du}{dx} - q(x)u(x) + \int_0^\infty K(x, x')u(x')dx' \right] / u(x) = \lambda, \quad \lambda = \text{const}, \quad (5)$$

а из соотношения (5) –

$$v(t) = v_\lambda(t) = e^{\lambda t}, \quad (6)$$

$$\frac{du}{dx} + r(x)u(x) = \int_0^\infty K(x, x')u(x')dx', \quad (7)$$

$$u(0) = c_0(\lambda),$$

где

$$r(x) = q(x) + \lambda. \quad (8)$$

В последующих разделах исследуем основное интегро-дифференциальное уравнение (7).

Рассмотрим две возможности: а) $r(x) \in M(0, +\infty)$; б) $r(x)$ имеет структуру $r(x) = bx - \tilde{q}_0(x) + \lambda$, $0 \leq \tilde{q}_0(x) - \lambda \in M(0, +\infty)$, $b > 0$. Случай а) условно назовем показательным распределением (ПР), а случай б) – нормальным распределением (НР).

2. НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФАКТЫ

Пусть Ω – класс следующих интегральных операторов: $\mathbf{K} \in \Omega$, если

$$(\mathbf{K}f)(x) = \int_0^\infty K(x, x')f(x')dx', \quad f \in L_p(0, +\infty), \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (9)$$

Будем предполагать, что $K(x, x')$ удовлетворяет условиям

$$\mu_1(K) = \sup_{x' \in [0, +\infty)} \text{ess} \int_0^\infty K(x, x')dx < +\infty, \quad (10)$$

$$\mu_2(K) = \sup_{x \in [0, +\infty)} \text{ess} \int_0^\infty K(x, x')dx < +\infty. \quad (11)$$

Из интерполяционной теоремы Рисса следует, что

$$\|\mathbf{K}\|_{L_p} \leq \max(\mu_1(K), \mu_2(K)) \equiv \mu. \quad (12)$$

Обозначим через Ω^* класс следующих операторов: $\mathbf{K}^* \in \Omega^*$, если $(\mathbf{K}^* f)(x) = \int_0^\infty K(x, t)f(t)dt + \rho_K(x)$,

$f \in L_p(0, +\infty)$, $\rho_K \in L_1(0, +\infty)$, а ядро $K(x, t)$ удовлетворяет условиям (10) и (11).

Лемма 1. Класс Ω^* замкнут относительно операции умножения, т.е. если $\mathbf{K}_1^*, \mathbf{K}_2^* \in \Omega^*$, то $\mathbf{K}_1^* \mathbf{K}_2^* \in \Omega^*$.

Доказательство. Действительно, пусть $f \in L_p(0, +\infty)$ – произвольная функция, тогда

$$(\mathbf{K}_1^* \mathbf{K}_2^* f)(x) = \int_0^\infty K_1(x, t) \left(\int_0^\infty K_2(t, \tau) f(\tau) d\tau \right) dt + \int_0^\infty K_1(x, t) \rho_2(t) dt + \rho_1(x).$$

Изменяя порядок интегрирования в первом (двойном) интеграле, запишем

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_1^* \mathbf{K}_2^* f)(x) &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty K_1(x, t) K_2(t, \tau) dt \right) f(\tau) d\tau + \int_0^\infty K_1(x, t) \rho_2(t) dt + \rho_1(x) = \\ &= \int_0^\infty W(x, \tau) f(\tau) d\tau + \rho_W(x), \end{aligned}$$

где $\rho_W(x) = \rho_1(x) + \int_0^\infty K_1(x, t) \rho_2(t) dt$, $W(x, \tau) = \int_0^\infty K_1(x, t) K_2(t, \tau) dt$. Для завершения доказательства остается проверить, что $W^* = \mathbf{K}_1^* \mathbf{K}_2^* \in \Omega^*$, т.е.

$$\sup_{x \in [0, \infty)} \int_0^\infty W(x, \tau) d\tau < +\infty, \quad (13)$$

$$\sup_{\tau \in [0, \infty)} \int_0^\infty W(x, \tau) dx < +\infty, \quad (14)$$

$$\rho_W \in L_1(0, +\infty). \quad (15)$$

Докажем (14). По теореме Фубини (Колмогоров, Фомин, 1981, с. 317) при всяком $\delta > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\delta W(x, \tau) dx &= \int_0^\delta \int_0^\infty K_1(x, t) K_2(t, \tau) dt dx = \int_0^\infty K_2(t, \tau) \int_0^\delta K_1(x, t) dx dt \leq \\ &\leq \left(\sup_{t \in [0, \infty)} \int_0^\infty K_1(x, t) dx \right) \sup_{\tau \in [0, \infty)} \int_0^\infty K_2(t, \tau) dt = \mu_1(K_1) \mu_1(K_2) < +\infty. \end{aligned}$$

В силу произвольности числа $\delta > 0$ приходим к (14). Аналогичным образом доказываются соотношения (13) и (15). ■

Обозначим через $W_p^n(0, +\infty)$ пространство Соболева, состоящее из функций f , таких что $f^{(k)} \in L_p(0, +\infty)$, $k = 0, \dots, n$, где через $f^{(k)}$ обозначена производная с номером k функции f , $1 \leq p < +\infty$. Для дальнейшего изложения нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2. Пусть $f \in W_p^{n-1}(0, +\infty)$ – произвольная вещественная функция, тогда при всяком

$$\alpha > 0: F_\alpha(x) = \int_0^x e^{-\alpha(x-t)} f(t) dt \in W_p^n(0, +\infty).$$

Доказательство. По индукции легко можно проверить, что

$$F^{(k)}(x) = f^{(k-1)}(x) + \dots + (-1)^k \alpha^{k-1} f(x) + (-1)^k \alpha^k \int_0^x e^{-\alpha(x-t)} f(t) dt, \quad (16)$$

$$k = 0, \dots, n, \quad F^{(0)}(x) \equiv F(x).$$

Поскольку $f \in W_p^{n-1}(0, +\infty)$, то для завершения доказательства достаточно проверить, что $F \in L_p(0, +\infty)$, $p \geq 1$. Пусть $p = 1$; при любом $r > 0$ рассмотрим интеграл

$$\int_0^r \left| \int_0^x e^{-\alpha(x-t)} f(t) dt \right| dx \leq \int_0^r \int_0^x e^{-\alpha(x-t)} |f(t)| dt dx.$$

Изменяя порядок интегрирования в последнем интеграле, будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_0^r \left| \int_0^x e^{-\alpha(x-t)} f(t) dt \right| dx &\leq \int_0^r |f(t)| e^{\alpha t} \int_t^r e^{-\alpha x} dx \leq \frac{1}{\alpha} \int_0^r |f(t)| dt + \frac{1}{\alpha} \int_0^r |f(t)| e^{-\alpha(r-t)} dt \leq \\ &\leq \frac{2}{\alpha} \int_0^r |f(t)| dt \leq \frac{2}{\alpha} \int_0^\infty |f(t)| dt < +\infty, \end{aligned}$$

откуда следует, что $F \in L_1(0, +\infty)$.

Пусть теперь $p > 1$. Рассмотрим интеграл

$$I_r = \int_0^r \left| \int_0^x e^{-\alpha(x-t)} f(t) dt \right|^p dx$$

и применим неравенство Гелдера

$$\begin{aligned} I_r &\leq \int_0^r \left(\int_0^x e^{-\alpha(x-t)} |f(t)| dt \right)^p dx = \int_0^r \left(\int_0^x |f(t)| e^{-\alpha(x-t)/p} e^{-\alpha(x-t)/q} dt \right)^p dx \leq \\ &\leq \int_0^r \left(\int_0^x |f(t)|^p e^{-\alpha(x-t)} dt \right) \left(\int_0^x e^{-\alpha(x-t)} dt \right)^{p-1} dx \leq (1/\alpha)^{p-1} \int_0^r \int_0^x |f(t)|^p e^{-\alpha(x-t)} dt dx = \\ &= (1/\alpha)^p \int_0^r |f(t)|^p e^{\alpha t} \int_t^r e^{-\alpha x} dx dt \leq \frac{2}{\alpha^p} \int_0^r |f(t)|^p dt \leq \frac{2}{\alpha^p} \int_0^\infty |f(t)|^p dt < +\infty. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3. ЗАДАЧА ФАКТОРИЗАЦИИ

Перепишем уравнение (7) в операторной форме

$$(\hat{D} + \hat{R}_\lambda - \hat{K})u = 0, \quad (17)$$

где $(\hat{D}f)(x) = df/dx$ – оператор дифференцирования; $(\hat{R}_\lambda f)(x) = r(x)f(x)$ – оператор умножения на функцию $r(x) = q(x) + \lambda$; а $\hat{K}$ – интегральный оператор вида (9), где $K(x, x')$ – удовлетворяет условиям (10) и (11).

Рассмотрим следующую задачу: для произвольного положительного числа $\alpha > 0$ найти такой интегральный оператор $\hat{W}_\alpha \in \Omega$, чтобы уравнение (17) было равносильно связанной системе уравнений

$$(\hat{D} + \alpha I)u = F, \quad (I - \hat{W}_\alpha)F = 0, \quad (18)$$

где I – единичный оператор. Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 3. Пусть функция $r \in M(0, +\infty)$, а $K(x, x')$ удовлетворяет условиям (10), (11), тогда уравнение (17) равносильно системе (18), причем

$$(\hat{W}_\alpha f)(x) = \int_0^\infty W_\alpha(x, t) f(t) dt + \rho_W(x),$$

$$W_\alpha(x, t) = \alpha e^{-\alpha(x-t)} \theta(x-t) - r(x) e^{-\alpha(x-t)} \theta(x-t) + \int_t^\infty K(x, \tau) e^{-\alpha(\tau-t)} d\tau, \quad (19)$$

$$\rho_W(x) = c_0(\lambda) \left(\alpha e^{-\alpha x} - r(x) e^{-\alpha x} + \int_t^\infty K(x, t) e^{-\alpha t} dt \right). \quad (20)$$

Доказательство. Обозначим через $\hat{\Gamma}_\alpha$ обратный оператор дифференциального оператора $\hat{D} + \alpha I$ в пространстве $W_1^1(0, +\infty)$. Нетрудно убедиться, что $\hat{\Gamma}_\alpha \in \Omega^*$ и задается посредством уравнения

$$(\hat{\Gamma}_\alpha f)(x) = c_0(\lambda) e^{-\alpha x} + \int_0^x e^{-\alpha(x-t)} f(t) dt. \quad (21)$$

Используя лемму 1, заключаем, что

$$\hat{R}\hat{\Gamma}_\alpha \in \Omega^*, \quad \hat{K}\hat{\Gamma}_\alpha \in \Omega^*. \quad (22)$$

Тогда

$$\left(I - \left((\alpha - \hat{R}_\lambda) \hat{\Gamma}_\alpha + \hat{K}\hat{\Gamma}_\alpha \right) \right) F = 0, \quad (\hat{D} + \alpha I)u = F.$$

Если обозначить

$$\hat{W}_\alpha = (\alpha - \hat{R}_\lambda) \hat{\Gamma}_\alpha + \hat{K}\hat{\Gamma}_\alpha, \quad (23)$$

то, проведя переход от равенства операторов к равенству ядер, получим требуемые формулы для $W_\alpha(x, t)$ и $\rho_W(x)$.

Теперь убедимся, что $\hat{W}_\alpha \in \Omega^*$. С этой целью докажем, что

$$\sup_{x \in [0, +\infty)} \text{ess} \int_0^\infty W_\alpha(x, t) dt < +\infty \quad \text{при} \quad \alpha \geq \sup_x r(x).$$

У нас

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0, +\infty)} \text{ess} \int_0^\infty W_\alpha(x, t) dt &\leq \frac{1}{\alpha} \sup_{x \in [0, +\infty)} \text{ess} (\alpha - r(x)) + \int_0^\infty \int_t^\infty K(x, \tau) e^{-\alpha(\tau-t)} d\tau dt = \\ &= \frac{1}{\alpha} \sup_{x \in [0, +\infty)} \text{ess} (\alpha - r(x)) + \int_0^\infty K(x, \tau) \int_0^\tau e^{-\alpha(\tau-t)} d\tau dt \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \sup_x \text{ess} (\alpha - r(x)) + \frac{1}{\alpha} \sup_{x \in [0, +\infty)} \text{ess} \int_0^\infty K(x, \tau) d\tau < +\infty. \end{aligned}$$

Соотношение

$$\sup_{t \in [0, +\infty)} \text{ess} \int_0^\infty W_\alpha(x, t) dx < +\infty$$

проверяется аналогичным образом. ■

В дальнейшем для удобства в качестве α выберем $\alpha = \alpha(\lambda) = \sup q(x) + \lambda$. Из представления (19) следует, что функция $W_\alpha(x, t)$ будет неотрицательна.

4. РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЯ (7) В СЛУЧАЕ ПОКАЗАТЕЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим основное уравнение (7) в случае показательного распределения, т.е. когда

$$r \in M(0, +\infty). \quad (24)$$

Решение уравнения (7) равносильно решению уравнений

$$(I - \hat{W}_\alpha)F = 0, \quad (25)$$

$$(\hat{D} + \alpha I)u = F. \quad (26)$$

Сначала займемся решением уравнения (25):

$$F(x) = \rho_W(x) + \int_0^\infty W_\alpha(x, t)F(t)dt, \quad (27)$$

где функции $\rho_W(x)$ и $W_\alpha(x, t)$ задаются формулами (19) и (20). Рассмотрим следующие итерации:

$$F^{(n+1)}(x) = \rho_W(x) + \int_0^\infty W_\alpha(x, t)F^{(n)}(t)dt, \quad x \in (0, +\infty), \quad (28)$$

$$F^{(0)}(x) = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Сначала по индукции докажем, что если $c_0(\lambda) > 0$, то:

1) $F^{(n)} \uparrow$ по n при каждом фиксированном $x \in (0, +\infty)$;

2) $\rho_W(x) \leq F^{(n)}(x) \in L_1(0, +\infty)$, $n = 1, 2, \dots$

Поскольку $c_0(\lambda) > 0$, то функция $\rho_W(x)$ принимает неотрицательные значения, т.е. $\rho_W(x) \geq 0$.

1. Пусть $n = 0$. Из (28) имеем

$$F^{(1)}(x) = \rho_W(x) + \int_0^\infty W_\alpha(x, t)F^{(0)}(t)dt = \rho_W(x) \geq 0 \quad (= F^{(0)}(x)).$$

Предположим теперь, что $F^{(n+1)}(x) \geq F^{(n)}(x)$, и докажем, что $F^{(n+2)}(x) \geq F^{(n+1)}(x)$. Имеем

$$F^{(n+2)}(x) \geq \rho_W(x) + \int_0^\infty W_\alpha(x, t)F^{(n)}(t)dt = F^{(n+1)}(x).$$

Аналогичными рассуждениями проверяется соотношение 2. С учетом приведенных фактов при $\alpha > \sup_{x \in [0, +\infty)} r(x)$ получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty F^{(n+1)}(x)dx &\leq \int_0^\infty \rho_W(x)dx + \int_0^\infty \int_0^\infty W_\alpha(x, t)F^{(n)}(t)dt dx \leq \int_0^\infty \rho_W(x)dx + \\ &+ \int_0^\infty F^{(n+1)}(t) \int_0^\infty W_\alpha(x, t)dx. \end{aligned} \quad (29)$$

Оценим следующий интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty W_\alpha(x, t)dx &= \int_0^\infty (\alpha - r(x))e^{-\alpha(x-t)}\theta(x-t)dx + \int_0^\infty \int_t^\infty K(x, \tau)e^{-\alpha(\tau-t)}d\tau dx \leq \\ &\leq \left[\sup_{x \in [0, +\infty)} (\alpha - r(x)) \right] / \alpha + \mu_1(K) / \alpha \leq 1 - \left[\inf_{x \in [0, +\infty)} r(x) \right] / \alpha + \mu_1(K) / \alpha \equiv \rho_0. \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы

$$\mu_1(W_\alpha) = \sup_{t \in [0, +\infty)} \int_0^\infty W_\alpha(x, t) dx < 1. \quad (30)$$

Заметим, что условие (30) выполняется, если

$$\lambda > \mu_1(K) - \delta, \quad (31)$$

где $\delta = \inf_{x \in [0, +\infty)} q(x)$. С учетом (31) из (29) получим

$$\int_0^\infty F^{(n+1)}(x) dx \leq \int_0^\infty \rho_W(x) dx / (1 - \rho_0), \quad n = 0, 1, \dots \quad (32)$$

Таким образом, учитывая 1), 2) и неравенство (32), по теореме Б. Леви (Колмогоров, Фомин, 1981, с. 303) заключаем, что последовательность функции $\{F^{(n)}(x)\}_{n=0}^\infty$ почти всюду в $(0, +\infty)$ сходится к суммируемой функции $F(x)$. Ниже докажем, что предельная функция $F \in L_1(0, +\infty)$ удовлетворяет уравнению (27). Действительно, из (28) следует, что

$$\int_0^\infty W_\alpha(x, t) F^{(n)}(t) dt \leq F(x) - \rho_W(x), \quad (33)$$

откуда с учетом 1), 2) и теоремы Леви следует неравенство

$$\int_0^\infty W_\alpha(x, t) F(t) dt \leq F(x) - \rho_W(x). \quad (34)$$

С другой стороны,

$$F^{(n+1)}(x) \leq \rho_W(x) + \int_0^\infty W_\alpha(x, t) F(t) dt \in L_1(0, +\infty),$$

откуда в силу теоремы Лебега получим

$$F(x) \leq \rho_W(x) + \int_0^\infty W_\alpha(x, t) F(t) dt. \quad (35)$$

Комбинируя (34) и (33), заключаем, что $F \in L_1(0, +\infty)$ удовлетворяет уравнению (27). Решая дифференциальное уравнение (26), с учетом леммы 2.2 приходим к следующей теореме.

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

$$c_0(\lambda) > 0, q(x) \in L_\infty(0, +\infty), \quad \mu_1(K) = \sup_{x' \in [0, +\infty)} \int_0^\infty K(x, x') dx < +\infty.$$

Тогда если $\lambda > \mu_1(K) - \delta$, то уравнение (7) в пространстве $W_1^1(0, +\infty)$ имеет неотрицательное решение вида

$$u_\lambda(x) = c_0(\lambda) e^{-\alpha(\lambda)x} + \int_0^x e^{-\alpha(\lambda)(x-t)} F_\lambda(t) dt,$$

где $\rho_W(x) \leq F(x) \in L_1(0, +\infty)$, $\alpha(\lambda) = \sup_{x \in [0, +\infty)} q(x) + \lambda$.

Замечание. Несмотря на то что исходя из экономических соображений естественно искать именно неотрицательные решения, тем не менее в теоремах 1 и 2 от условия $c_0(\lambda) > 0$ (т.е. $\rho_W(x) \geq 0$) можно отказаться. Действительно, для этой цели введем функции

$$\rho_W^+(x) = \begin{cases} \rho_W(x), & \text{если } \rho_W(x) \geq 0, \\ 0, & \text{если } \rho_W(x) < 0; \end{cases}$$

$$\rho_W^-(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \rho_W(x) \geq 0, \\ -\rho_W(x), & \text{если } \rho_W(x) < 0. \end{cases}$$

Тогда $0 \leq \rho_W^+ \in L_1(0, +\infty)$ и $\rho_W = \rho_W^+ - \rho_W^-$. Проводя аналогичные рассуждения, как при доказательстве теоремы 1,

$$F^\pm(x) = \rho_W^\pm(x) + \int_0^\infty W_\alpha(x, t) F^\pm(t) dt,$$

получим существование решений $0 \leq F^\pm \in L_1(0, +\infty)$. Тогда в силу линейности уравнения и с учетом $\rho_W = \rho_W^+ - \rho_W^-$ заключаем, что $F = F^+ - F^- \in L_1(0, +\infty)$ является решением уравнения (27).

5. ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (27)

Теорема 2. Пусть выполнены следующие условия:

а) $c_0(\lambda) > 0$, $q(x) \in L_\infty(0, +\infty)$, $\mu(K) = \max(\mu_1(K), \mu_2(K)) < +\infty$;

б) $\rho_W \in L_p(0, +\infty)$.

Тогда если $\lambda > \mu(K) - \delta$, то уравнение (27) в пространстве $W_p^1(0, +\infty)$ имеет неотрицательное решение вида

$$u_\lambda(x) = c_0(\lambda) e^{-\alpha(\lambda)x} + \int_0^x e^{-\alpha(\lambda)(x-t)} F_\lambda(t) dt, \quad (36)$$

где $\alpha_0(\lambda) \geq \sup_{x \in [0, +\infty)} r(x)$ – положительное число, $0 \leq F \in L_p(0, +\infty)$, причем

$$\int_0^\infty (u_{0\lambda}(x)/x)^p dx \leq (p/(p-1))^p \int_0^\infty F^p(x) dx, \quad (37)$$

$$u_{0\lambda}(x) = \int_0^x e^{-\alpha(\lambda)(x-t)} F(t) dt.$$

Доказательство. Рассмотрим интегральный оператор вида

$$(\tilde{W}_\alpha f)(x) = \int_0^\infty W_\alpha(x, t) f(t) dt, \quad f \in L_p(0, +\infty), \quad p \geq 1,$$

где W_α задается посредством (19). Нетрудно убедиться, что при условии $\lambda > \mu(K) - \delta$ имеем $\mu_1(W_\alpha) \leq \delta_\alpha < 1$, $\mu_2(W_\alpha) \leq q_\alpha < 1$. Из интерполяционной теоремы Рисса следует, что

$$\|\tilde{W}_\alpha\|_{L_p} \leq \max(\delta_\alpha, q_\alpha) < 1.$$

Последнее означает, что оператор $\tilde{W}_\alpha$ является сжимающим в пространстве $L_p(0, +\infty)$ с коэффициентом сжатия $\max(\delta_\alpha, q_\alpha)$. Так как $\rho_W \in L_p(0, +\infty)$, то уравнение (27) в пространстве $L_p(0, +\infty)$ имеет единственное решение. Таким образом, решая уравнение (26), получаем формулу (36). Из леммы 2 следует, что $u \in W_p^1(0, +\infty)$. Для завершения доказательства теоремы остается получить оценку (37).

Пусть $\delta > 0$ – произвольное число. Рассмотрим интеграл

$$\int_\delta^\infty \left(\frac{u_0(x)}{x} \right)^p dx = \frac{1}{1-p} \int_\delta^\infty u^p(x) dx^{1-p} = \frac{1}{1-p} \left(u^p(x) x^{1-p} \Big|_\delta^\infty - \int_\delta^\infty x^{1-p} du^p(x) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1-p} \left(-\frac{u^p(\delta)}{\delta^{p-1}} - p \int_{\delta}^{\infty} x^{1-p} u^{p-1}(x) (F(x) - \alpha u(x)) dx \right) = \\
&= \frac{u^p(\delta)}{(p-1)\delta^{p-1}} + \frac{p}{p-1} \int_{\delta}^{\infty} \frac{u^{p-1}(x)}{x^{p-1}} F(x) dx - \frac{p}{p-1} \alpha \int_{\delta}^{\infty} \frac{u^p(x)}{x^{p-1}} dx \leq \\
&\leq \frac{u^p(\delta)}{(p-1)\delta^{p-1}} + \frac{p}{p-1} \int_{\delta}^{\infty} \left(\frac{u(x)}{x} \right)^{p-1} F(x) dx \equiv I_{\delta}.
\end{aligned} \tag{38}$$

Применяя неравенство Гелдера, получим

$$u^p(x) \leq \left(\int_0^x F(t) dt \right)^p \leq \int_0^x F^p(t) dt x^{p-1},$$

откуда следует, что $u^p(x) = o(x^{p-1})$, $x \rightarrow 0^+$. Учитывая этот факт и используя неравенство Гелдера, в (38) будем иметь

$$\begin{aligned}
I_{\delta} &\leq o(1) + \frac{p}{p-1} \int_{\delta}^{\infty} (u(x)/x)^{p-1} F(x) dx \leq o(1) + \frac{p}{p-1} \left(\int_{\delta}^{\infty} F^p(x) dx \right)^{1/p} \left(\int_{\delta}^{\infty} (u(x)/x)^p dx \right)^{1-1/p} \leq \\
&\leq o(1) + \frac{p}{p-1} \|F\|_{L_p(0, +\infty)} \left(\int_{\delta}^{\infty} (u(x)/x)^p dx \right)^{1-1/p},
\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\left(\int_{\delta}^{\infty} (u(x)/x)^p dx \right)^{1-1/p} \leq o(1) + \frac{p}{p-1} \|F\|_{L_p(0, +\infty)}.$$

В силу произвольности $\delta > 0$ приходим к неравенству (37). ■

6. РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЯ (7) С ОДНОРОДНЫМ НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Теорема 3. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

а) $c_0(\lambda) = 0$, $\mu_2(W_{\alpha}) = 1$, $q(x) \in L_{\infty}(0, +\infty)$;

б) существует такая функция $0 \leq W_0^{\alpha} \in L_1(-\infty, +\infty)$, $\int_{-\infty}^{\infty} W_0^{\alpha}(x) dx = 1$, $\nu(W_0^{\alpha}) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x W_0^{\alpha}(x) dx < 0$,

что $W_{\alpha}(x, t) \geq W_0^{\alpha}(x-t)$, $\forall (x, t) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty)$. Тогда уравнение (7) в пространстве $W_{\infty}^1(0, +\infty) \cap L_1(0, +\infty)$ имеет неотрицательное решение вида

$$u_{\lambda}(x) = c_0(\lambda) e^{-\alpha(\lambda)x} + \int_0^x e^{-\alpha(\lambda)(x-t)} F_{\lambda}(t) dt, \tag{39}$$

где $0 \leq F \in L_{\infty}(0, +\infty)$.

Доказательство. Так как $c_0(\lambda) = 0$, то уравнение (27) превращается в однородное интегральное уравнение

$$F(x) = \int_0^{\infty} W_{\alpha}(x, t) F(t) dt. \tag{40}$$

Рассмотрим (40) и однородное уравнение Винера–Хопфа

$$S(x) = \int_0^{\infty} W_0^{\alpha}(x-t)S(t)dt, \quad (41)$$

где W_0^{α} удовлетворяет условию б). Известно, что однородное уравнение (41) имеет нетривиальное и неотрицательное решение $S(x) \neq 0$, такое что $S \in L_{\infty}(0, +\infty)$ (Арабаджян, Енгибарян, 1984, с. 175–244).

Рассмотрим следующие итерации:

$$F^{(n+1)}(x) = \int_0^{\infty} W_{\alpha}(x, t)F^{(n)}(t)dt, \quad F^{(0)}(x) = \sup_{x \in [0, +\infty)} \text{ess } S(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (42)$$

По индукции убедимся, что

1) $F^{(n)} \downarrow$ по n ,

2) $F^{(n)}(x) \geq S(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

1. Пусть $n = 0$. Тогда $F^{(1)}(x) = \int_0^{\infty} W_{\alpha}(x, t)F^{(0)}(t)dt \leq \sup_{x \in [0, +\infty)} \text{ess } S(x)\mu_2(W_{\alpha}) + F^{(0)}(x)$. Предположим

теперь, что $F^{(n+1)}(x) \leq F^{(n)}(x)$. Тогда $F^{(n+2)}(x) \leq \int_0^{\infty} W_{\alpha}(x, t)F^{(n)}(t)dt = F^{(n+1)}(x)$.

2. При $n \neq 0$ имеем

$$F^{(1)}(x) \geq \int_0^{\infty} W_0^{\alpha}(x-t)F^{(0)}(t)dt \geq \int_0^{\infty} W_0^{\alpha}(x-t)S(t)dt = S(x),$$

и если $F^{(n)}(x) \geq S(x)$, то $F^{(n+1)}(x) \geq \int_0^{\infty} W_0^{\alpha}(x-t)S(t)dt = S(x)$. Таким образом, последовательность

функций $\{F^{(n)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ имеет точечный предел $F(x) \in L_{\infty}(0, +\infty)$. Нетрудно убедиться, что F удовлетворяет (40). Следовательно, решая уравнение (26), приходим к завершению доказательства.

7. РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЯ (7) В СЛУЧАЕ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Будем предполагать, что функция $r(x)$ имеет следующую структуру:

$$r_{\lambda}(x) = bx - \tilde{q}_0(x) + \lambda = bx - q_0(x), \quad (43)$$

где $b > 0$, $0 \leq \tilde{q}_0(x) - \lambda \in M(0, +\infty)$. Тогда имеет место теорема.

Теорема 4. Пусть функция $r_{\lambda}(x)$ задается согласно (43) и $\mu_1 < +\infty$. Тогда если $\sqrt{\frac{2b}{\pi}} - \mu_1 > \omega(\tilde{q}_0(x)) = \delta_0 - \delta_1$, где ω – колебание функции $\tilde{q}_0(x)$ на $(0, +\infty)$, $\delta_0 = \sup_{x \in [0, +\infty)} \tilde{q}_0(x)$, $\delta_1 = \inf_{x \in [0, +\infty)} \tilde{q}_0(x)$, то уравнение (7) имеет нетривиальное решение вида

$$u_{\lambda}(x) = \left(c_0(\lambda) + \int_0^x e^{0.5\beta(\lambda)t^2} F_{\lambda}(t)dt \right) e^{-0.5\beta(\lambda)x^2}, \quad (44)$$

где $\beta(\lambda) \in (b; 2b^2/[\pi(\mu_1 + \delta_0 - \lambda)^2])$, а $F_{\lambda}(x) \in L_1(0, +\infty)$.

Доказательство. Рассмотрим следующую задачу: для произвольного числа $\beta(\lambda) \in (b; 2b^2/[\pi(\mu_1 + \delta_0 - \lambda)^2])$ найти такой интегральный оператор $\hat{W}_{\beta}$, чтобы решение уравнения (17) было равносильно связанной системе уравнений

$$(I - \hat{W}_{\beta})F = 0, \quad (\hat{D} + \hat{\Lambda})u = F, \quad (45)$$

где $(\hat{\Lambda}f)(x) = \beta x f(x)$.

Факторизация (45) понимается как равенство интегральных операторов, действующих в $L_1(0, +\infty)$. Сначала построим оператор $\hat{W}_\beta$. Пусть $\hat{\Gamma}_\beta$ – такой оператор, что

$$\hat{\Gamma}_\beta(\hat{D} + \hat{\Lambda}) = I, \quad (46)$$

$$\hat{W}_\beta = (\hat{\Lambda} - \hat{R}_\lambda)\hat{\Gamma}_\beta + \hat{K}\hat{\Gamma}_\beta. \quad (47)$$

Из (46) следует, что оператор $\hat{\Gamma}_\beta$ имеет вид

$$(\hat{\Gamma}_\beta f)(x) = \int_0^x e^{-0.5\beta(\lambda)(x^2-t^2)} f(t) dt + c_0(\lambda) e^{-0.5\beta(\lambda)x^2}. \quad (48)$$

Из (47) с учетом (48) получим

$$(W_\beta f)(x) = \int_0^\infty W(x, \tau) f(\tau) d\tau + \rho(x), \quad (49)$$

где

$$\rho(x) = (\beta x - r(x))c_0(\lambda) e^{-0.5\beta x^2} + c_0(\lambda) \int_0^\infty K(x, t) e^{-0.5\beta(\lambda)t^2} dt, \quad (50)$$

$$W_\beta(x, \tau) = (\beta x - r(x)) e^{-0.5\beta(\lambda)(x^2-\tau^2)} \theta(x - \tau) + \int_\tau^\infty K(x, t) e^{-0.5\beta(\lambda)(t^2-\tau^2)} dt. \quad (51)$$

С учетом вышесказанного уравнение (7) примет вид $(I - \hat{W}_\beta)F = 0$, $(\hat{D} + \hat{\Lambda})u = F$.

Обозначим через $F = (\hat{D} + \hat{\Lambda})u$, тогда функция F будет удовлетворять уравнению

$$F(x) = \rho(x) + \int_0^\infty W(x, \tau) F(\tau) d\tau. \quad (52)$$

В силу линейности уравнения (52), не умаляя общности, можно считать, что $\rho(x) \geq 0$ (см. замечание в разд. 4).

Рассмотрим следующие итерации:

$$F^{n+1}(x) = \rho(x) + \int_0^\infty W(x, \tau) F^{(n)}(\tau) d\tau, \quad (53)$$

$$F^0(x) = \rho(x), \quad n = 0, 1, \dots$$

Так как $\beta > b$, то из (51) следует, что $W(x, \tau) \geq 0$, $(x, \tau) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty)$. По индукции нетрудно убедиться, что:

- 1) $F^{(n)}(x) \geq \rho(x)$, $n = 0, 1, \dots$;
- 2) $F^{(n)}(x) \uparrow$ по n ;
- 3) $F^{(n)}(x) \in L_1(0, +\infty)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

В силу 1)–3) из (53) будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^\infty F^{n+1}(x) dx &\leq \int_0^\infty \rho(x) dx + \int_0^\infty \int_0^\infty W(x, \tau) F^{(n+1)}(\tau) d\tau dx = \int_0^\infty \rho(x) dx + \int_0^\infty F^{(n+1)}(\tau) \int_0^\infty W(x, \tau) dx d\tau \leq \\ &\leq \int_0^\infty \rho(x) dx + \int_0^\infty F^{(n+1)}(\tau) \left\{ (\beta - b) \int_\tau^\infty e^{-0.5\beta(x^2-\tau^2)} dx + (\mu_1 + \delta_0 - \lambda) \int_\tau^\infty e^{-0.5\beta(t^2-\tau^2)} dt \right\} d\tau = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \rho(x) dx + \int_0^\infty F^{(n+1)}(\tau) \left\{ 1 - b/\beta + (\mu_1 + \delta_0 - \lambda) \int_\tau^\infty e^{-0.5\beta z(z+2\tau)} dz \right\} d\tau \leq \\
&\leq \int_0^\infty \rho(x) dx + \left(1 - b/\beta + (\mu_1 + \delta_0 - \lambda) \int_\tau^\infty e^{-0.5\beta z^2} dz \right) \int_0^\infty F^{(n+1)}(\tau) d\tau = \int_0^\infty \rho(x) dx + r_0 \int_0^\infty F^{(n+1)}(\tau) d\tau,
\end{aligned} \tag{54}$$

где $r_0 = 1 - b/\beta + [(\mu_1 + \delta_0 - \lambda)\sqrt{\pi}]/\sqrt{2b}$. Поскольку $\beta(\lambda) \in (b; 2b^2/[\pi(\mu_1 + \delta_0 - \lambda)^2])$, то

$$r_0 \in (0, 1), \quad \mu_1 - \sqrt{2b/\pi} + \delta_0 < \lambda < \delta_1. \tag{55}$$

Следовательно, с учетом (54), (56) получим следующую оценку сверху:

$$\int_0^\infty F^{(n+1)}(\tau) d\tau \leq (1 - r_0)^{-1} \int_0^\infty \rho(x) dx. \tag{56}$$

Используя теорему Леви, заключаем, что последовательность $\{F^{(n)}(\tau)\}_0^\infty$ п.в. в $(0, +\infty)$ имеет предел $\lim_{n \rightarrow \infty} F^{(n)}(\tau) = F(\tau) \in L_1(0, +\infty)$. Аналогично доказательству теоремы 1 можно убедиться, что предельная функция является решением уравнения (52). Решая уравнение $(\hat{D} + \hat{\Lambda})u = F$, приходим к завершению доказательства. ■

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Случай ПР. Пусть $r(x)$ – ограниченная функция, $\mu = \max(\mu_1(K), \mu_2(K)) < \infty$. Обозначим $\delta = \inf_{x \in [0, +\infty)} q(x)$. Тогда уравнение (3) обладает однопараметрическим семейством решений вида

$$f_\lambda(x, t) = e^{\lambda t} \left(c_0(\lambda) e^{-\alpha(\lambda)x} + \int_0^x e^{-\alpha(\lambda)(x-\xi)} F_\lambda(\xi) d\xi \right), \tag{57}$$

где $\alpha(\lambda) = \sup_x q(x) + \lambda$ – произвольное число, причем если:

- 1) $\lambda > \mu_1 - \delta$, то $F_\lambda(x) \in L_1(0, +\infty)$;
- 2) дополнительно $\rho_W \in L_p(0, +\infty)$ и $\lambda > \mu - \delta$, то $F_\lambda(x) \in L_p(0, +\infty)$, и имеет место оценка (37);
- 3) $\lambda = \mu_2 - \delta$, то $F_\lambda(x) \in L_\infty(0, +\infty)$;
- 4) $\lambda < \mu - \delta$, то можно доказать, что уравнение (3) не имеет неотрицательных решений, однако в настоящей работе этот вопрос не будем обсуждать.

Заметим, что с экономической точки зрения случай $\lambda \leq \mu - \delta$ невозможен, так как при этом $f_\lambda(x, t)$ перестает быть функцией распределения.

Случай НР. Пусть $r(x) = bx - \tilde{q}_0(x) + \lambda$, $b > 0$, $0 \leq \tilde{q}_0(x) - \lambda \in M(0, +\infty)$. Обозначим $\delta_0 = \sup_{x \in (0, +\infty)} \tilde{q}_0(x)$, $\delta_1 = \inf_{x \in (0, +\infty)} \tilde{q}_0(x)$. Тогда уравнение (3) обладает однопараметрическим семейством решений вида

$$f_\lambda(x, t) = e^{\lambda t} \left(c_0(\lambda) e^{-0.5\beta(\lambda)x^2} + \int_0^x e^{-0.5\beta(\lambda)(x^2 - \xi^2)} F_\lambda(\xi) d\xi \right), \tag{58}$$

причем если $\mu_1 - \sqrt{2b/\pi} + \delta_0 < \lambda < \delta_1$, то $F_\lambda(x) \in L_1(0, +\infty)$. Поэтому “экономическое” решение уравнения (3) можно записать в виде $f(x, t) = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} f_\lambda(x, t) d\lambda$, где в случае ПР – $\gamma_1 = \mu_2 - \delta$, $\gamma_2 = \infty$, а в случае НР – $\gamma_1 = \mu_1 + \delta_0 - \sqrt{\frac{2b}{\pi}}$, $\gamma_2 = \delta_1$.

Замечание. В качестве примера рассмотрим простейший модельный случай, имеющий применение в эконометрии. Будем считать, что рост капиталов и сбережения линейно зависят от ω , т.е. $p(\omega) = a\omega$, а “потери” не зависят от уровня богатства, т.е. $\gamma(\omega) = m = \text{const}$. Тогда $q(x) = \delta = a + m$, $\alpha = a + m + \lambda$. Функции распределения, задаваемые согласно (57) и (58), являются обобщениями законов Парето и нормального распределения, соответственно.

Действительно, переходя к старому аргументу с учетом (2): $x = \ln(\omega/\omega_0)/a$, из (57) приходим к обобщению закона частотного распределения Парето (Mandelbrot, 1960, p. 79–106):

$$Y_\lambda(\omega, t) = e^{\lambda t} (c_0(\lambda)(\omega_0/\omega)^{1+a/m} + Q_\lambda(\omega)).$$

Аналогично из (58) приходим к обобщению нормально-логарифмического распределения:

$$Y_\lambda(\omega, t) = e^{\lambda t} (c_0(\lambda) e^{-0.5\beta(\ln\omega - \ln\omega_0)^2} + \psi_\lambda(\omega)).$$

Вопросам применения и численной реализации ряда утверждений настоящей статьи будет посвящена отдельная работа авторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Арабаджян Л.Г., Енгибарян Н.Б.** (1984): Уравнение в свертках и нелинейные функциональные уравнения // *Итоги науки и техники. Серия “Мат. анализ”*. Т. 22.
- Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** (1981): *Элементы теории функций и функционального анализа*. М.: Наука.
- Mandelbrot B.** (1960): The Pareto-Levy Law and Distribution of Income // *International Econ. Rev.* Vol. 1. May.
- Sargan J.D.** (1957): The Distribution of Wealth // *Econometrica*. Vol. 25.

Поступила в редакцию
20.06.2008 г.

On an Integro-differential Equation in the Problem of Wealth Distribution

A.Kh. Khachatryan, Kh.A. Khachatryan

The authors investigate the class of integro-differential equations with variable coefficients, which has important applications in econometrics. Prove the existence of one parametric family of its solutions. The structure of the parametric family is described, as well as exponential and normal distribution laws generalized.