

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ЧИСТОГО ОБМЕНА И АКТУАЛЬНО БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ЦЕНЫ*

© 2008 г. М. Ю. Андреев, И. Г. Пospelов
(Москва)

Исследуются равновесия с неполными рынками в стохастической динамической модели чистого обмена. Показано, что при определенных реализациях равновесной траектории в некоторый момент времени может происходить полное обесценение денежных накоплений агентов (дефолт).

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена известной тематике неполных рынков. Исследование динамических моделей в (Пospelов, Пospelова, Хохлов, Шипулина, 2006) показало, что последовательная модель межвременного равновесия, учитывающая специфику существующих институтов, способна весьма точно воспроизводить прихотливую динамику несглаженных временных рядов основных макроэкономических показателей современной российской экономики. Некоторые внутренние свойства детерминированной модели показали, что она была бы более естественной, если ввести в нее элементы стохастического описания.

Прямое обобщение концепции экономического равновесия на стохастический случай дает, как правило, вместо одного эффективного состояния равновесия множество неэффективных равновесий. Это явление известно как проблема неполноты рынков (Magil, Shafer, 1991, с. 1524–1610). Основные усилия исследователей этой проблемы были направлены на выяснение вопроса о том, какие дополнительные инструменты (аналогичные условным обязательствам) нужно добавить, чтобы свести множество равновесий к одному эффективному равновесию.

Применительно к моделированию экономики России такой подход кажется не очень естественным: с одной стороны, условные сделки не играют в России большой роли, с другой — состояние рынка представляется не слишком эффективным. Возможно, стоило бы использовать для описания именно неэффективные равновесия с неполными рынками, но пока этот метод не принес результата. Однако изучение неэффективных равновесий обнаружило любопытный факт, изложение которого и является предметом данной работы. Оказалось, что в стохастической динамической модели среди равновесий рациональных ожиданий закономерно присутствуют равновесия с дефолтами. Это означает, что в какой-то момент при определенном случайном исходе происходит полное обесценивание всех денежных накоплений агентов. Часто эти равновесия оказываются наиболее эффективными среди всех равновесий с неполными рынками. С математической точки зрения равновесия с дефолтами аналогичны обобщенным равновесиям с актуально бесконечно малыми ценами, изученными в (Данилов, Сотсков, 1985, с. 3–18; Danilov, Sotskov, 1990, с. 341–356). Однако в отличие от детерминированной ситуации в стохастической модели такие равновесия возникают в регулярном случае.

2. СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЧИСТОГО ОБМЕНА

Рассмотрим стохастическую динамическую модель чистого обмена. Для простоты изложения будем рассматривать обмен с одним видом продукта. При различном отношении агентов к риску такой обмен может иметь для них смысл. Модель описывает поведение конечного множества потребителей $n \in \mathcal{N}$. В последовательные периоды времени t , начиная с нулевого, каждый потребитель n получает запас продукта w_t^n . При $t \geq 1$ эти запасы представляют собой случайные вели-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 07-01-00563), Российского гуманитарного научного фонда (проект 07-02-00362), гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ-2982.2008.1), ПФИ РАН № 14 (проект 111) и ПФИ ОМН РАН № 3 (проект 3.14).

чины, реализация которых становится известной потребителям к моменту t , а распределения известны заранее.

Предполагается, что случайные величины w_t^N определяются марковским процессом $\mathcal{S}$ с конечным числом состояний на конечном множестве периодов времени. Процесс $\mathcal{S}$ можно представить *деревом сценариев* (рис. 1). Каждому узлу дерева (*позиции*) $\bar{s}_t = (s_1, \dots, s_t)$ отвечает набор запасов $w_t^n = w^n(\bar{s}_t)$, $n \in N$, и случайная величина s_{t+1} , в зависимости от

реализации которой выбирается та ветвь, по которой процесс пойдет дальше. Пусть исходящие дуги пронумерованы и $V(\bar{s}_{t+1})$ — число исходящих из узла $\bar{s}_t$ дуг. Тогда величина s_{t+1} принимает значения $s_{t+1} = 1, \dots, V(s_{t+1})$ с вероятностями $\pi_v^{s_{t+1}} > 0$, $\sum_{v=1}^{V(s_{t+1})} \pi_v^{s_{t+1}} = 1$. Случайные величины, отвечающие разным узлам, независимы. При $t=0$ запас $w_0^n = w^n(\bar{s}_0) = w^n(\emptyset)$ является детерминированной величиной.

Дерево сценариев задает частичный порядок на множестве позиций, который будем обозначать как $\bar{s}_t \subset \bar{s}_{t'}$, где $\bar{s}_t$ — начальный отрезок пути к позиции $\bar{s}_{t'}$. Обозначим через S — множество всех позиций $\bar{s}_t$, включая корень дерева $\emptyset$; $I \subset S$ — множество всех терминальных позиций (или, что то же самое, множество всех реализаций случайного процесса $\mathcal{S}$); $T(i)$ — длина пути i , $i \in I$; $\mathcal{T}(i)$ — последовательность $\{0, \dots, T(i)\}$; $T^* = \max_{i \in I} T(i)$ — длина дерева.

Потребитель $n \in N$ планирует объем потребления c^n в каждой позиции $\bar{s}_t$: $c^n = c^n(\bar{s}_t)$. В позиции $\bar{s}_t$ он может продать или купить продукт по ожидаемой в этой позиции цене $p(\bar{s}_t)$. При этом потребитель ограничен в своем выборе межвременными *бюджетными ограничениями*:

$$\sum_{t \in \mathcal{T}(i)} p(\bar{s}_t) w^n(\bar{s}_t) \geq \sum_{t \in \mathcal{T}(i)} p(\bar{s}_t) c^n(\bar{s}_t), \quad \bar{s}_t \subseteq \bar{s}_{T(i)}, \quad i \in I, \quad (1)$$

число которых составляет $|I|$.

Модель основывается на принципе рациональных ожиданий — ожидаемые цены для всех потребителей одинаковы и совпадают с фактическими ценами в равновесии.

Обозначим реализацию процесса изменения запасов, соответствующую позиции $\bar{s}_t$, через вектор $\bar{w}^n(\bar{s}_t) = \langle w^n(\emptyset), w^n(\bar{s}_1), \dots, w^n(\bar{s}_t) \rangle$ а набор векторов $\langle \bar{w}^n(\bar{s}_{T(i)}) | i \in I \rangle$ —

$$\mathbf{w}^n \in \mathbb{R}^{|S|}. \quad (2)$$

Аналогично имеем:

$$\begin{aligned} \bar{c}^n(\bar{s}_t) &= \langle c^n(\emptyset), c^n(\bar{s}_1), \dots, c^n(\bar{s}_t) \rangle, \quad \mathbf{c}^n = \langle \bar{c}^n(\bar{s}_{T(i)}) | i \in I \rangle \in \mathbb{R}_+^{|S|}, \\ \bar{p}(\bar{s}_t) &= \langle p(\emptyset), p(\bar{s}_1), \dots, p(\bar{s}_t) \rangle, \quad \mathbf{p} = \langle \bar{p}(\bar{s}_{T(i)}) | i \in I \rangle \in \mathbb{R}_+^{|S|}. \end{aligned} \quad (3)$$

Бюджетное множество потребителя $B^n(\mathbf{p})$ состоит из наборов $\mathbf{c}^n$, удовлетворяющих неравенствам (1), которые в векторной форме имеют вид:

$$\bar{p}(\bar{s}_{T(i)}) \bar{c}^n(\bar{s}_{T(i)}) \leq \bar{p}(\bar{s}_{T(i)}) \bar{w}^n(\bar{s}_{T(i)}), \quad i \in I, \quad (4)$$

где произведение векторов — это скалярное произведение. Подчеркнем, что для любого $\mathbf{c}^n$ из $B^n(\mathbf{p})$ объемы потребления $c^n(\bar{s}_t)$, отвечающие разным ветвям дерева сценариев, связаны между собой посредством общего для всех наборов начального потребления $c^n(\emptyset)$. Предпочтения потребителей задаются как полный порядок $\geq_n$ на неотрицательных наборах $\mathbf{c}^n$.

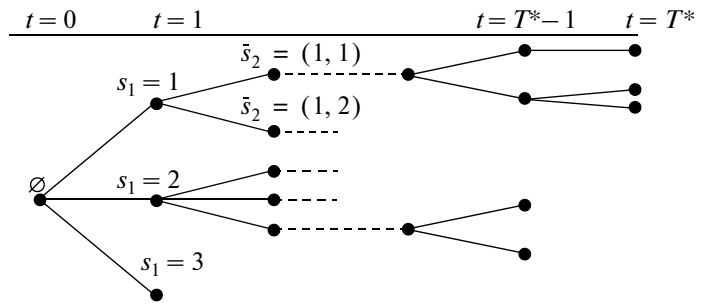


Рис. 1. Дерево исходов: возможные варианты реализации будущего потребителей.

Собственным равновесием назовем набор *положительных* цен $\mathbf{p}$ и объемов потребления $\langle \mathbf{c}^n | n \in \mathcal{N} \rangle$ такие, что:

1) вектор потреблений $\mathbf{c}^n$ каждого потребителя является одним из лучших для него элементов в бюджетном множестве (4):

$$\mathbf{c}^n \in M^n(\mathbf{p}) = \{ \mathbf{c}^n \in B^n(\mathbf{p}) | \forall (\mathbf{x}^n \in B^n(\mathbf{p})) \mathbf{c}^n \succsim_n \mathbf{x}^n \}, \quad n \in \mathcal{N};$$

2) выполнены условия *материального баланса*:

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} w^n(\bar{s}_t) \geq \sum_{n \in \mathcal{N}} c^n(\bar{s}_t), \quad \bar{s}_t \in S. \quad (5)$$

Здесь не вводится привычного требования нормировки цен, но различие равновесий, сводящееся к различной нормировке цен в них, будем считать несущественным. Такую модель назовем *моделью чистого обмена для собственных равновесий*.

Далее будем рассматривать простой случай, когда:

а) запас продукта каждого потребителя $n \in \mathcal{N}$ в каждой позиции положителен

$$w^n(\bar{s}_t) > 0, \quad \bar{s}_t \in S; \quad (6)$$

б) предпочтения потребителей заданы с помощью неймановского функционала

$$\bar{x} \succsim_n \bar{y} \Leftrightarrow E \left\{ \sum_{t=0}^{T^*} U^n(x^n(\bar{s}_t)) \right\} \geq E \left\{ \sum_{t=0}^{T^*} U^n(y^n(\bar{s}_t)) \right\}, \quad (7)$$

где E — оператор математического ожидания по реализациям процесса $\bar{s}_t$ и U^n — гладкая функция полезности такая, что:

$$\partial U^n(0) = \infty, \quad \partial U^n(x) > 0, \quad \partial^2 U^n(x) < 0. \quad (8)$$

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ РАВНОВЕСИЙ

Основное отличие стохастической задачи от детерминированной заключается в том, что в стохастической задаче чистого обмена существенно различных равновесий очень много. В детерминированной задаче цены можно нормировать только все сразу, а в стохастической — на каждой реализации $i \in I$ независимо друг от друга (т.е. под любые заданные положительные значения терминальных цен $p(\bar{s}_{T(i)})$, $i \in I$, можно подобрать остальные цены так, чтобы получить равновесие). Это происходит вот по какой причине.

Рассмотрим реализацию $\bar{s}_{T(i)}$, $i \in I$. Предположим, что в равновесии бюджетные ограничения (1) и материальные балансы (5) будут выполнены как равенства (в данной модели это достигается за счет свойств предпочтений потребителей (8)):

$$\sum_{t \in \mathcal{T}(i)} p(\bar{s}_t) w^n(\bar{s}_t) = \sum_{t \in \mathcal{T}(i)} p(\bar{s}_t) c^n(\bar{s}_t), \quad n \in \mathcal{N}, \quad (9)$$

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} w^n(\bar{s}_t) = \sum_{n \in \mathcal{N}} c^n(\bar{s}_t), \quad t \in \mathcal{T}(i). \quad (10)$$

Умножим (10) на $p(\bar{s}_t)$, сложим по $t \in \mathcal{T}(i)$ и получим

$$\sum_{t \in \mathcal{T}(i)} p(\bar{s}_t) \sum_{n \in \mathcal{N}} w^n(\bar{s}_t) = \sum_{t \in \mathcal{T}(i)} p(\bar{s}_t) \sum_{n \in \mathcal{N}} c^n(\bar{s}_t).$$

Просуммировав (9) по $n \in \mathcal{N}$, получим аналогичное выражение. Это означает, что (9) и (10) линейно зависимы, а точнее, что (10) при $t = T(i)$ выполняется в виде тождества:

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} w^n(\bar{s}_{T(i)}) \equiv \sum_{n \in \mathcal{N}} c^n(\bar{s}_{T(i)}). \quad (11)$$

Данный факт обычно называют тождеством Вальраса. Тожественное выполнение (11) не позволяет определить соответствующую терминальную цену $p(\bar{s}_{T(i)})$. Следует ожидать, что набор терминальных цен $p(\bar{s}_{T(I)})$ произволен, т.е. для любого такого набора существует свое равновесие.

Обозначим: $\mathbf{p}^{T(I)} = \langle p(\bar{s}_{T(i)}) > 0 | i \in I \rangle$, $\mathbf{p}^{\mathcal{T}(I) \setminus T(I)} = \langle \bar{p}(\bar{s}_{T(i)-1}) | i \in I \rangle$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}^{\mathcal{T}(I) \setminus T(I)} \otimes \mathbf{p}^{T(I)}$.

Утверждение 1. Пусть $\mathbf{p}^{T(I)}$ — произвольный фиксированный набор положительных терминальных цен. Тогда в предположениях (6)–(8) в стохастической задаче чистого обмена существует собственное равновесие такое, что $\mathbf{p} = \mathbf{p}^{\mathcal{T}(I) \setminus T(I)} \otimes \mathbf{p}^{T(I)}$.

Доказательство проводится по стандартной схеме. Равновесие оказывается неподвижной точкой многозначного отображения, которое можно считать отображением оптимальных ответов в некооперативной игре потребителей, определяющих $\mathbf{c}^n$, и дополнительного игрока (торговца), устанавливающего нетерминальные цены $\mathbf{p}^{\mathcal{T}(I) \setminus T(I)}$ из условия максимизации торговой прибыли. Существование неподвижной точки доказывается на основании теоремы Какутани (Никайдо, 1972, с. 97). Замкнутость графика отображения и выполнение остальных условий теоремы Какутани обеспечивают предположения (7)–(8) и свойство, следующее из предположения положительности запасов (6) — “обрезанное” бюджетное множество

$$\tilde{B}^n(\mathbf{p}^{\mathcal{T}(I) \setminus T(I)}) = \left\{ \mathbf{c}^n | \mathbf{c}^n \in B^n(\mathbf{p}^{\mathcal{T}(I) \setminus T(I)} \otimes \mathbf{p}^{T(I)}) \wedge \forall (\bar{s}_t \subset S) c^n(\bar{s}_t) \leq \sum_{k \in \mathcal{N}} w^k(\bar{s}_t) \right\},$$

непрерывно по Хаусдорфу зависит от неотрицательных параметров $\mathbf{p}^{\mathcal{T} \setminus T}$ (Ашманов, 1984, с. 117–119).

4. МНОЖЕСТВЕННОСТЬ РАВНОВЕСИЙ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ЧИСТОГО ОБМЕНА

Под *множественностью* равновесий в стохастической задаче чистого обмена понимается разнобразие собственных равновесий, вызванное разнообразием терминальных цен $\mathbf{p}^{T(I)}$. Согласно утверждению 1, каждому набору положительных терминальных цен соответствует собственное равновесие.

На рис. 1 крестиками отмечены множества равновесий в плоскости значений функционалов полезности для простейшего случая: единичная длина дерева $T^* = \max_{i \in I} T(i) = 1$, два случайных исхода единственной случайной величины s_1 и два потребителя; кружками — решения задачи максимизации взвешенной полезности агентов

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} a_n E \left\{ \sum_{t=0}^{T^*} U^n(c^n(\bar{s}_t)) | \bar{s}_t \subset S \right\} \longrightarrow \max \quad (12)$$

при ограничениях материального баланса

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} w^n(\bar{s}_t) \geq \sum_{n \in \mathcal{N}} c^n(\bar{s}_t), \quad \bar{s}_t \subset S, \quad (13)$$

и различных значениях взвешивающих коэффициентов $a_n > 0$ в (12). Задача (12)–(13) известна как задача благосостояния, а ее решение соответствует эффективному распределению благ. Граница, отмеченная на рис. 2 кружками, показывает наибольшие возможные значения полезности агентов.

Для обоих графиков взяты одни и те же функции полезности¹, одни и те же суммарные запасы продукта. Случаи отличаются лишь различным распределением суммарного запаса продукта между двумя потребителями.

Вне зависимости от того, есть ли среди равновесий эффективное (рис. 2а) или нет (рис. 2б), можно говорить об оптимальных по Парето равновесиях среди множества собственных равновесий. Первоначальная гипотеза состояла в том, что Парето-оптимальная граница данных множеств состоит из одной точки, т.е. из всех наборов конечных цен можно выбрать “лучший” набор.

¹ $U^1 = 2B^2 - (B - c^1(\varnothing))^2 - (B - c^1(s))^2$, $U^2 = d_1 \sqrt{c^2(\varnothing)} + d_2 \sqrt{c^2(s)}$, где $\sum_{n=1,2} w^n(\varnothing) < B$, $\sum_{n=1,2} w^n(s) < B$.

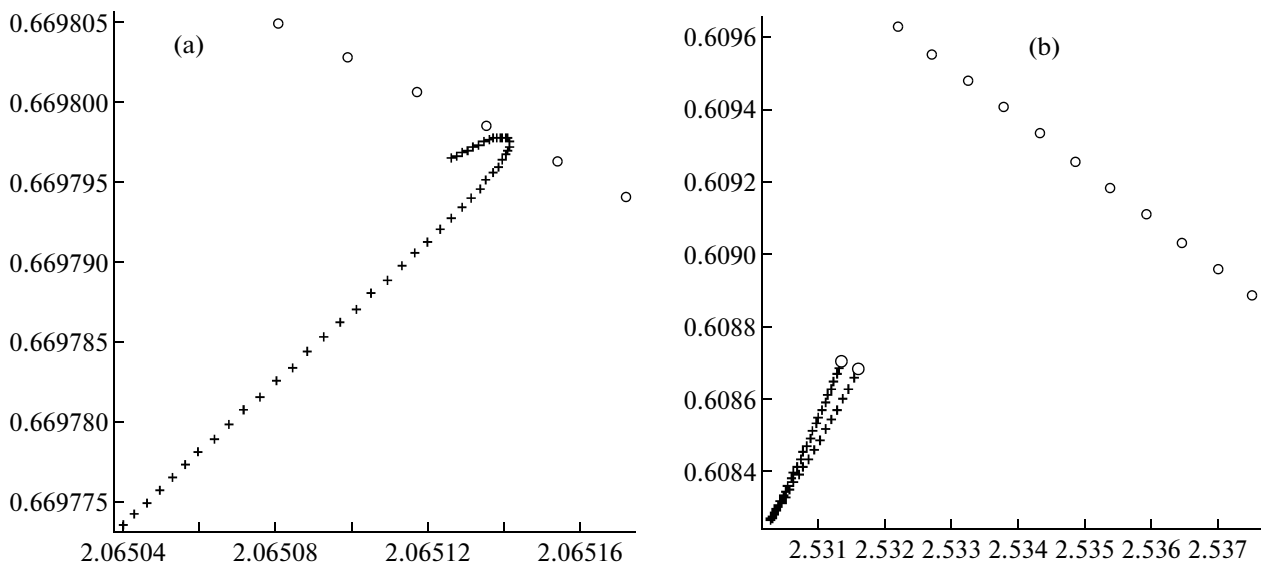


Рис. 2. Множество решений в стохастической задаче чистого обмена с конечными ценами.

Действительно, единственно известным случаем, когда стохастическая задача чистого обмена решается аналитически, является случай квадратичной функции полезности $U^n = \sum_{t=0, \dots, T^*} [(B^n)^2 - (B^n - c^n(\bar{s}_t))^2]$ и начальных запасов $w^n(\bar{s}_t) = \alpha_n \sum_{k \in \mathcal{N}} w^k(\bar{s}_t)$, тогда существует единственная точка, которая доминирует остальные. Но для общего случая это утверждение неверно.

Однако было установлено, что множество равновесий не включает часть своей границы. Например, Паретовская граница множества равновесий может быть пустой. Замыкание множества равновесий включает равновесия, которые не являются собственными. Так, на рис. 2б оба конца кривой равновесий (обведены кружками) не являются собственными равновесиями. Оказывается, что эти предельные точки можно описать как равновесия, в которых некоторые терминальные цены бесконечны. Ниже покажем, что и при бесконечных ценах потребители могут осуществлять обмен продуктом на взаимовыгодных условиях.

5. НЕСОБСТВЕННЫЕ РАВНОВЕСИЯ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЧИСТОГО ОБМЕНА

Будем рассматривать модель экономики с одним продуктом, конечным множеством потребителей $n \in \mathcal{N}$ и множеством позиций S дерева исходов (разд. 2, рис. 1). Потребители характеризуются отношениями предпочтения вида (7) и остаются в силе предположения (6) и (8). Однако вместо абсолютных цен $\mathbf{p}$, следуя (Danilov, Sotskov, 1990, с. 341–356), введем *сравнительные цены* $P(\bar{s}'_t, \bar{s}''_t)$ на парах позиций $\bar{s}'_t \subset S$, $\bar{s}''_t \subset S$, соизмеряющие стоимости продуктов в этих позициях².

Сравнительные цены могут быть неотрицательными числами или бесконечностью и должны удовлетворять естественному условию транзитивности

$$P(\bar{s}'_t, \bar{s}''_t)P(\bar{s}''_t, \bar{s}'''_t)P(\bar{s}'''_t, \bar{s}'_t) = 1, \quad \bar{s}'_t \subset S, \quad \bar{s}''_t \subset S, \quad \bar{s}'''_t \subset S. \quad (14)$$

При бесконечном значении одной из сравнительных цен соотношение (14) считается по определению выполненным тогда и только тогда, когда одна из сравнительных цен в тройном произведении равна нулю. Из (14) следует, что $P(\bar{s}'_t, \bar{s}'_t) = 1$ и $P(\bar{s}'_t, \bar{s}''_t)P(\bar{s}''_t, \bar{s}'_t) = 1$.

² Достаточно определять сравнительные цены только на таких парах, для которых верно: $\bar{s}'_t \subset \bar{s}''_t$, либо $\bar{s}'_t \supset \bar{s}''_t$, либо $t' = T(i), i \in I, t'' = T(j), j \in I$. Однако определение сравнительных цен для всех пар $(\bar{s}'_t, \bar{s}''_t)$ не вызывает никаких затруднений.

Система сравнительных цен порождает отношение порядка на множестве всех позиций (Danilov, Sotskov, 1990, с. 341–356). Будем говорить, что $\bar{s}_t''$ не хуже чем $\bar{s}_t'$ ($\bar{s}_t'' \geq^P \bar{s}_t'$) тогда и только тогда, когда $P(\bar{s}_t', \bar{s}_t'') > 0$. Смысл этого отношения в том, что количества денег, на которое можно купить ненулевое конечное количество товара в позиции $\bar{s}_t'$, хватит на то, чтобы купить ненулевое количество товара в позиции $\bar{s}_t''$. Или — *уровень цен* при $\bar{s}_t'$ не ниже, чем при $\bar{s}_t''$. В силу (14) введенное отношение является полным порядком. Поэтому соответствующее отношение эквивалентности

$$\bar{s}_t' \approx \bar{s}_t'' \Leftrightarrow \infty > P(\bar{s}_t', \bar{s}_t'') > 0$$

разбивает множество позиций на конечное число L непересекающихся *классов эквивалентности* $K_1, \dots, K_L$, на которых определено индуцированное соотношение порядка. Будем нумеровать классы по убыванию их порядка, считая первым класс наилучших элементов. Через $j(\bar{s}_t)$ будем обозначать номер класса, к которому относится данная позиция $\bar{s}_t$, т.е.

$$\bar{s}_t' \geq^P \bar{s}_t'' \Leftrightarrow j(\bar{s}_t') \leq j(\bar{s}_t''), \quad \bar{s}_t \in K_{j(\bar{s}_t)}. \quad (15)$$

Набор всех сравнительных цен

$$\mathcal{P} = \langle P(\bar{s}_t', \bar{s}_t'') | \bar{s}_t' \subset S, \bar{s}_t'' \subset S \rangle$$

будем называть *иерархической ценой*.

Используя обозначения (2), (3), запишем *бюджетное множество* потребителя как множество наборов потреблений $\mathbf{c}$, удовлетворяющих условиям

$$B^n(\mathcal{P}) = \left\{ \mathbf{c} \mid \sum_{t \in \mathcal{T}(i)} P(\bar{s}_t, \bar{s}_t) (w^n(\bar{s}_t) - c^n(\bar{s}_t)) \geq 0, j(\bar{s}_t) = \min_{\bar{s}_t \subseteq \bar{s}_{T(i)}} \{j(\bar{s}_t)\}, i \in I \right\}. \quad (16)$$

Как и для собственных равновесий, бюджетное множество определяется многими ограничениями, отвечающими различным путям $i \in I$ в терминальные вершины. Однако в определении (16) в отличие от (1) для формирования межвременного бюджетного ограничения на разных путях $i \in I$ формально используются разные наборы абсолютных цен, что дает степень свободы для построения равновесий, отличных от рассмотренных в разд. 2.

В качестве цены продукта в позиции $\bar{s}_t \subseteq \bar{s}_{T(i)}$ возьмем сравнительные цены $P(\bar{s}_t, \bar{s}_t)$ этой позиции и позиции $\bar{s}_t'$, которая в реализации $\bar{s}_{T(i)}$ имеет минимальный ранг $j(\bar{s}_t) = \min_{\bar{s}_t \subseteq \bar{s}_{T(i)}} \{j(\bar{s}_t)\}$. По

этой причине, хотя цены $P(\bar{s}_t, \bar{s}_t)$ могут принимать бесконечные значения, но ни в одном из ограничений (16) бесконечных множителей не будет, однако, могут появиться нулевые множители. Ограничение (16) на реализации фактически принимает в расчет только цены минимального ранга $j(\bar{s}_t)$.

Вид бюджетного ограничения в (16) объясняется тем, что если разделить бюджетное ограничение (1) в абсолютных ценах на максимальную среди $p(\emptyset), p(\bar{s}_1), \dots, p(\bar{s}_{T(i)})$, цену $p(\bar{s}_t)$, то получится ограничение

$$\sum_{t \in \mathcal{T}(i)} \frac{p(\bar{s}_t)}{p(\bar{s}_t)} w^n(\bar{s}_t) \geq \sum_{t \in \mathcal{T}(i)} \frac{p(\bar{s}_t)}{p(\bar{s}_t)} c^n(\bar{s}_t).$$

Пропорции цен — это и есть относительные цены $p(\bar{s}_t)/p(\bar{s}_t) = P(\bar{s}_t, \bar{s}_t)$. Если считать, что $p(\bar{s}_t)/p(\bar{s}_t)$ могут принимать бесконечно малые значения, то в (16) формально надо оставить только ограничения с конечными величинами отношений.

Считаем, что потребитель выбирает из бюджетного множества один набор, наилучший с точки зрения его предпочтений (7).

Несобственным равновесием будем называть набор $(\mathcal{P}, \mathbf{c}^N)$, состоящий из иерархической цены $\mathcal{P}$ и наборов $\mathbf{c}^n$, $n \in \mathcal{N}$, таких, что:

$$\begin{aligned}
 1) \mathbf{c}^n \in \operatorname{argmax}_{\mathbf{x}} \left\{ E \left\{ \sum_{t=0}^{T^*} U^n(x^n(\bar{s}_t)) \right\} \middle| \mathbf{x} \in B^n(\mathcal{P}), \bar{s}_t \in S \right\}, \quad n \in \mathcal{N}; \\
 2) \sum_{n \in \mathcal{N}} w^n(\bar{s}_t) \geq \sum_{n \in \mathcal{N}} c^n(\bar{s}_t) \quad \forall \bar{s}_t \in S,
 \end{aligned} \tag{17}$$

а соответствующую модель обмена — моделью чистого обмена для несобственных равновесий.

6. СУЩЕСТВОВАНИЕ НЕСОБСТВЕННЫХ РАВНОВЕСИЙ

Утверждение 2. Пусть задана система сравнительных цен на парах терминальных позиций $\mathcal{P}^{T(I)} = \{P(\bar{s}_{T(i)}, \bar{s}_{T(h)}) | i \in I, h \in I\}$. Эти величины принимают неотрицательные или бесконечные значения и удовлетворяют условию (14). Тогда в предположениях (6)–(8) существует несобственное равновесие $(\mathcal{P}^{\mathcal{T}(I) \setminus T(I)} \otimes \mathcal{P}^{T(I)}, \mathbf{c}^{\mathcal{N}})$.

Доказательство. Будем искать равновесные сравнительные цены $\mathcal{P}_*^{\mathcal{T}(I) \setminus T(I)} \otimes \mathcal{P}^{T(I)}$ как пределы отношений последовательностей абсолютных цен $\mathbf{p}_k$. Начнем с определения последовательностей терминальных цен $\mathbf{p}_k^{T(I)}$:

$$P(\bar{s}_{T(i)}, \bar{s}_{T(h)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k(\bar{s}_{T(i)})}{p_k(\bar{s}_{T(h)})}.$$

Позиции $\bar{s}_{T(I)}$ разбиты на классы эквивалентности $S_1, \dots, S_L$, причем (см. (15)):

$$\infty > P(\bar{s}_{T(i)}, \bar{s}_{T(h)}) > 0 \quad \text{при} \quad j(\bar{s}_{T(i)}) = j(\bar{s}_{T(h)}),$$

$$P(\bar{s}_{T(i)}, \bar{s}_{T(h)}) = \infty \quad \text{при} \quad j(\bar{s}_{T(i)}) < j(\bar{s}_{T(h)}),$$

$$P(\bar{s}_{T(i)}, \bar{s}_{T(h)}) = 0 \quad \text{при} \quad j(\bar{s}_{T(i)}) > j(\bar{s}_{T(h)}).$$

Для каждого класса $r \in \{1, \dots, L\}$ зафиксируем произвольную позицию $\bar{\sigma}_{T(i(r))}$, $j(\bar{\sigma}_{T(i(r))}) = r$ и поставим в соответствие каждой позиции $\bar{s}_{T(i)} \in S_r$ последовательность абсолютных цен

$$p_k(\bar{s}_{T(i)}) = k^{L-r} P(\bar{s}_{T(i)}, \bar{\sigma}_{T(i(r))}), \quad r = j(\bar{s}_{T(i)}).$$

Тогда для пар одного класса r имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k(\bar{s}_{T(i)})}{p_k(\bar{s}_{T(h)})} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^{L-r} P(\bar{s}_{T(i)}, \bar{\sigma}_{T(i(r))})}{k^{L-r} P(\bar{s}_{T(h)}, \bar{\sigma}_{T(i(r))})} = P(\bar{s}_{T(i)}, \bar{\sigma}_{T(i(r))}) P(\bar{\sigma}_{T(i(r))}, \bar{s}_{T(h)}) = P(\bar{s}_{T(i)}, \bar{s}_{T(h)}),$$

а для пар разных классов $r \neq \rho$ —

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k(\bar{s}_{T(i)})}{p_k(\bar{s}_{T(h)})} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^{L-r} P(\bar{s}_{T(i)}, \bar{\sigma}_{T(i(r))})}{k^{L-\rho} P(\bar{s}_{T(h)}, \bar{\sigma}_{T(i(\rho))})} = \begin{cases} 0, & r > \rho, \\ \infty, & r < \rho. \end{cases}$$

Таким образом, получены положительные последовательности абсолютных терминальных цен $\mathbf{p}_k^{T(I)} = \langle p_k(\bar{s}_{T(i)}), i \in I \rangle$, пределы отношений которых образуют систему заданных терминальных сравнительных цен $\mathcal{P}^{T(I)}$.

Согласно утверждению 1, для каждого k существует собственное равновесие $(\mathbf{p}_k^{\mathcal{T}(I) \setminus T(I)} \otimes \mathbf{p}_k^{T(I)}, \mathbf{c}_k^{\mathcal{N}})$ с терминальными ценами $\mathbf{p}_k^{T(I)}$. Для собственных равновесий выполнены бюджетные ограничения (4). Теперь, записав скалярные произведения в явном виде, получаем, что

$$\sum_{t \in \mathcal{T}(I)} \frac{p_k(\bar{s}_t)}{p_k(\bar{s}_{T(i)})} w^n(\bar{s}_t) \geq \sum_{t \in \mathcal{T}(I)} \frac{p_k(\bar{s}_t)}{p_k(\bar{s}_{T(i)})} c_k^n(\bar{s}_t).$$

Покажем, что для любой фиксированной позиции $\bar{s}_t$ последовательность $p_k(\bar{s}_t)/p_k(\bar{s}_{T(i)})$ ограничена сверху. Действительно, если отношение $p_k(\bar{s}_t)/p_k(\bar{s}_{T(i)})$ достаточно велико, всем потребителям будет выгодно уменьшить свое потребление в позиции $\bar{s}_t$ и на вырученные деньги увеличить потребление в позиции $\bar{s}_{T(i)} \supset \bar{s}_t$. Поскольку последовательностей вида $p_k(\bar{s}_t)/p_k(\bar{s}_{T(i)})$, $\bar{s}_t \subset \bar{s}_{T(i)}$ конечное число и все они ограничены, их можно считать сходящимися. Одновременно можно считать сходящимися и ограниченными сверху и снизу последовательности объемов потреблений

$$\mathbf{c}^n = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{c}_k^n. \quad (18)$$

Положим

$$P(\bar{s}_t, \bar{s}_{T(i)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k(\bar{s}_t)}{p_k(\bar{s}_{T(i)})} \quad \forall (\bar{s}_t, \bar{s}_{T(i)}), \bar{s}_t \subset \bar{s}_{T(i)}. \quad (19)$$

По построению в (19) $P(\bar{s}_t, \bar{s}_{T(i)}) < \infty$ для любого продолжения $\bar{s}_{T(i)}$ позиции $\bar{s}_t$. Оказывается, что среди продолжений позиции $\bar{s}_t$ существует такое продолжение $\bar{s}_{T(i)}$, $\bar{s}_t \subseteq \bar{s}_{T(i)}$, что $0 < P(\bar{s}_t, \bar{s}_{T(i)}) < \infty$. Действительно, если предположить, что для всех $\bar{s}_{T(i)}$, $\bar{s}_{T(i)} \supset \bar{s}_t$, сравнительная цена $P(\bar{s}_t, \bar{s}_{T(i)})$ нулевая, то при достаточно большом k потребитель n в равновесиях $(\mathbf{p}_k^{\mathcal{T}(I) \setminus \mathcal{T}(I)} \otimes \mathbf{p}_k^{\mathcal{T}(I)}, \mathbf{c}_k^{\mathcal{N}})$ за свой запас $w^n(\bar{s}_{T(i)}) > 0$ может получить сколь угодно большую величину потребления

$$\min_{\bar{s}_{T(i)}} \{p_k(\bar{s}_{T(i)}) w^n(\bar{s}_{T(i)}) | \bar{s}_{T(i)} \supseteq \bar{s}_t\} \frac{1}{p_k(\bar{s}_t)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \min \left\{ \frac{w^n(\bar{s}_{T(i)})}{P(\bar{s}_t, \bar{s}_{T(i)})} \middle| \bar{s}_{T(i)} \supseteq \bar{s}_t \right\} = \infty$$

в позиции $\bar{s}_t$. Легко увидеть, что в собственном равновесии с ненасыщаемыми функциями полезности такого быть не может.

Итак, теперь кроме сравнительных цен пар терминальных позиций были получены сравнительные цены для пар позиций, одна из которых — $\bar{s}_{T(i)}$ — терминальная и служит продолжением второй — $\bar{s}_t \subseteq \bar{s}_{T(i)}$. Для остальных пар сравнительную цену можно определить из соотношений транзитивности (14).

Возьмем две произвольные позиции $\bar{s}_t'$ и $\bar{s}_t''$ и выберем для них терминальные позиции $\bar{s}_{T(i)}$ и $\bar{s}_{T(h)}$ так, чтобы для уже определенных сравнительных цен выполнялись соотношения:

$$\bar{s}_t' \subseteq \bar{s}_{T(i)}, \quad 0 < P(\bar{s}_t', \bar{s}_{T(i)}) < \infty; \quad \bar{s}_t'' \subseteq \bar{s}_{T(h)}, \quad 0 < P(\bar{s}_t'', \bar{s}_{T(h)}) < \infty. \quad (20)$$

Как показано выше, такие терминальные позиции существуют.

Сравнительную цену $P(\bar{s}_t', \bar{s}_t'')$ найдем из соотношения

$$P(\bar{s}_t', \bar{s}_t'') P(\bar{s}_t'', \bar{s}_{T(h)}) P(\bar{s}_{T(h)}, \bar{s}_{T(i)}) P(\bar{s}_{T(i)}, \bar{s}_t') = 1.$$

В этом соотношении цены $P(\bar{s}_{T(i)}, \bar{s}_t')$ и $P(\bar{s}_t'', \bar{s}_{T(h)})$ положительны и конечны, поэтому $P(\bar{s}_t', \bar{s}_t'')$ фактически определяется ценой $P(\bar{s}_{T(h)}, \bar{s}_{T(i)})^3$

$$P(\bar{s}_t', \bar{s}_t'') = \begin{cases} (P(\bar{s}_t'', \bar{s}_{T(h)}) P(\bar{s}_{T(h)}, \bar{s}_{T(i)}) P(\bar{s}_{T(i)}, \bar{s}_t'))^{-1} & \text{при } j(\bar{s}_{T(i)}) = j(\bar{s}_{T(h)}); \\ \infty & \text{при } j(\bar{s}_{T(i)}) > j(\bar{s}_{T(h)}); \\ 0 & \text{при } j(\bar{s}_{T(i)}) < j(\bar{s}_{T(h)}), \end{cases} \quad (21)$$

при этом выполняется условие (14). Действительно,

³ Значение $P(\bar{s}_t', \bar{s}_t'')$ не зависит от выбора конкретных позиций $\bar{s}_{T(i)}$ и $\bar{s}_{T(h)}$ таких, что выполнено (20). Это обусловлено тем, что, если в (21) вернуться к пределам, то $P(\bar{s}_t'', \bar{s}_{T(h)}) P(\bar{s}_{T(h)}, \bar{s}_{T(i)}) P(\bar{s}_{T(i)}, \bar{s}_t') = \lim_{k \rightarrow \infty} (p_k(\bar{s}_t'')/p_k(\bar{s}_t'))$ — не зависит от выбора $\bar{s}_{T(i)}$ и $\bar{s}_{T(h)}$.

$$\begin{aligned}
& P(\bar{s}'_t, \bar{s}''_t)P(\bar{s}''_t, \bar{s}'''_t)P(\bar{s}'''_t, \bar{s}'_t) = P(\bar{s}'_t, \bar{s}''_t)P(\bar{s}''_t, \bar{s}'''_t)P(\bar{s}'''_t, \bar{s}'_t)[P(\bar{s}'_t, \bar{s}_{T(i)})P(\bar{s}_{T(i)}, \bar{s}'_t)] \times \\
& \times [P(\bar{s}''_t, \bar{s}_{T(h)})P(\bar{s}_{T(h)}, \bar{s}''_t)][P(\bar{s}'''_t, \bar{s}_{T(g)})P(\bar{s}_{T(g)}, \bar{s}'''_t)][P(\bar{s}_{T(i)}, \bar{s}_{T(g)})P(\bar{s}_{T(g)}, \bar{s}_{T(h)})P(\bar{s}_{T(h)}, \bar{s}_{T(i)})] = \\
& = [P(\bar{s}'_t, \bar{s}''_t)P(\bar{s}''_t, \bar{s}_{T(h)})P(\bar{s}_{T(h)}, \bar{s}_{T(i)})P(\bar{s}_{T(i)}, \bar{s}'_t)][P(\bar{s}''_t, \bar{s}'''_t)P(\bar{s}'''_t, \bar{s}_{T(g)})P(\bar{s}_{T(g)}, \bar{s}_{T(h)})P(\bar{s}_{T(h)}, \bar{s}''_t)] \times \\
& \times [P(\bar{s}'''_t, \bar{s}'_t)P(\bar{s}'_t, \bar{s}_{T(i)})P(\bar{s}_{T(i)}, \bar{s}_{T(g)})P(\bar{s}_{T(g)}, \bar{s}'''_t)] = 1 \times 1 \times 1 = 1.
\end{aligned}$$

Таким образом, иерархическая цена $\mathcal{P} = \{P(\bar{s}'_t, \bar{s}''_t)\}$ определена. Остается показать, что набор потреблений $\mathbf{c}^n$ каждого потребителя (18) принадлежит его бюджетному множеству (16) и является одним из лучших на этом множестве.

1. Переходя в (17) к пределу при $k \rightarrow \infty$, в силу (18), (19) получаем, что

$$\sum_{t \in \mathcal{T}(i)} P(\bar{s}_t, \bar{s}_{T(i)})w^n(\bar{s}_t) \geq \sum_{t \in \mathcal{T}(i)} P(\bar{s}_t, \bar{s}_{T(i)})c^n(\bar{s}_t). \quad (22)$$

Из конечности всех $P(\bar{s}_t, \bar{s}_{T(i)})$ и $P(\bar{s}_{T(i)}, \bar{s}_{T(i)}) = 1$ следует, что $j(\bar{s}_{T(i)}) = \min_{\bar{s}_t \subseteq \bar{s}_{T(i)}} \{j(\bar{s}_t)\}$. Поэтому (22) является бюджетным ограничением из (16), т.е. потребление $\mathbf{c}^n$ принадлежит бюджетному множеству.

2. Покажем теперь, что $\mathbf{c}^n$ является лучшим элементом на $B^n(\mathcal{P})$. Возьмем произвольный элемент $\chi_n \in B^n(\mathcal{P})$ и рассмотрим последовательность k , на которой достигается $\mathbf{c}_k^n \rightarrow \mathbf{c}^n$, $\mathbf{c}_k^n = \langle \bar{c}_k^n(\bar{s}_{T(i)}) | i \in I \rangle$. Элемент $\mathbf{c}_k^n$ — один из лучших на бюджетном множестве $B^n(\mathbf{p}_k)$, $\mathbf{p}_k = \langle \bar{p}_k(\bar{s}_{T(i)}) | i \in I \rangle$. Если удастся показать, что существует подпоследовательность m последовательности k $x_m^n \rightarrow x^n$ такая, что $x_m^n \in B^n(\mathbf{p}_m)$, то, переходя к пределу в $\mathbf{c}_m^n \geq x_m^n$, получим $\mathbf{c}^n \geq x^n$.

Обозначим

$$\alpha_k = \min \left\{ \min_{i \in I} \left\{ \sum_{t \in \mathcal{T}(i)} p_k(\bar{s}_t)w^n(\bar{s}_t) / \sum_{t \in \mathcal{T}(i)} p_k(\bar{s}_t)x^n(\bar{s}_t) \right\}, 1 \right\}. \quad (23)$$

Покажем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{r \geq k} \left\{ \min_{i \in I} \left(\sum_{t \in \mathcal{T}(i)} p_r(\bar{s}_t)w^n(\bar{s}_t) / \sum_{t \in \mathcal{T}(i)} p_r(\bar{s}_t)x^n(\bar{s}_t) \right) \right\} \geq 1. \quad (24)$$

Пусть это не так. Тогда из последовательности $\min_{i \in I} (\sum_{t \in \mathcal{T}(i)} p_r(\bar{s}_t)w^n(\bar{s}_t) / \sum_{t \in \mathcal{T}(i)} p_r(\bar{s}_t)x^n(\bar{s}_t))$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к числу $a < 1$. А это в силу конечности числа элементов в I означает, что есть хотя бы одна позиция $\bar{s}_{T(i)}$ и подпоследовательность m последовательности k такая, что $a \sum_{t \in \mathcal{T}(i)} p_m(\bar{s}_t)w^n(\bar{s}_t) \rightarrow \sum_{t \in \mathcal{T}(i)} p_m(\bar{s}_t)x^n(\bar{s}_t)$. Разделив это выражение на $p(\bar{s}_{T(i)})$ и перейдя к пределу, получим $a \sum_{t \in \mathcal{T}(i)} P(\bar{s}_t, \bar{s}_{T(i)})x^n(\bar{s}_t) = \sum_{t \in \mathcal{T}(i)} P(\bar{s}_t, \bar{s}_{T(i)})w^n(\bar{s}_t)$, что противоречит $x^n \in B^n(\mathcal{P})$. В силу (24) и $\alpha_m \leq 1$ получаем, что $\alpha_m \rightarrow 1$.

Положим $x_m^n = \alpha_m x^n$, тогда $x_m^n = \alpha_m x^n \rightarrow x^n$. Принадлежность $x_m^n = \alpha_m x^n \in B^n(\mathbf{p}_m)$, т.е. $\sum_{t \in \mathcal{T}(i)} p_m(\bar{s}_t)w^n(\bar{s}_t) \geq \alpha_m \sum_{t \in \mathcal{T}(i)} p_m(\bar{s}_t)x^n(\bar{s}_t)$, следует из построения последовательности α_k — (23). ■

7. СТРУКТУРА СРАВНИТЕЛЬНЫХ ЦЕН В РАВНОВЕСИИ

Из доказательства утверждения 2 легко получить следующие свойства равновесной иерархической цены $\mathcal{P}$.

Свойство 1. Если $\mathcal{P}$ — равновесная иерархическая цена, то для любой позиции $\bar{s}_{T(i)}$ класс позиций $\bar{s}_t$, где $\bar{s}_t \subseteq \bar{s}_{T(i)}$, не увеличивается с ростом t :

$$j(\bar{s}_t) \geq j(\bar{s}_{t'}), \quad \text{если} \quad t' \leq t, \quad \bar{s}_t \subseteq \bar{s}_{T(i)}, \quad \bar{s}_{t'} \subseteq \bar{s}_{T(i)}.$$

Это означает следующее. Рассмотрим бюджетное ограничение из (16) для позиции $\bar{s}_{T(i)}$:

$$\sum_{t \in \mathcal{T}(i)} P(\bar{s}_t, \bar{s}_t)(w^n(\bar{s}_t) - c^n(\bar{s}_t)) \geq 0, \quad \bar{s}_t \subseteq \bar{s}_{T(i)}, \quad \bar{s}_{t'} \subseteq \bar{s}_{T(i)}, \quad j(\bar{s}_{t'}) = \min_{\bar{s}_t \subseteq \bar{s}_{T(i)}} \{j(\bar{s}_t)\}. \quad (25)$$

В этом бюджетном ограничении позиция $\bar{s}_{T(i)}$ принадлежит минимальному из классов всех позиций $\bar{s}_t$, где $\bar{s}_t \subseteq \bar{s}_{T(i)}$, $t \in \mathcal{T}(i)$, т.е. $\infty > P(\bar{s}_{T(i)}, \bar{s}_t) > 0$. Это означает, что в качестве $\bar{s}_{t'}$ можно взять позицию $\bar{s}_{T(i)}$. Тогда бюджетное ограничение (25) выглядит так:

$$\sum_{t=t'}^{T(i)} P(\bar{s}_t, \bar{s}_{T(i)})(w^n(\bar{s}_t) - c^n(\bar{s}_t)) \geq 0. \quad (26)$$

До определенного момента t'' все цены $P(\bar{s}_t, \bar{s}_{T(i)})$ нулевые, а после $t'' - \infty > P(\bar{s}_t, \bar{s}_{T(i)}) > 0$. В частности, последняя цена $P(\bar{s}_{T(i)}, \bar{s}_{T(i)}) = 1$. Может показаться, например, что не найдется ни одной позиции $\bar{s}_{T(i)}$, для которой в соответствующее бюджетное ограничение вида (26) входит $c^n(\emptyset)$. Тогда $c^n(\emptyset)$ должно быть произвольным. Но это не так.

Свойство 2. Если $\mathcal{P}$ — равновесная иерархическая цена, то класс позиции $\bar{s}_t$, если $\bar{s}_t \notin \bar{s}_{T(i)}$, определяется как наибольший класс из всех позиций $\bar{s}_{t+1}$ таких, что $\bar{s}_t \subseteq \bar{s}_{t+1}$:

$$j(\bar{s}_t) = \max_{\bar{s}_{t+1} \supseteq \bar{s}_t} \{j(\bar{s}_{t+1})\}, \quad \bar{s}_t \notin \bar{s}_{T(i)}.$$

Это означает, что для любой позиции $\bar{s}_t$ найдется позиция $\bar{s}_{T(i)}$, $\bar{s}_t \subseteq \bar{s}_{T(i)}$, такая, что $\infty > P(\bar{s}_t, \bar{s}_{T(i)}) > 0$. В частности, хотя бы для одной позиции $\bar{s}_{T(i)}$ в соответствующем бюджетном ограничении вида (26) будет выполнено $t'' = 0$.

С точки зрения потребителя, последовательно проживающего периоды времени, начиная с нулевого, происходит следующее. Жизнь в период $t = 0$ начинается при конечных ценах, а в $t = 1$ цены при некоторых исходах могут подскочить до бесконечности, но:

1) в последующем периоде времени всегда возможен исход, в котором цена будет сопоставима с текущей ценой;

2) ни в одном исходе цена не может упасть до нуля.

Если в период $t = 1$ цена все-таки возрастает до бесконечности, то “финансовые остатки” потребителей, будь они положительны (при $w^n(\emptyset) - c^n(\emptyset) > 0$) или отрицательны (при $w^n(\emptyset) - c^n(\emptyset) < 0$), обесцениваются. Происходит дефолт, предыдущие долги и сбережения пропадают, межвременные бюджетные ограничения начинают учитывать доходы и расходы, начиная с этого момента заново. Аналогичные дефолты могут происходить или не происходить во все остальные периоды времени в зависимости от реализации последовательности случайных величин.

8. ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНОСТЬ РАВНОВЕСИЙ С ДЕФОЛТАМИ

Собственные равновесия — это несобственные равновесия, у которых все цены из множества $\mathcal{P}^{T(I)} = \{P(\bar{s}_{T(i)}, \bar{s}_{T(h)}) | i \in I, h \in I\}$ принадлежат одному классу. Поэтому *равновесиями с дефолтами* назовем несобственные равновесия, не являющиеся собственными. Как видно из рис. 2, равновесия с дефолтами могут быть оптимальными по Парето среди всех несобственных равновесий.

Структура множества несобственных равновесий на рис. 2 выглядит незавершенно. Построим некоторое множество, частью которого являются несобственные равновесия.

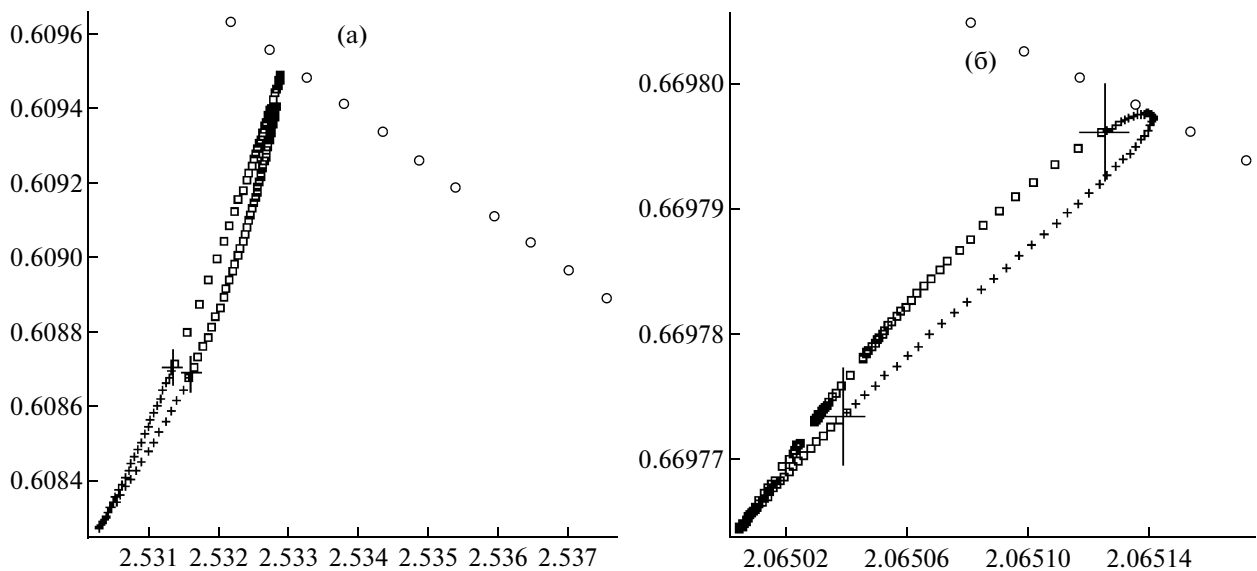


Рис. 3. Множество равновесий в задаче чистого обмена: кресты — собственные, большие кресты — с дефолтами, квадраты — со знакопеременными ценами.

В ограничениях (1) стоит знак нестрогого неравенства. Предположение (8) обеспечивает свойство, по которому для всех собственных равновесий условие (1) выполнено как равенство. Тогда изначально при формулировке задачи можно в (1) писать знак равенства. При положительных терминальных ценах в задаче обмена равновесия останутся теми же самыми. Возможно ли определение равновесия, если какие-то из конечных цен отрицательны?

Равновесием со знакопеременными ценами назовем набор $(\mathbf{p}, \mathbf{c}^n)$, состоящий из цен $\mathbf{p} = \langle \bar{p}(\bar{s}_T) | \bar{s}_T \in \Gamma \rangle \in (\mathbb{R} \setminus 0)^{|\Gamma|} = (\mathbb{R} \setminus 0)^1 \otimes (\mathbb{R} \setminus 0)^S \otimes \dots \otimes (\mathbb{R} \setminus 0)^{S^T}$ и наборов $\mathbf{c}^n, n \in \mathcal{N}$, таких, что:

1) вектор потреблений $\mathbf{c}^n$ принадлежит бюджетному множеству

$$\hat{B}^n(\mathbf{p}) = \{ \mathbf{c}^n | \bar{p}(\bar{s}_{T(i)}) \bar{c}^n(\bar{s}_{T(i)}) = \bar{p}(\bar{s}_{T(i)}) \bar{w}^n(\bar{s}_{T(i)}), i \in I \} \quad (27)$$

и является одним из лучших элементов на этом множестве

$$\mathbf{c}^n \in \hat{M}^n(\mathbf{p}) = \{ \mathbf{c}^n \in \hat{B}^n(\mathbf{p}) | \forall x^n \in \hat{B}^n(\mathbf{p}): \mathbf{c}^n \geq_n x^n \};$$

$$2) \sum_{n \in \mathcal{N}} w^n(\bar{s}_t) \geq \sum_{n \in \mathcal{N}} c^n(\bar{s}_t) \quad \forall \bar{s}_t \subset S.$$

Следует отметить принципиальное отличие от определений собственных и несобственных равновесий, заключающееся в том, что бюджетное ограничение из (27) содержит знак равенства. Тогда возможна ситуация торговли между потребителями даже при отрицательных ценах.

Рассмотрим случай двух потребителей, единичной длины дерева и двух исходов единственной случайной величины. Тогда в задаче три цены — $p(\emptyset), p(1), p(2)$. Из условий первого порядка для задачи Лагранжа, записанной для произвольного потребителя, следует, что

$$\frac{1}{p(\emptyset)} \frac{\partial U^n}{\partial c_0^n} = \pi_1 \frac{1}{p(1)} \frac{\partial U^n}{\partial c_1^n} + \pi_2 \frac{1}{p(2)} \frac{\partial U^n}{\partial c_2^n}.$$

Это исключает вариант знаков цен, когда $\{p(\emptyset) > 0, p(1) < 0, p(2) < 0\}$. Поэтому возможны только случаи, когда $\{p(\emptyset) > 0, p(1) > 0, p(2) < 0\}$, $\{p(\emptyset) > 0, p(1) < 0, p(2) > 0\}$, $\{p(\emptyset) > 0, p(1) > 0, p(2) > 0\}$, и остальные, получающиеся при умножении этих троек на -1 , что не приводит к новым равновесиям.

Рассмотрим случай $\{p(\emptyset) > 0, p(1) > 0, p(2) < 0\}$. Бюджетные ограничения имеют вид:

$$\begin{cases} p(\emptyset)(w''(\emptyset) - c''(\emptyset)) + p(1)(w''(1) - c''(1)) = 0, \\ p(\emptyset)(w''(\emptyset) - c''(\emptyset)) + p(2)(w''(2) - c''(2)) = 0. \end{cases} \quad (28)$$

В задаче с бюджетными ограничениями-неравенствами равновесия с отрицательными ценами не могут существовать, потому что потребитель при отрицательной цене стремится увеличить потребление до бесконечности. Представим, что в (28) $c''(2) \rightarrow \infty$. Тогда в силу равенства во втором ограничении в (28) обязано выполняться условие $c''(\emptyset) \rightarrow \infty$. Но при этом из первого равенства в (28) следует, что $c''(1) \rightarrow -\infty$. Это невозможно ввиду предполагаемого по умолчанию ограничения $c''(\tilde{s}_i) \geq 0$.

Данный пример показывает, что равновесия с отрицательными ценами возможны, если бюджетные ограничения являются ограничениями типа равенств. Вопрос о том, как экономически трактовать бюджетные ограничения, когда потребителя насильно заставляют потратить все деньги, остается без комментариев. В данном случае нас интересует естественное продолжение многообразия равновесий.

На рис. 3 малыми крестами обозначено множество равновесий в плоскости ожидаемых значений функций полезности; кругами — решения задачи благосостояния; квадратами — равновесия задачи со знакопеременными ценами, не являющиеся несобственными равновесиями (т.е. когда наличие отрицательных цен существенно); двумя большими крестами — равновесия с дефолтами. На рис. 3а и 3б изображены ситуации с теми же данными, что и на рис. 2а и 2б, соответственно.

В этом частном, а также и в общем, случае множество равновесий в задаче со знакопеременными ценами задается множеством терминальных цен. Число терминальных цен равно $|I|$, поэтому множество конечных цен можно представить $|I|$ -размерной сферой. Таким образом, множество равновесий (собственных, несобственных и со знакопеременными ценами) задачи в пространстве ожидаемых полезностей — это отображение многомерной сферы в пространство ожидаемых полезностей. Несобственным равновесиям соответствует отображение той части сферы, в которой точки имеют координаты одного знака (т.е. набор терминальных цен одного знака). Мера площади этой части сферы относится к мере площади всей сферы как $2/2^{|I|} = 2^{-(|I|-1)}$. Поэтому в некотором смысле можно сказать, что на одно несобственное равновесие приходится $2^{|I|-1}$ равновесий со знакопеременными ценами, а отношение меры множества несобственных равновесий и равновесий со знакопеременными ценами в плоскости ожидаемых полезностей оценивается как

$$\alpha = 2^{-(|I|-1)}. \quad (29)$$

Что можно сказать про взаимное расположение собственных равновесий, равновесий с дефолтами и равновесий со знакопеременными ценами?

Утверждение 3. *В стохастической модели чистого обмена для случая двух потребителей, единичной длины дерева и двух исходов единственной случайной величины любое собственное равновесие:*

- 1) либо Парето-оптимально среди равновесий со знакопеременными ценами;
- 2) либо доминируется другим собственным равновесием, которое Парето-оптимально среди равновесий со знакопеременными ценами;
- 3) либо доминируется равновесием с дефолтами.

Согласно данному утверждению, если ищется максимум комбинации ожидаемых полезностей в направлении $(a_1, \dots, a_{|N|})$, то, стартуя и перемещаясь только по несобственным равновесиям, мы либо натолкнемся на равновесия с дефолтами, либо выйдем на Парето-границу множества равновесий со знакопеременными ценами. Утверждение исключает случаи, в которых собственное равновесие доминируется равновесием со знакопеременными ценами, не являющимся собственным, но не доминируется каким-либо равновесием с дефолтами. Доказательство утверждения носит достаточно технический характер и в данной статье не приводится. Приведем лишь схему доказательства.

Рассматриваются равновесия со знакопеременными ценами (как решения задачи Лагранжа).

1. Множество равновесий задачи представляет собой непрерывную (быть может, самопересекающуюся) замкнутую кривую.

2. Существуют конечные цены такие, что соответствующее равновесие является равновесием без обмена, т.е. точка $\mathbf{c}^n = \mathbf{w}^n$ — оптимальная.

3. Рассматриваются точки экстремума, т.е. те, для которых $a_1 \Delta EU^1 + a_2 \Delta EU^2 = 0$. Показывается, что для всех экстремальных точек за исключением точки $\mathbf{c}^n = \mathbf{w}^n$ выполнено $a_1 \Delta^2 EU^1 + a_2 \Delta^2 EU^2 < 0$, т.е. единственной точкой локального минимума является точка $\mathbf{c}^n = \mathbf{w}^n$. В силу непрерывности и замкнутости кривой точка локального максимума может быть только одна. Единственность точки локального максимума и означает выполнение гипотезы.

Авторам, к сожалению, не удалось найти подхода к исследованию данного предположения для общего случая.

Отношение α в (29) дает оценку доли случаев, с которой Парето-оптимальная граница множества равновесий со знакопеременными ценами будет достигаться на собственных равновесиях. Если утверждение верно и в общем случае, величина $1 - \alpha$ дает оценку доли случаев, с которой Парето-оптимальная граница множества несобственных равновесий достигается на равновесиях с дефолтами. Величина $1 - \alpha$ с ростом длины дерева и числа исходов случайных величин очень быстро стремится к единице. Например, для случая, когда все пути в терминальные вершины имеют одинаковую длину $T(i) = T^*$, а число исходов всех случайных величин совпадает и равно V , то число терминальных вершин равно V^{T^*} и $1 - \alpha = 1 - 2^{-(V^{T^*} - 1)}$.

9. О ТИПЕ НЕСОБСТВЕННЫХ РАВНОВЕСИЙ И ВОЗМОЖНОСТИ ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В АЛЬТЕРНАТИВНОЙ ФОРМЕ

В данной задаче чистого обмена принципиальным является условие, что все потребители в каждом отдельном равновесии при определении планов придерживаются одних и тех же терминальных цен $p(\tilde{s}_{T(i)})$. Однако в общем случае они могут ориентироваться каждый на свой набор терминальных цен (например, наиболее выгодный для них с точки зрения ожидаемой полезности (рис. 2)). Тогда затруднительно сказать, что представляет собой равновесие их обменов и как согласуются их планы. Рассматриваемый в данной статье тип равновесий можно считать вариантом sunspot-равновесия, но не в чистом виде, поскольку запасы потребителей $w^n(\tilde{s}_i)$ объективно зависят от состояния системы $\tilde{s}_i$.

Посмотрим, что будет происходить в задаче, когда запасы не зависят от случайных величин, т.е. $w^n(\tilde{s}_i) = w_i^n$. Будем считать, что собственники по-прежнему согласованно ориентируются на случайную конечную цену $p(\tilde{s}_{T(i)})$, хотя объективных случайных процессов в физической среде, окружающей участников обмена, не происходит. Именно такие равновесия называются sunspot-равновесиями. В данном случае равновесия также существенно зависят от сигнала $p(\tilde{s}_{T(i)})$ — они реализуют некоторое множество в пространстве ожидаемых полезностей (рис. 4).

Однако среди множества подобных равновесий можно выделить одно равновесие, которое не зависит от случайностей (является детерминированным). Свойство детерминированного равновесия — эффективность. Какому набору цен соответствует детерминированное равновесие лучше объяснить на примере случая с совпадающей для всех путей в терминальные вершины длиной $T(i) = T^*$, $i \in I$: детерминированное равновесие соответствует неслучайному сигналу $p(\tilde{s}_{T(i)}) = p_T = \text{const}$.

Таким образом, в задаче чистого обмена с неслучайными запасами существует множество sunspot-равновесий, одно из которых детерминировано и эффективно. Ситуация на рис. 4 примерно схожа с той, что наблюдается в общем случае в задаче обмена (рис. 3). Однако существенно то, что среди sunspot-равновесий *всегда* существует эффективное, т.е. все множество равновесий “приклеено” к эффективной кривой⁴. В задаче обмена для общего случая эффективная граница достижима каким-то равновесием только, когда число потребителей равно двум⁵, иначе множество равновесий отделяется от эффективной кривой.

Следует также отметить факт, связанный с вопросом о верах участников обмена в терминальные цены. Определение системы сравнительных цен на парах терминальных позиций $\mathcal{P}^{T(I)} = \{P(\tilde{s}_{T(i)}),$

⁴ Упоминание данного факта см. в (Prescott, Shell, 2002, p. 1–10).

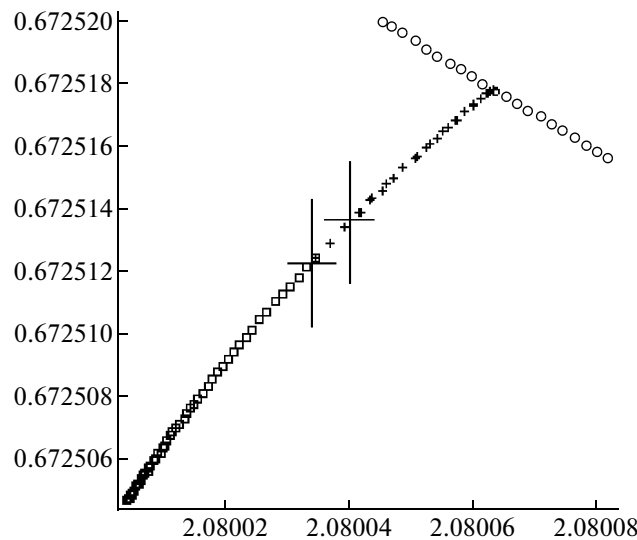


Рис. 4. Множество sunspot-равновесий в задаче чистого обмена.

$\tilde{s}_{T(h)}|i \in I, h \in I\}$, являющейся объектом веры, состоит из определения разбиения терминальных позиций на классы эквивалентности $K_1, \dots, K_L$ и конечных отношений цен внутри классов.

Но вместо того чтобы задавать разбиения терминальных позиций на классы, можно задать набор позиций $S' \subset S$ таких, что при переходе от $\tilde{s}_i$ к $\tilde{s}_i \subset \tilde{s}_{i+1} \subseteq S'$ цена возрастает до бесконечности. Это эквивалентно тому, что дерево всех событий (рис. 1) разбито на поддеревья. Терминальные вершины поддеревьев, согласно свойству 2 из разд. 7, являются подмножеством терминальных вершин I глобального дерева.

Тогда несобственные равновесия можно описать отличным от указанного в данной статье способом: сначала глобальное дерево разбивается на поддеревья, затем к каждому поддереву может быть применено утверждение 1 в силу произвольности рассматриваемого начального дерева (рис. 1), поэтому на каждом из таких поддеревьев структура конечных терминальных цен определяет локальное собственное равновесие.

Однако при таком подходе свойство 1 из разд. 7, состоящее в том, что цены могут только возрастать до бесконечности и не могут падать до нуля, придется постулировать. (Равновесия, когда цены падают до нуля, существуют только в случае допущения знакопеременных цен и бюджетного ограничения со знаком равенства.) Авторы считают, что возможность доказать, а не постулировать необратимость динамики цен оправдывает более громоздкий путь доказательства существования несобственных равновесий.

Итак, в статье был рассмотрен простейший и максимально регулярный вариант модели общего равновесия рациональных ожиданий: однопродуктовая модель чистого обмена с положительными запасами и аддитивными полезностями. Важно, что даже в этом случае появляются равновесия с дефолтами. Конструкции более общего вида вряд ли добавят что-то качественно новое. В модели со многими продуктами терминальные цены на продукты определяются отношениями предельных полезностей с точностью до множителя, который можно будет снова по-разному задавать в различных реализациях (терминальные цены на все продукты, кроме одного выделенного, однозначно определяются произвольной терминальной ценой выделенного продукта). Выделение производства также мало что изменит. Первоначально равновесия с дефолтами были обнаружены именно в модели с производством, и только для упрощения изложения здесь публикуется результат для модели чистого обмена.

⁵ Данный факт требует дополнительного доказательства. С точки зрения теории полных рынков, для одного из потребителей конечная цена является инструментом, с помощью которого этот потребитель подстраивает свое потребление под эффективное. Для второго потребителя эффективность продуктового набора следует из материального баланса. В случае трех и более потребителей конечной цены уже недостаточно, чтобы обеспечить эффективность хотя бы одного равновесия в общем случае.

Полученные результаты, как нам кажется, проливают новый свет на теоретические свойства финансовой системы. Дефолты оказываются не тупиками, а естественными и ожидаемыми явлениями при некоторых сценариях развития.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Ашманов С.А.** (1984): Введение в математическую экономику. М.: Наука.
- Данилов В.И., Сотсков А.И.** (1985): Чистый обмен при меновых стоимостях. Проблема равновесия и принятия экономических решений. М.: ЦЭМИ АН СССР.
- Никайдо Х.** (1972): Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир.
- Поспелов И.Г., Поспелова И.И., Хохлов М.А., Шипулина Г.Е.** (2006): Новые принципы и методы разработки макромоделей экономики и модель современной экономики России. М.: ВЦ РАН.
- Danilov V.I., Sotskov A.I.** (1990): A Generalized Economic Equilibrium // *J. of Math. Econ.* V. 19. Issue 3.
- Magil M., Shafer W.** (1991): Handbook of Mathematical Economics. V. IV. Chap. 30: Incomplete markets. Amsterdam: North-Holland.
- Prescott E., Shell K.** (2002): Introduction to Sunspot and Lotteries // *J. of Econ. Theory.* V. 107. Issue 1.

Поступила в редакцию
08.06.2007 г.

Stochastic Ideal Exchange Model and Actually Infinite Low Prices

M. Yu. Andreev, I. G. Pospelov

Stochastic dynamic ideal exchange model with incomplete markets is considered. It is shown that at the certain realizations of an equilibrium trajectory and at a certain moment a full depreciation of monetary savings (default) occurs.