
**МЕТОДЫ
ОПТИМИЗАЦИИ**

**ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ РАВНОВЕСИЯ,
СВЯЗАННОЙ С БЕСКОАЛИЦИОННЫМИ ИГРАМИ***

© 2009 г. Е.Г. Гольштейн

(Москва)

Рассматривается задача равновесия, частным случаем которой является задача отыскания точки Нэша бескоалиционной игры многих лиц. Приводится численный алгоритм решения этой задачи. При определенных требованиях к задаче получена оценка скорости сходимости алгоритма. Отмечена связь между задачей равновесия и определяемым ею вариационным неравенством.

1. Пусть E – евклидово пространство; G – непустой выпуклый компакт, содержащийся в E ; $\Phi(u, w)$, $u \in G$, $w \in G$, – функция с вещественными значениями. Рассмотрим задачу $P(\Phi, G)$ определения точки равновесия $u^* \in G$, такой, что

$$\Phi(u^*, u^*) = \max_{u \in G} \Phi(u, u^*). \quad (1)$$

В дальнейшем будем анализировать задачу $P(\Phi, G)$ при различных допущениях относительно функции Φ . Наиболее слабыми из них являются следующие.

Условие R_1 . Функция Φ непрерывна на $G \times G$ и вогнута по $u \in G$ при любом фиксированном $w \in G$.

Если функция Φ удовлетворяет условию R_1 , то задача $P(\Phi, G)$ разрешима, т.е. множество точек ее равновесия U^* непусто. Это следует из теоремы Какутани о неподвижной точке. Вместе с тем соблюдение одного лишь условия R_1 делает задачу $P(\Phi, G)$ сопоставимой по сложности с задачей поиска неподвижной точки точечно-множественного отображения в условиях теоремы Какутани, решение которой весьма трудоемко. Ниже будет установлено, что задача $P(\Phi, G)$ связана с некоторой антагонистической игрой и поэтому допускает достаточно эффективный численный метод решения, если функция удовлетворяет следующему условию.

Условие R_2 . Функция Φ – липшицева на $G \times G$, вогнута по $u \in G$ при любом фиксированном $w \in G$, выпукла по $w \in G$ при любом фиксированном $u \in G$, и, кроме того, $\Phi(u, u)$, $u \in G$, является вогнутой функцией.

Ниже будут указаны некоторые другие требования к функции Φ , при соблюдении которых задача $P(\Phi, G)$ оказывается менее сложной, чем в общем случае.

2. Анализ задачи $P(\Phi, G)$ при Φ , удовлетворяющей условию R_2 , основан на двух вспомогательных утверждениях.

Лемма 1. Если $f(x)$, $x \in G$ – вогнутая (выпуклая) функция, $\partial f(x)$ – супердифференциал (субдифференциал) f в точке $x \in G$, то при любом $x \in G$ множество $\partial f(x) \neq \emptyset$ и содержит такие элементы l , что $\|l\| \leq L$, где L – постоянная в условии Липшица, которому удовлетворяет функция f .

Доказательство. Ограничимся случаем вогнутой функции f .

1. Пусть $\text{int } G \neq \emptyset$. Если $x \in \text{int } G$, $l \in \partial f(x)$, $x(\varepsilon) = x - \varepsilon l$, где $\varepsilon > 0$ выбрано таким, чтобы $x(\varepsilon) \in G$, то $f(x(\varepsilon)) \leq f(x) + \langle l, x(\varepsilon) - x \rangle = f(x) - \varepsilon \|l\|^2$, откуда, используя условие Липшица для функции f , приходим к неравенству $\|l\| \leq L$. Итак, при $x \in \text{int } G$ норма каждого элемента супердифференциала $\partial f(x)$ не превышает L .

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00156).

Рассмотрим произвольную граничную точку x компакта G . Выберем последовательность $\{x_s\}$ точек $x_s \in \text{int } G$, сходящуюся к x . Пусть $l_s \in \partial f(x_s)$, $\|l_s\| \leq L$, $s = 1, 2, \dots$. Очевидно, что любая предельная точка l ограниченной последовательности $\{l_s\}$ содержится в $\partial f(x)$, причем $\|l\| \leq L$. Тем самым лемма доказана в случае $\text{int } G \neq \emptyset$.

2. Предположим теперь, что $\text{int } G = \emptyset$ и $\bar{E}$ – подпространство евклидова пространства E , некоторый сдвиг которого является линейной оболочкой G . Обозначим $\bar{\partial}f(x)$ проекцию супердифференциала $\partial f(x)$ на $\bar{E}$. Очевидно, что $\bar{\partial}f(x) \subset \partial f(x)$. Пусть $\text{ri } G$ – относительная внутренность множества G . Рассуждения, аналогичные случаю $\text{int } G \neq \emptyset$, позволяют установить, что при $x \in \text{ri } G$ все элементы $\bar{\partial}f(x)$ имеют норму, не превышающую L , а при $x \notin \text{ri } G$, $x \in G$, $\bar{\partial}f(x)$ содержит такие элементы l , что $\|l\| \leq L$.

Лемма 2. Пусть $\Phi(u, w)$, $(u, w) \in G \times G$ – такая липшицева функция с постоянной L , вогнутая по u при любом фиксированном $w \in G$, выпуклая по w при любом фиксированном $u \in G$, что

$$\Phi(u, u) \equiv 0, \quad u \in G. \quad (2)$$

В таком случае при любом $u \in G$

$$\partial_u \Phi(u, u) = -\partial_w \Phi(u, u) \neq \emptyset, \quad (3)$$

где $\partial_u \Phi(u, w)$ – супердифференциал Φ по u в точке (u, w) , а $\partial_w \Phi(u, w)$ – субдифференциал Φ по w в точке (u, w) .

Доказательство. Для каждой точки $u \in G$ введем конус возможных направлений $K(u) = \{s \in E: u + \varepsilon s \in G \exists \varepsilon > 0\}$. Пусть $u \in G$, $l \in \partial_u \Phi(u, u)$ ($\partial_u \Phi(u, u) \neq \emptyset$ в силу леммы 1), $s \in K(u)$. Для достаточно малых положительных ε имеем

$$\Phi(u + \varepsilon s, u) \leq \Phi(u, u) + \varepsilon \langle l, s \rangle, \quad (4)$$

$$\Phi(u + \varepsilon s, u) \geq \Phi(u + \varepsilon s, u + \varepsilon s) - \varepsilon \langle l(\varepsilon, s), s \rangle,$$

где $l(\varepsilon, s)$ – некоторый элемент $\partial_w \Phi(u + \varepsilon s, u + \varepsilon s)$, причем в силу леммы 1 можно считать, что $\|l(\varepsilon, s)\| \leq L$.

Поскольку согласно (2) $\Phi(u, u) = \Phi(u + \varepsilon s, u + \varepsilon s) = 0$, то в силу (4) имеем

$$\langle l + l(\varepsilon, s), s \rangle \geq 0, \quad (5)$$

где $l(\varepsilon, s) \in \partial_w \Phi(u + \varepsilon s, u + \varepsilon s)$, $\|l(\varepsilon, s)\| \leq L$.

Устремляя в (5) $\varepsilon > 0$ к нулю, получаем при любых $u \in G$, $l \in \partial_u \Phi(u, u)$ и $s \in K(u)$

$$\langle l + l(s), s \rangle \geq 0, \quad (6)$$

где $l(s) \in \partial_w \Phi(u, u)$, $\|l(s)\| \leq L$.

Из равномерной ограниченности векторов $l(s)$ и замкнутости $\partial_w \Phi(u, u)$ следует, что (6) имеет место для любых $l \in \partial_u \Phi(u, u)$ и $s \in \text{cl } K(u)$ ($\text{cl } K(u)$ – замыкание конуса $K(u)$).

Итак, для произвольных $l \in \partial_u \Phi(u, u)$ и $s \in \text{cl } K(u)$ справедливо неравенство

$$\langle l + l(s), s \rangle \geq 0, \quad (7)$$

где $l(s)$ – некоторый элемент множества $\partial_w \Phi(u, u)$. Докажем, что из неравенства (7) вытекает включение

$$\partial_u \Phi(u, u) \subset -\partial_w \Phi(u, u). \quad (8)$$

Действительно, если (8) неверно, т.е. существует такой вектор $l^0 \in \partial_u \Phi(u, u)$, что $l^0 \notin -\partial_w \Phi(u, u)$, то в силу выпуклости и замкнутости множества $-\partial_w \Phi(u, u)$ существует вектор s^0 , удовлетворяющий требованиям

$$\langle l^0, s^0 \rangle < 0, \quad \langle l, s^0 \rangle \geq 0 \quad \forall l \in -\partial_w \Phi(u, u). \quad (9)$$

Проверим, что $s^0 \in \text{cl } K(u)$. Если $l' \in -\partial_w \Phi(u, u)$, то очевидно, что $l + l' \in -\partial_w \Phi(u, u)$ при любом $l \in K^*(u)$, где $K^*(u) = \{l \in \mathbf{E}: \langle l, s \rangle \geq 0 \ \forall s \in K(u)\}$ – конус, сопряженный с $K(u)$. Поэтому согласно правому неравенству (9) имеем

$$\langle l, s^0 \rangle \geq 0 \ \forall l \in K^*(u). \quad (10)$$

Соотношения (10) означают, что $s^0 \in (K^*(u))^* = K^{**}(u)$. Но, как известно, $K^{**}(u) = \text{cl } K(u)$. Следовательно,

$$s^0 \in \text{cl } K(u). \quad (11)$$

Из (9) и (11) вытекает, что

$$\langle l^0 + l, s^0 \rangle < 0 \ \forall l \in \partial_w \Phi(u, u), \ s^0 \in \text{cl } K(u). \quad (12)$$

Но (12) входит в противоречие с (7). Следовательно, включение (8) верно. Если повторить рассуждения, использованные для доказательства (8), поменяв местами u и w , то получим противоположное включение: $\partial_w \Phi(u, u) \subset \partial_u \Phi(u, u)$, которое совместно с (8) и эквивалентно (3).

Рассмотрим антагонистическую игру $\Gamma(\Phi, G)$, в которой первый игрок выбирает стратегию $u \in G$, второй игрок – стратегию $w \in G$, а выигрыш первого игрока определяется функцией выигрышей $\Phi(u, w)$, $u, w \in G$. Положим $\Phi_1(u, w) = \Phi(u, w) - \Phi(w, w)$, $u, w \in G$. Очевидно, что $\Phi_1(u, u) = 0$, $u \in G$.

Теорема 1. Пусть функция Φ удовлетворяет требованиям R_2 . В таком случае седловое множество антагонистической игры $\Gamma(\Phi, G)$ имеет вид $U^* \times U^*$, где U^* – множество решений (точек равновесия) задачи $P(\Phi, G)$, а цена v^* игры $\Gamma(\Phi, G)$ равна нулю.

Доказательство. Пусть $u^* \in U^*$. Тогда согласно (1) и определению функции Φ_1 имеем

$$\max_{u \in G} \Phi_1(u, u^*) = \Phi_1(u^*, u^*) = 0. \quad (13)$$

Следовательно, $0 \in \partial_u \Phi_1(u^*, u^*)$. Тогда $0 \in \partial_w \Phi_1(u^*, u^*)$ по лемме 2, откуда вытекает

$$\min_{w \in G} \Phi_1(u^*, w) = \Phi_1(u^*, u^*). \quad (14)$$

Соотношения (13), (14) означают, что $v^* = 0$, а (u^*, u^*) является седловой точкой функции $\Phi_1(u, w)$, $u \in G, w \in G$.

Допустим теперь, что (u^*, w^*) – седловая точка функции $\Phi_1(u, w)$, $u \in G, w \in G$. Поскольку $\Phi_1(u^*, w^*) = v^* = 0$, $\Phi_1(w^*, w^*) = 0$, то

$$\max_{u \in G} \Phi_1(u, w^*) = \Phi_1(u^*, w^*) = \Phi_1(w^*, w^*)$$

и согласно (1) точки $u^*, w^* \in U^*$. Таким образом, $(u^*, w^*) \in U^* \times U^*$.

3. Согласно теореме 1 задача $P(\Phi, G)$ при Φ , удовлетворяющей требованиям R_2 , оказывается эквивалентной антагонистической игре с нулевой ценой игры и симметричным седловым множеством. Поэтому для численного решения задачи $P(\Phi, G)$ можно воспользоваться достаточно эффективным методом отыскания седловых точек выпукло-вогнутых функций, содержащимся в (Гольштейн, Немировский, Нестеров, 1995).

Описание и анализ численного метода решения задачи $P(\Phi, G)$ основан на соответствующих результатах работы (Гольштейн, Немировский, Нестеров, 1995) и отмеченной в теореме 1 специфике игры $\Gamma(\Phi, G)$.

Метод решения задачи $P(\Phi, G)$ является итерационным и зависит от параметра λ , выбираемого из интервала $(0, 1)$. Перед началом итерации q предполагается, что точки $u_i \in G$ и векторы

$l_i \in \partial_u \Phi(u_i, u_i)$, $1 \leq i \leq q$, уже найдены. В качестве u_1 может быть выбрана любая точка множества G . Введем задачу A_q с переменными u , τ , имеющую вид:

$$\tau \rightarrow \max, \langle l_i, u - u_i \rangle \geq \tau, \quad 1 \leq i \leq q, \quad u \in G. \quad (15)$$

Предположим, что выпуклый компакт G является многогранником. В этом случае A_q – задача линейного программирования. Пусть Δ_q – максимальное значение переменной τ задачи A_q ; $\tilde{A}_q$ – задача, двойственная A_q ; μ_i – оптимальное значение переменной задачи $\tilde{A}_q$, отвечающей ограничению $\langle l_i, u - u_i \rangle \geq \tau$ задачи A_q , $1 \leq i \leq q$. Из вида задачи A_q вытекает справедливость следующих двух соотношений:

$$\max_{u \in G} \sum_{i=1}^q \mu_i \langle l_i, u - u_i \rangle = \Delta_q, \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^q \mu_i = 1, \quad \mu_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq q. \quad (17)$$

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Итерация q начинается с решения двойственной пары задач линейного программирования A_q , $\tilde{A}_q$, в результате чего вычисляются Δ_q и μ_i , $1 \leq i \leq q$. Если $\Delta_q \leq \varepsilon$, то в качестве приближенного решения задачи $P(\Phi, G)$ принимается точка $u_q^* = \sum_{i=1}^q \mu_i u_i$, которая в силу (17) содержится в G . В этом случае итерация q является последней. Если же $\Delta_q > \varepsilon$, то множество точек $\{u_1, \dots, u_q\}$ пополняется новой точкой u_{q+1} . Эта точка находится из решения задачи квадратичного программирования

$$\|u - u_q\|^2 \rightarrow \min, \quad u \in M_q(\lambda \Delta_q), \quad (18)$$

где $M_q(\tau)$ – многогранник, определяемый условиями задачи (15) при фиксированном значении $\tau \leq \Delta_q$, а $\lambda \in (0, 1)$ – параметр метода. Таким образом, точка u_{q+1} – проекция точки u_q на многогранник $M_q(\lambda \Delta_q)$. На этом итерация q заканчивается.

Прежде чем приступить к обоснованию данного метода, уточним понятие приближенного решения задачи $P(\Phi, G)$. Под ε -решением задачи $P(\Phi, G)$ при любом фиксированном $\varepsilon \geq 0$ условимся понимать такую точку $u_\varepsilon \in G$, для которой верно неравенство

$$\max_{u \in G} \Phi(u, u_\varepsilon) - \Phi(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \leq \varepsilon. \quad (19)$$

Из (1) и (19) следует, что ε -решение задачи $P(\Phi, G)$ при $\varepsilon = 0$ совпадает с решением этой задачи. Обоснование метода основано на двух вспомогательных леммах.

Лемма 3. Если функция Φ удовлетворяет условию R_2 , то точка $u_q^* = \sum_{i=1}^q \mu_i u_i \in G$ является Δ_q -решением задачи $P(\Phi, G)$.

Доказательство. Положим $\Phi_1(u, w) = \Phi(u, w) - \Phi(w, w)$. Учитывая свойства функции Φ , имеем

$$\begin{aligned} \max_{u \in G} \Phi(u, u_q^*) - \Phi(u_q^*, u_q^*) &= \max_{u \in G} \Phi_1(u, u_q^*) \leq \\ &\leq \max_{u \in G} \sum_{i=1}^q \mu_i \Phi_1(u, u_i) \leq \max_{u \in G} \sum_{i=1}^q \mu_i \langle l_i, u - u_i \rangle = \Delta_q. \end{aligned} \quad (20)$$

Первое неравенство (20) вытекает из выпуклости $\Phi_1(u, w)$ по w , второе – следствие того, что $l_i \in \partial_u \Phi_1(u_i, u_i) = \partial_u \Phi(u_i, u_i)$, функция $\Phi_1(u, w)$ вогнута по u , причем $\Phi_1(u, u) = 0$, последнее

равенство совпадает с (16). Утверждение леммы 3 следует из (20) и определения ε -решения задачи $P(\Phi, G)$.

Лемма 4. Если $\Phi(u, w)$ является вогнутой липшицевой с постоянной L функцией относительно $u \in G$ при любом фиксированном $w \in G$, а выпуклый компакт G – многогранник, то члены последовательности $\{\Delta_q\}$, образующейся в результате решения задач линейного программирования A_q , допускают оценку

$$\Delta_q \leq \frac{dL}{\lambda(1-\lambda^2)^{1/2}} q^{-1/2}, \quad q=1,2,\dots, \quad (21)$$

где d – диаметр G ; $\lambda \in (0, 1)$ – параметр метода, от которого зависит задача квадратичного программирования (18).

Доказательство. Согласно лемме 1 можно считать, что нормы векторов $l_i \in \partial_u \Phi(u_i, u_i)$, определяющих задачу (15), не превышают L . Поэтому неравенства (21) вытекают из (Бэр, Гольштейн, Соколов, 2000, лемма 4) при $Q = G$, $b_i = -l_i$, $\beta_{ik} = \beta_i = \langle l_i, u_i \rangle$, $\bar{b} = L$.

Очевидным следствием лемм 3, 4 является следующее утверждение о сходимости метода (15), (18) решения задачи $P(\Phi, G)$.

Теорема 2. Пусть функция Φ удовлетворяет условиям R_2 , а выпуклый компакт G является многогранником. В таком случае приведенный выше численный метод решения задачи $P(\Phi, G)$ позволяет при произвольном $\varepsilon > 0$ найти ε -решение задачи $P(\Phi, G)$ за $q(\varepsilon)$ итераций, причем

$$q(\varepsilon) \leq \lceil \lambda^{-2}(1-\lambda^2)^{-1}(dL\varepsilon^{-1}) \rceil, \quad (22)$$

где $\lambda \in (0, 1)$ – параметр метода; d – диаметр многогранника G ; L – постоянная в условии Липшица, которому удовлетворяет функция Φ ; под $\lceil a \rceil$ при любом вещественном a понимается наименьшее целое число, большее либо равное a .

4. Пусть T – точечно-множественное отображение точек u в непустые множества $T(u) \subset E$. Вариационное неравенство, определяемое отображением T , имеет вид:

$$u \in G, \quad t \in T(u), \quad \langle t, u' - u \rangle \geq 0 \quad \forall u' \in G. \quad (23)$$

Под решением вариационного неравенства (23) понимается такая точка $u^* \in G$, что при некотором $t^* \in T(u^*)$ неравенство $\langle t^*, u' - u^* \rangle \geq 0$ выполняется для всех $u' \in G$.

При анализе вариационного неравенства (23) используются следующие два допущения относительно отображения T .

А. Множества G и $T(u)$ при любом $u \in G$ являются выпуклыми компактами, а множества $T(u)$, $u \in G$, равномерно ограничены, если $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i = u_0$, $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = t_0$, где $u_i \in G$, $t_i \in T(u_i)$, то $t_0 \in T(u_0)$.

Б. Отображение T является монотонным, т.е. при любых $u', u'' \in G$, $t' \in T(u')$, $t'' \in T(u'')$ имеет место неравенство

$$\langle t' - t'', u' - u'' \rangle \geq 0. \quad (24)$$

В (Гольштейн, 2002) описан численный метод решения вариационного неравенства (23), являющийся обобщением метода уровней (Гольштейн, Немировский, Нестеров, 1995), и показано, что если отображение T , определяющее (23), удовлетворяет условиям А и Б, то метод порождает последовательность, сходящуюся к множеству решений вариационного неравенства (23).

Условие R_3 . Функция $\Phi(u, w)$, $u \in G$, $w \in G$, удовлетворяет условию R_1 и является липшицевой функцией относительно $u \in G$ при любом фиксированном $w \in G$, с постоянной Липшица L , не зависящей от w .

Очевидно, что R_3 занимает промежуточное положение между менее жесткими требованиями R_1 и более жесткими условиями R_2 .

Пусть функция $\Phi(u, w)$, $u \in G$, $w \in G$, удовлетворяет требованиям R_3 . Введем точечно-множественное отображение $T^{(\Phi)}$, определяемое соотношением

$$T^{(\Phi)}(u) = -\partial_u \Phi(u, u), \quad u \in G. \quad (25)$$

Нетрудно проверить, что решение задачи $P(\Phi, G)$ эквивалентно решению вариационного неравенства (23) при $T = T^{(\Phi)}$. При решении задачи (23) для $T = T^{(\Phi)}$ упомянутым выше методом используются некоторые элементы l_q множеств $T^{(\Phi)}(u_q)$, $q = 1, 2, \dots$. Из условия R_3 , которому удовлетворяет функция Φ , и леммы 1 вытекает, что последовательность $\{\|l_q\|\}$ можно считать ограниченной (например, числом L , фигурирующим в R_3). Отсюда следует, что отображение $T^{(\Phi)}$ удовлетворяет условию А. Поэтому возможность применения численного метода решения вариационных неравенств, описанного в (Гольштейн, 2002), к задаче $P(\Phi, G)$ зависит от монотонности отображения $T^{(\Phi)}$. В связи со сказанным представляет интерес приводимое ниже утверждение.

Лемма 5. Если функция Φ удовлетворяет условию R_2 , то для произвольных $u' \in G, l' \in \partial_u \Phi(u', u')$ и $u'' \in G, l'' \in \partial_u \Phi(u'', u'')$ имеет место неравенство

$$\langle l' - l'', u' - u'' \rangle \leq 0, \quad (26)$$

т.е. отображение $T^{(\Phi)}$ является монотонным.

Доказательство. Положим $\Phi_1(u, w) = \Phi(u, w) - \Phi(w, w)$, $u \in G, w \in G$. Очевидно, что $\partial_u \Phi_1(u, w) = \partial_u \Phi(u, w)$, $\Phi_1(u, u) = 0 \quad \forall u \in G$. Следовательно, $l' \in \partial_u \Phi_1(u', u')$, $l'' \in \partial_u \Phi_1(u'', u'')$ и функция $\Phi_1(u, w)$ удовлетворяет условиям леммы 2. Согласно лемме 2

$$-l' \in \partial_w \Phi_1(u', u'), \quad -l'' \in \partial_w \Phi_1(u'', u''). \quad (27)$$

Учитывая (27), имеем

$$\langle l' - l'', u' - u'' \rangle = 0.5[\langle l' - l'', u' - u'' \rangle - \langle m' - m'', u' - u'' \rangle], \quad (28)$$

где $m' = -l' \in \partial_w \Phi_1(u', u')$, $m'' = -l'' \in \partial_w \Phi_1(u'', u'')$. Неравенство (26) – следствие (28) и того, что $\Phi_1(u, w)$, $u \in G, w \in G$, является вогнуто-выпуклой функцией относительно переменных u, w , соответственно.

Отметим, что лемма 5 при более ограничительных требованиях к функции Φ доказана в (Urjas'ev, 1987) (см. также (Гольштейн, Третьяков, 1989, с. 240)). Таким образом, требование R_2 является достаточным условием для того, чтобы описанный в (Гольштейн, 2002) численный метод решения вариационного неравенства (23) при $T = T^{(\Phi)}$ порождал последовательность, сходящуюся к множеству решений задачи $P(\Phi, G)$.

Отметим еще один класс функций Φ , обеспечивающих монотонность отображения $T^{(\Phi)}$.

Функцию $\Phi(u, w)$, $u \in G, w \in G$, назовем *кососимметричной*, если для любых $u, w \in G$ имеет место неравенство

$$\Phi(u, u) + \Phi(w, w) - \Phi(u, w) - \Phi(w, u) \leq 0. \quad (29)$$

Условие кососимметричности (29) было введено в (Антипин, 1997), где при его соблюдении установлена возможность решения гладких задач $P(\Phi, G)$ при помощи методов градиентного типа.

Лемма 6. Если функция Φ удовлетворяет условию R_3 и является кососимметричной, то для любых $u', u'' \in G, l' \in \partial_u \Phi(u', u'), l'' \in \partial_u \Phi(u'', u'')$ справедливо неравенство (26), т.е. отображение $T^{(\Phi)}$ монотонно.

Доказательство. Из R_3 следует, что $\partial_u \Phi(u, u) \neq \emptyset$ при любом $u \in G$ и имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \Phi(u'', u') &\leq \Phi(u', u') + \langle l', u'' - u' \rangle, \\ \Phi(u', u'') &\leq \Phi(u'', u'') + \langle l'', u' - u'' \rangle. \end{aligned} \quad (30)$$

Складывая неравенства (30) и учитывая (29), имеем

$$\langle l' - l'', u' - u'' \rangle \leq \Phi(u', u') + \Phi(u'', u'') - \Phi(u'', u') - \Phi(u', u'') \leq 0.$$

5. В заключение остановимся на связи между задачей $P(\Phi, G)$ и задачей отыскания точек Нэша бескоалиционной игры многих лиц.

Пусть X_i – подмножество евклидова пространства E_i , $1 \leq i \leq k$; f_i – функция, принимающая конечные вещественные значения на множестве $X = X_1 \times \dots \times X_k$, $k \geq 2$. Введем бескоалиционную игру Γ с числом игроков k , задаваемую для каждого игрока i множеством его стратегий X_i и функцией выигрышей f_i , $1 \leq i \leq k$. Обозначим через X^* множество точек Нэша игры Γ , т.е. множество точек $x^* = (x_1^*, \dots, x_k^*)$, таких, что

$$\max_{x_i \in X_i} f_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_k^*) = f_i(x^*). \quad (31)$$

В дальнейшем будем использовать только такие игры Γ , в которых множество стратегий каждого игрока является непустым выпуклым компактом.

Любой бескоалиционной игре Γ сопоставим функцию $\Phi_\Gamma(u, w)$, $u \in G$, $w \in G$, определяемую соотношениями

$$\Phi_\Gamma(u, w) = \sum_{i=1}^k f_i(w_1, \dots, w_{i-1}, u_i, w_{i+1}, \dots, w_k), \quad (32)$$

$$G = X_1 \times \dots \times X_k, u = (u_1, \dots, u_k) \in G, w = (w_1, \dots, w_k) \in G,$$

где X_i – множество стратегий игрока i игры Γ , а f_i – функция выигрышей этого игрока, $1 \leq i \leq k$.

Из определений задачи $P(\Phi, G)$ и точек Нэша игры Γ следует, что задача отыскания точек Нэша игры Γ сводится к задаче $P(\Phi, G)$ при $\Phi = \Phi_\Gamma$, $G = X$. Перечислим требования $\bar{R}_\alpha$, $1 \leq \alpha \leq 3$, к функциям выигрышей игроков игры Γ , которые приводят к соблюдению условий R_α к функции $\Phi = \Phi_\Gamma$.

Условие $\bar{R}_1$. Для каждого игрока i , $1 \leq i \leq k$, функция $f_i(x)$ непрерывна на X и вогнута относительно $x_i \in X_i$ при любых фиксированных стратегиях остальных игроков.

Условие $\bar{R}_2$. Для каждого игрока i , $1 \leq i \leq k$, функция $f_i(x)$ является липшицевой на X , вогнутой относительно $x_i \in X_i$ при любых фиксированных стратегиях остальных игроков, выпуклой относительно $\hat{x}_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k) \in X_1 \times \dots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \dots \times X_k$ при любой фиксированной

стратегии $x_i \in X_i$ игрока i , причем функция $f(x) = \sum_{i=1}^k f_i(x)$ суммарных выигрышей всех игроков вогнута на X .

Условие $\bar{R}_3$. Если соблюдается условие $\bar{R}_1$ и для каждого игрока i , $1 \leq i \leq k$, функция $f_i(x)$ является липшицевой относительно $x_i \in X_i$ при любых фиксированных стратегиях остальных игроков, причем постоянная Липшица $\bar{L}$ не зависит от этих стратегий.

Требование $\bar{R}_1$ выделяет класс бескоалиционных игр, для которых верно утверждение теоремы Нэша о непустоте множества X^* . Если для игры Γ соблюдается условие $\bar{R}_2$, то с учетом того, что функция Φ_Γ удовлетворяет условию R_2 , из теоремы 1 получаем: игра Γ может быть сведена к антагонистической игре с нулевой ценой и симметричным седловым множеством. Для отыскания точек Нэша игры Γ в этом случае можно использовать численную процедуру типа (15), (18).

Предположим, что игра Γ удовлетворяет требованию $\bar{R}_3$. Свяжем с Γ точно-множественное отображение T_Γ , определяемое соотношением

$$T_\Gamma(x) = \{l = (l_1, \dots, l_k): -l_i \in \partial_{x_i} f_i(x), 1 \leq i \leq k\}, x \in X. \quad (33)$$

Задача отыскания точек Нэша игры Γ эквивалентна задаче решения вариационного неравенства

$$x \in X, l \in T_\Gamma(x), \langle l, x' - x \rangle \geq 0 \quad \forall x' \in X. \quad (34)$$

Согласно условию $\bar{R}_3$ и лемме 1 при любом $x \in X$ множество $T_\Gamma(x) \neq \emptyset$ и содержит такие элементы $l = (l_1, \dots, l_k)$, что $\max_{1 \leq i \leq k} \|l_i\| \leq \bar{L}$. Отсюда следует, что для отыскания точек Нэша игры Γ ,

удовлетворяющей условию $\bar{R}_3$ и связанной с монотонным отображением T_Γ , можно использовать численный метод, описанный в (Гольштейн, 2002).

Заметим, что $T_\Gamma = T^{(\Phi)}$ при $\Phi = \Phi_\Gamma$, где отображение $T^{(\Phi)}$ определяется соотношением (25), а функция Φ_Γ – соотношением (32). Поскольку функция Φ_Γ удовлетворяет требованию R_2 , если для игры Γ выполняется условие $\bar{R}_2$, то из леммы 5 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. *Если функции выигрышей игры Γ удовлетворяют условиям $\bar{R}_2$, то связанное с игрой Γ отображение T_Γ является монотонным.*

Утверждение теоремы 3 при более жестких требованиях к функциям выигрышей f_i игры Γ было доказано в (Гольштейн, 2008).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Антипин А.С. (1997): Вычисление неподвижных точек экстремальных отображений при помощи методов градиентного типа // *Журнал выч. мат. и мат. физики*. Т. 37. № 1.
- Бэр К., Гольштейн Е.Г., Соколов Н.А. (2000): Об использовании метода уровней для минимизации выпуклых функций, не все значения которых конечны // *Экономика и мат. методы*. Т. 36. № 4.
- Гольштейн Е.Г. (2002): Метод решения вариационных неравенств, определяемых монотонными отображениями // *Журнал выч. мат. и мат. физики*. Т. 42. № 7.
- Гольштейн Е.Г. (2008): Метод решения вариационных неравенств, использующий неточные исходные данные // *Экономика и мат. методы*. Т. 44. № 3.
- Гольштейн Е.Г., Немировский А.С., Нестеров Ю.Е. (1995): Метод уровней, его обобщения и приложения // *Экономика и мат. методы*. Т. 31. Вып. 3.
- Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В. (1989): Модифицированные функции Лагранжа. М.: Наука.
- Urjas'ev S.P. (1987): On Anti-Monotonicity of Differential Mappings Connected with General Equilibrium Problem. Working Paper (WP-87-6). Laxenburg, Austria, IISA.

Поступила в редакцию
12.02.2009 г.

On an Equilibrium Problem Related to Non-Cooperative Games

Ye.G. Golshtein

An equilibrium problem comprising, as its particular case, the problem of finding the Nash points in the non-cooperative multi-player game, is considered. An algorithm for numerical solution of this problem is also presented. Under certain requirements to the problem, the algorithm's convergence rate is estimated. Finally, a link between the equilibrium problem and a related variational inequality is established.