

ЗАМЕТКИ И ПИСЬМА

О ПОКАЗАТЕЛЯХ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ*

© 2008 г. Е. М. Бронштейн
(Уфа)

Под инвестиционным проектом понимается вектор $C = (c_0, \dots, c_n)$ произвольной конечной размерности, у которого первая ненулевая компонента отрицательная, $c_n > 0$, $\sum c_i \geq 0$. Без потери общности в большинстве случаев будем считать, что $c_0 < 0$, полагая, что рассматриваемые характеристики проектов инвариантны относительно сдвига проекта во времени. Отрицательные компоненты означают вложения средств в проект инвестором в соответствующие моменты времени (года), положительные — поступления средств инвестору (теория инвестиционных проектов описана в (Виленский, Лившиц, Смоляк, 2002)).

Для сравнительного анализа инвестиционных проектов применяется ряд характеристик, зависящих от некоторого экзогенного показателя (нормы дисконта, банковского процента и др.), который отражает эффективность альтернативного вложения средств. Этот показатель заранее неизвестен, и его стохастическая природа часто игнорируется (Виленский, Лившиц, Смоляк, 2002, гл. 1–5; Бронштейн, Черняк, 2005, с. 21–28). При анализе используется также эндогенная характеристика — внутренняя норма доходности (IRR).

Пусть x — годичный коэффициент накопления. Функция доходности равна дисконтированной стоимости проекта $NPV(C, x) = \sum_{i=0}^n c_i x^{-i}$. Здесь за $IRR(C)$ принимается единственный, не меньший 1, корень уравнения доходности

$$\sum_{i=0}^n c_i x^{-i} = 0. \quad (1)$$

Из определения инвестиционного проекта следует, что уравнение (1) имеет хотя бы один корень на множестве $[1, \infty)$, поскольку $NPV(1) = \sum c_i \geq 0$, а $\lim_{x \rightarrow \infty} NPV(x) = c_0 < 0$. Если корней более одного, то значение IRR не определено. Для стандартных инвестиционных проектов, т.е. таких, что для некоторого k $c_i \leq 0$ при $i \leq k$ и $c_i \geq 0$ при $i > k$, внутренняя норма доходности существует. Если для проекта C значение IRR определено, то $NPV(C, x) > 0$ при $x \in (1, IRR)$. То есть, чем больше IRR , тем больше шансов, что проект будет прибыльным в условиях полной неопределенности будущей банковской процентной ставки.

Предпринимались многочисленные попытки ввести аналог IRR для более широкого класса инвестиционных проектов (см. (Виленский, Смоляк, 1999, с. 73–98)), в том числе с привлечением некоторых экзогенных факторов (Беленький, 2005, с. 3–19).

В работе (Arrow, Levhari, 1969, с. 560–566) определена некоторая функция от инвестиционного проекта, имеющая единственный корень. К. Эрроу и Д. Левхари рассмотрели непрерывный поток платежей, заданный интенсивностью поступления средств, и показали, что аналогичная конструкция применима и в дискретном случае средств. Приведем построение и доказательство соответствующего утверждения для дискретного случая.

Пусть P_k , $k = 1, \dots, n$, — функции доходности усеченных инвестиционных проектов, т.е.

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^{-i}, \quad \psi(x) = \max_k P_k(x).$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 04-06-800009).

Следующее утверждение является дискретным аналогом основного результата работы (Aggou, Levhari, 1969).

Предложение 1. Функция $\psi(x)$ является невозрастающей на множестве $[1, \infty)$.

Доказательство. Достаточно проверить, что на указанном множестве правая производная $\psi'^+(x) \leq 0$. Поскольку $\psi(x)$ — максимум функций $P_k(x)$, то для этого достаточно доказать следующее утверждение: если при некотором $x \in [1, \infty)$ справедливо равенство $\psi(x) = P_k(x)$ (т.е. в точке x максимум значений $P_i(x)$ достигается при $i = k$; таких значений k может быть несколько), то $P'_k(x) \leq 0$.

Очевидно, что если $c_k \neq 0$, то $c_k > 0$. Если $c_{k-s} \neq 0$ и $c_{k-s} + 1 = \dots = c_{k-1} = c_k = 0$ ($s > 0$), то $c_{k-s} > 0$. Действительно, в противном случае $P_k(x) < P_{k-s-1}(x)$, а это противоречит выбору индекса k . Аналогично, если $c_{k+s} \neq 0$, $c_{k+1} = \dots = c_{k+s-1} = 0$, то $c_{k+s} < 0$.

Таким образом, максимум $P_k(x)$ может достигаться только при таких k , для которых последний предшествующий ненулевой платеж (к ним относятся и платеж k) положительный, а первый последующий — отрицательный. Представим множество натуральных чисел $\{0, \dots, k\}$ в виде объединения

$$\{0, 1, \dots, t_0 - 1\} \cup \{t_0, \dots, s_1 - 1\} \cup \{s_1, \dots, t_1 - 1\} \cup \dots \cup \{t_{r-1}, \dots, s_r - 1 = k\},$$

где значения c_i в моменты $s_j, \dots, t_j - 1$ неположительные, а в моменты $t_j, \dots, s_{j+1} - 1$ — неотрицательные.

Поскольку $P_k(x) = \max\{P_1(x), \dots, P_n(x)\}$, то справедливо неравенство

$$P_k(x) - P_t(x) = \sum_{i=t+1}^k c_i x^{-i} \geq 0, \quad t < k. \quad (2)$$

Рассмотрим производную

$$P'_k(x) = -\sum_{i=1}^k i c_i x^{-i-1} = -\frac{1}{x} \left(\sum_{i=1}^{s_1-1} i c_i x^{-i} + \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{i=s_j}^{s_{j+1}-1} i c_i x^{-i} \right) \quad (3)$$

и оценим каждое из слагаемых

$$\sum_{i=s_j}^{s_{j+1}-1} i c_i x^{-i} = \sum_{i=s_j}^{t_j-1} i c_i x^{-i} + \sum_{i=t_j}^{s_{j+1}-1} i c_i x^{-i}$$

при $j = 1, \dots, r-1$. Поскольку в сумме $\sum_{i=s_j}^{t_j-1} i c_i x^{-i}$ все $c_i \leq 0$ и $i \leq t_j - 1$, то

$$\sum_{i=s_j}^{t_j-1} i c_i x^{-i} \geq (t_j - 1) \sum_{i=s_j}^{t_j-1} c_i x^{-i}, \quad (4)$$

а для $\sum_{i=t_j}^{s_{j+1}-1} i c_i x^{-i}$ справедливы противоположные неравенства, то

$$\sum_{i=t_j}^{s_{j+1}-1} i c_i x^{-i} \geq (t_j - 1) \sum_{i=t_j}^{s_{j+1}-1} c_i x^{-i}; \quad (5)$$

для слагаемых в сумме $\sum_{i=t_j}^{s_{j+1}-1} i c_i x^{-i}$ справедливы противоположные неравенства, откуда

$$\sum_{i=s_j}^{s_{j+1}-1} i c_i x^{-i} \geq (t_j - 1) \sum_{i=s_j}^{s_{j+1}-1} c_i x^{-i}. \quad (6)$$

Для $\sum_{j=r-2}^{r-1} \sum_{i=s_j}^{s_{j+1}-1} i c_i x^{-i}$, с учетом неравенств (2), (6) и $t_{r-2} < t_{r-1}$, справедлива оценка

$$\sum_{j=r-2}^{r-1} \sum_{i=s_j}^{s_{j+1}-1} i c_i x^{-i} \leq (t_{r-1} - 1) \sum_{i=s_{r-1}}^k c_i x^{-i} + (t_{r-2} - 1) \sum_{i=s_{r-2}}^{s_{r-1}-1} c_i x^{-i} \geq (t_{r-2} - 1) \sum_{i=s_{r-2}}^k c_i x^{-i} \geq 0.$$

Продолжая по индукции, получим:

$$\sum_{j=1}^{r-1} \sum_{i=s_j}^{s_{j+1}-1} i c_i x^{-i} \geq (t_1 - 1) \sum_{i=s_1}^k c_i x^{-i} \geq 0. \quad (7)$$

Оценим $\sum_{i=1}^{s_1-1} i c_i x^{-i}$. Если $t_0 = 1$, то все слагаемые этой суммы неотрицательные. С учетом (7) имеем

$$\sum_{i=1}^{s_1-1} i c_i x^{-i} + \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{i=s_j}^{s_{j+1}-1} i c_i x^{-i} \geq 0. \quad (8)$$

Если $t_0 > 1$, то к множеству $\{1, \dots, t_0 - 1\} \cup \{t_0, \dots, s_1 - 1\}$ можно применить неравенство (6):

$$\sum_{i=1}^{s_1-1} i c_i x^{-i} \geq (t_0 - 1) \sum_{i=1}^{s_1-1} c_i x^{-i}. \quad (9)$$

В этом случае из (7), (9) и $t_1 > t_0$ следует, что

$$\sum_{i=1}^{s_1-1} i c_i x^{-i} + \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{i=s_j}^{s_{j+1}-1} i c_i x^{-i} \geq (t_0 - 1) \sum_{i=1}^{s_1-1} c_i x^{-i} + (t_1 - 1) \sum_{i=s_1}^k c_i x^{-i} \geq (t_0 - 1) \sum_{i=1}^k c_i x^{-i} \geq 0.$$

Таким образом, в любом случае справедливо неравенство (8), т.е. из (3) следует, что $P'_k(x) \leq 0$. ■

Предложение 2. Уравнение $\psi(x) = 0$ имеет единственный корень на множестве $[1, \infty)$.

Доказательство. По предложению 1 функция $\psi(x)$ невозрастающая и

$$\psi(1) \geq NPV(1) = \sum c_i \geq 0;$$

с другой стороны, при достаточно больших x все функции $P_k(x)$ отрицательные (это следует из неравенства $c_0 < 0$). Таким образом, непрерывная функция $\psi(x)$ равна нулю на некотором отрезке $[\alpha, \beta]$. Поскольку она кусочно-полиномиальная относительно $1/x$, то при $\beta > \alpha$ функция $\psi(x)$ совпадает на $[\alpha, \beta]$ с $P_k(x) = \text{const}$. Но если $P_k(x) = \text{const}$ при некотором k , то $P_k(x) = c_0 < 0$. Следовательно, $\alpha = \beta$. ■

Обозначим единственный корень уравнения $\psi(x) = 0$ на множестве $[1, \infty)$ через $\chi(C)$. К. Эрроу и Д. Левхари не придают этой характеристике содержательного смысла. Естественнее считать, что $\chi(C)$ в определенном смысле характеризует доходность проекта. Заметим, что эту характеристику можно определить иначе.

Предложение 3. Значение $\chi(C)$ совпадает с максимальным корнем совокупности многочленов (относительно $1/x$) $P_k(x) = \sum_{i=0}^k c_i x^{-i}$, $k = 1, \dots, n$.

Доказательство. По определению при $x = \chi(C)$ хотя бы одна из перечисленных функций обращается в 0, причем все функции $P_k(x)$ при таком x неположительные. Утверждение следует из того, что при значениях x , больших максимального корня перечисленных функций, все эти функции отрицательные. ■

В работе (Бронштейн, Скотников, 2005, с. 7–17) выделен класс инвестиционных проектов (правильных проектов), на которых определен показатель эффективности, названный предельной доходностью. Идея этого подхода возникла при анализе работы (Promislov, 1997, с. 739–759). Исходным понятием является транзакция, т.е. годичный займ $(0, \dots, 0, -a, b, 0, \dots)$, где $b \leq a > 0$. Под доходностью транзакции понимается отношение b/a .

Инвестиционный проект называется правильным, если он представим в виде суммы последовательных транзакций. Критерием правильности проекта является выполнение условий: $c_0 < 0$, $\sum_{i=k}^n c_i \geq 0$ при $k = 0, \dots, n$. Правильный проект может представляться в виде суммы транзакций различными способами. Например,

$$(-1, 2, 6, 0, \dots) = (-1, 3, 0, \dots) + (0, -1, 6, 0, \dots) = (-1, 4, 0, \dots) + (0, -2, 6, 0, \dots).$$

Доходность суммы транзакций определяется как максимальная из доходностей слагаемых. Предельная доходность $LP(C)$ правильного проекта равна минимальной доходности сумм транзакций, представляющих проект C . Существование минимума доказано в (Бронштейн, Скотников, 2005). Из этого определения следует, что $LP(C)$ это минимальное значение величин $x \geq 1$, при которых совместна система линейных неравенств относительно $(a_0, \dots, a_{n-1})$:

$$\begin{aligned} c_0 &= -a_0, \\ 0 \leq a_{i-1} &\leq c_i + a_i \leq x a_{i-1}, \quad 0 \leq i \leq n, \\ 0 \leq a_{n-1} &\leq c_n \leq x a_{n-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Предложение 4. *Предельная доходность правильной финансовой операции совпадает с максимальным из корней совокупности многочленов $Q_k(x) = \sum_{i=0}^j c_i x^{k-i}$, $k = 1, \dots, n$.*

Доказательство. Поскольку у всех многочленов старший коэффициент c_0 отрицательный, то $Q_k(x)$ при значениях x , превышающих максимальный из корней многочленов, принимают отрицательные значения. Пусть при некотором x система (10) совместна. Умножая первое равенство на x и складывая с неравенством при $i = 1$, получим $c_0 x + c_1 + a_1 \leq 0$, т.е. $Q_1(x) = c_0 x + c_1 \leq -a_1 \leq 0$. Умножим это неравенство на x и сложим его со следующим неравенством системы (10), в результате имеем $Q_2(x) \leq -a_2 \leq 0$. Продолжая этот процесс, придем к неравенствам $Q_k(x) \leq -a_k \leq 0$ при $k \leq n-1$. Наконец, умножая последнее из этих неравенств на x и складывая с последним неравенством системы (10), получаем: $Q_n(x) \leq 0$. Тем самым $LP(C)$ не меньше максимального из корней многочленов $Q_k(x)$.

Пусть теперь $Q_k(x) \leq 0$ при некотором x для всех k . Положив $a_k = -Q_k(x)$ при $k = 1, \dots, n-1$, убеждаемся в справедливости неравенств системы (10), т.е. предельная доходность не превосходит x . Поскольку x — произвольное число, большее максимального из корней совокупности многочленов, то $LP(C)$ не больше максимального из корней многочленов $Q_k(x)$. ■

Очевидно, что $Q_k(x) = x^k P_k(x)$ при всех k , т.е. корни $Q_k(x)$ и $P_k(x)$ на множестве $[1, \infty)$ совпадают. Таким образом, из предложений 3 и 4 вытекает следующее предложение.

Предложение 5. *Для правильного инвестиционного проекта справедливо равенство $\chi(C) = LP(C)$.*

Тем самым характеристика, формально введенная К. Эрроу и Д. Левхари, приобретает содержательную интерпретацию. Первоначальное определение значения $\chi(C)$ можно интерпретировать как перенос понятия “предельная доходность” на непрерывные инвестиционные проекты.

В работе (Бронштейн, Скотников, 2005, с. 7–17) установлены некоторые свойства предельной доходности. Новое представление этой характеристики (предложение 4) позволяет упростить первоначальные доказательства, причем в ряде случаев сформулировать результаты для более общей ситуации — для $\chi(C)$. Поскольку в этом пункте рассматриваются многочлены $Q_k(x)$ для различных проектов, будем использовать обозначение $Q_{k,C}(x)$.

1. Следуя Д. Промислову и Д. Спрингу (Promislov, Spring, 1996, с. 325–361), наделим множество инвестиционных проектов конечно-открытой топологией, т.е. будем считать, что последовательность проектов $C_m = (c_{m0}, \dots, c_{mn_m})$ сходится к проекту $C_0 = (c_{00}, \dots, c_{0n_0})$, если множество длительностей проектов $\{n_0, \dots, n_m, \dots\}$ ограничено некоторым числом N и $c_{mn} \rightarrow c_{0n}$ при $n \leq N$ (если размерность какого-нибудь проекта меньше N , считаем недостающие платежи нулевыми).

Эта топология является естественной для рассматриваемой задачи. В работе (Бронштейн, Скотников, 2005, с. 7–17) доказана полунепрерывность предельной доходности снизу для правильных проектов, т.е. неравенство $LP(C_0) \leq \liminf LP(C_n)$. Содержательно это означает, что предельная доходность при малом изменении проекта может резко возрасти, но не может резко уменьшиться. Ограничимся здесь примером, который показывает, что непрерывность утверждать нельзя: если $C_m = (-1/m, 2/m, -1, 1)$, то $C_m \rightarrow C_0 = (0, 0, -1, 1)$; при этом $LP(C_0) = 1$, $LP(C_m) = 2$.

2. Предельная доходность является монотонной: если платежи проекта C не меньше, чем D , то $\chi(C) \geq \chi(D)$. Действительно, поскольку справедливо неравенство $Q_{k,C}(x) \geq Q_{k,D}(x)$ при всех k на множестве $[1, \infty)$ и эти многочлены отрицательные при достаточно больших x , то максимальный корень $Q_{k,C}(x)$ не меньше, чем у $Q_{k,D}(x)$. А тогда это неравенство справедливо и для максимальных корней семейств многочленов.

3. Предельная доходность не убывает при переносе платежей на ранние сроки: если $c_i = d_i + p$, $c_{i+1} = d_{i+1} - p$ при $p \geq 0$ и $c_j = d_j$ при $j \neq i, i+1$, то $\chi(C) \geq \chi(D)$. Действительно, $Q_{k,C}(x) - Q_{k,D}(x) = px^{k-i} - px^{k-i-1} = px^{k-i-1}(x-1) \geq 0$ при $x \geq 1$. Дальнейшее аналогично доказательству свойства 2.

4. $\chi(C+D) \leq \max\{\chi(C), \chi(D)\}$. Это следует из того, что если многочлены $Q_{k,C}(x)$, $Q_{k,D}(x)$ отрицательны при некотором x , то это же утверждение справедливо и для суммы проектов.

5. Если проект D совпадает с несколькими начальными платежами проекта C , то $\chi(C) \geq \chi(D)$. Действительно, множество многочленов $Q_{k,C}(x)$ содержит все многочлены из $Q_{k,D}(x)$.

6. Для правильных проектов $LP(C) = 1$ тогда и только тогда, когда $\sum_{i=0}^n c_i = 0$.

Использование на практике эндогенных характеристик инвестиционных проектов, рассмотренных в заметке, позволяет избежать ряда противоречий, сопряженных с использованием внутренней нормы доходности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Беленький В.З. (2005): О норме доходности инвестиционного проекта // *Экономика и мат. методы*. Т. 41. № 1.
- Бронштейн Е.М., Скотников Д.А. (2005): Предельная доходность финансовых операций // *Сибирский журнал индустриальной мат.* Т. VIII. № 4 (24).
- Бронштейн Е.М., Черняк Д.А. (2005): Сравнительный анализ показателей эффективности инвестиционных проектов // *Экономика и мат. методы*. Т. 41. № 2.
- Виленский П.Л., Лившиц В.Н., Смоляк С.А. (2002): Оценка эффективности инвестиционных проектов. М.: Дело.
- Виленский П.Л., Смоляк С.А. (1999): Показатель внутренней нормы доходности проекта и его модификации // *Аудит и финансовый анализ*. № 4.
- Arrow K.J., Levhari D. (1969): Uniqueness of the Internal Rate of Return with Variable Life of Investment // *The Economic J.* Vol. 79.
- Promislov D. (1997): Classification of Usurious Loans. Cairas: Proc. Intern. AFIR Colloquium.
- Promislov D., Spring D. (1996): Postulates for the Internal Rate of Return of an Investment Project // *J. of Math. Economics*. Vol. 26.

Поступила в редакцию
19.04.2006 г.