ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2008, том 44, № 2, с. 121–125

ЗАМЕТКИ И ПИСЬМА

О ДЕКОМПОЗИЦИИ НЕКОТОРЫХ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ*

© 2008 г. С. С. Лебедев

(Москва)

В работах (Лебедев, Седова, 2006; Седова, Лебедев, 2007) описан новый метод дискретной оптимизации, названный декомпозиционным (Д-методом). В нем граф вариантов различными способами разбивается на подграфы. В наиболее “представительных” из них, задающих “достаточно большое” число вариантов, будет предпочтительнее использовать описанные ниже для моделей P_1, P_2, P_3 новые оценки.

Следует ожидать, что эти новые оценки окажутся несколько слабее тех, которые предлагаются в (Седова, Лебедев, 2007, разд. 4). Однако это ослабление компенсируется при расчетах по “представительным” подграфам за счет заметного сокращения числа строящихся вариантов.

1. СПЕЦИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ФИКСИРОВАННЫМИ ДОПЛАТАМИ

Рассматривается задача

$$P_1\colon ry - cx \longrightarrow \max, \tag{1}$$

$$\sum_{j \in J} a_j x_j \le b_0, \quad a^0 x \le b_0, \quad a^0 = (a_j,\ j \in J), \tag{2}$$

$$Ay \le b, \quad A = (a_{ij}), \quad a_{ij} \ge 0, \tag{3}$$

$$0 \le y \le x, \tag{4}$$

$$x \in \{0, 1\}^n. \tag{5}$$

Выделим неравенство (2) с булевыми переменными x_j. После декомпозиции P_1 оно будет определять подзадачу о рюкзаке, все переменные которой булевы. В неравенствах (3), (4) заменим x_j на v_j и включим условия $x_j = v_j, j \in J$, в функцию Лагранжа с множителями w_j (лагранжева декомпозиция, см. (Заславский, Лебедев, 2002, п. 6.2)). В результате получим подзадачу о рюкзаке, все переменные которой целочисленные (булевые). Эту подзадачу обозначим далее как Q_w^x. Условия (3) и (4) включим во вторую подзадачу, релаксировав при этом условия целочисленности (5). Это означает, что условия (5) заменяются на

$$v_j \in [0, 1], \quad j \in J \quad (\text{т.е. } 0 \le v_j \le 1). \tag{6}$$

В результате вторая подзадача будет записана в виде задачи линейного программирования (ЛП), обозначим ее Q_w^{yv}. Выпишем эти две подзадачи:

$$Q_w^x\colon z_1(w) = \max_x \{(w - c)x \mid a^0 x \le b_0;\ x \in \{0, 1\}^n\}, \tag{7}$$

$$Q_w^{yv}\colon z_2(w) = \max_{y,\, v} \{ry - wv \mid Ay \le b,\ 0 \le y \le v,\ 0 \le v_j \le 1, j \in J\}. \tag{8}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00491).

Задачу о рюкзаке (7) решаем с помощью алгоритма динамического программирования (ДП) и находим $z_1(w)$, а задачу (8) – с помощью алгоритма ЛП, определяя функцию $z_2(w)$. Минимизируя по w сумму оценок, получаем

$$z_1(w) + z_2(w) \longrightarrow \min_w. \tag{9}$$

Для задачи P_1 (как и для рассматриваемых ниже задач P_2, P_3) оценку (9) можно вычислять, используя метод уровней (Гольштейн, Немировский, Соколов, 1994). Эти вычисления целесообразно обрывать после проведения небольшого числа итераций, ограничиваясь получением приближенного значения оценки.

2. ЗАДАЧА РАЗМЕЩЕНИЯ P_2

Приведем детализированную запись модели P_2:

$$P_2 : \min_{y,\,x}\left\{\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} r_{ij}y_{ij} + \sum_{i\in I} c_i x_i\right\};\quad I = \{1, \ldots, m\},\quad J = \{1, \ldots, n\}, \tag{10}$$

$$\sum_{j\in J} y_{ij} \le a_i x_i,\quad i \in I, \tag{11}$$

$$\sum_{i\in I} y_{ij} = b_j,\quad j \in J, \tag{12}$$

$$y_{ij} \ge 0,\quad x_i \in \{0, 1\}. \tag{13}$$

Добавим к (10)–(13) рюкзачное неравенство, являющееся следствием условий (11), (12):

$$\sum_{i\in I} a_i x_i \ge \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} y_{ij} = \sum_{j\in J} b_j =: b_0. \tag{14}$$

Неравенство (14) будет использовано для формирования подзадачи о рюкзаке (15), а (11), (12) – для подзадачи ЛП (16).

Введем новые переменные v_i, $i \in I$, и включим условия $x_i = v_i$ в функцию Лагранжа (лагранжева декомпозиция целочисленных переменных, см. (Заславский, Лебедев, 2002, п. 6.2)). Подзадачу о рюкзаке (15) построим, включив в нее слагаемые $w_i x_i$, а в подзадачу ЛП (16) – слагаемые $w_i v_i$ и заменив условие $v_i \in \{0, 1\}$ на $0 \le v_i \le 1$ (релаксация условий целочисленности). В результате получим подзадачи:

$$Q_w^x : z_1(w) = \min_x\left\{\sum_{i\in I}(c_i - w_i)x_i \,\Big|\, \sum_{i\in I} a_i x_i \ge b_0;\ x_i \in \{0, 1\},\ i \in I\right\}, \tag{15}$$

$$Q_w^{yv} : z_2(w) = \max_{y,\,v}\left\{\sum_{ij} r_{ij}y_{ij} + \sum_{i\in I} w_i v_i \,\Big|\, \sum_{i\in I} y_{ij} = b_j, j \in J;\ \sum_{j\in J} y_{ij} \le a_i v_i,\ 0 \le v_i \le 1,\ i \in I\right\}. \tag{16}$$

Как и в разд. 1, оценка вычисляется по формуле

$$z_1(w) + z_2(w) \longrightarrow \min_w. \tag{17}$$

Будем называть w-декомпозицией описанные в разд. 1, 2 процедуры разбиения задач P_1, P_2 на подзадачи о рюкзаке Q_w^x и подзадачи ЛП Q_w^{yv}. В обоих случаях для w-декомпозиции были использованы оценки лагранжевой декомпозиции (Заславский, Лебедев, 2002, п. 6.2), более сильные, чем оценки лагранжевой релаксации (Заславский, Лебедев, 2002, п. 6.1).

3. ОБЩАЯ ЗАДАЧА ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассмотрим задачу:

$$P_3 : \sum_{j \in J} c_j x_j \longrightarrow \max, \quad J = \{1, \dots, n\}, \tag{18}$$

$$a^k x \le b_k, \quad k \in K, \quad K = \{1, \dots, \bar{k}\}, \tag{19}$$

$$x \in \{0, 1\}^n. \tag{20}$$

Релаксируем условия целочисленности X, заменив (20) на

$$0 \le y_j \le 1, \quad j \in J. \tag{21}$$

W-декомпозиция, описанная в разд. 1, 2, не подходит для модели (18)–(20). Дело в том, что в P_1, P_2 естественным образом выделяется подзадача о рюкзаке. Вхождение переменных x_j в каждое неравенство (19) не позволяет использовать модель P_3 для вычисления оценки.

Для построения подзадачи о рюкзаке для модели P_3 предлагаем предварительно образовать специальным образом **заменяющее неравенство** (Заславский, Лебедев, 2002, п. 6.3). Для этого предварительно релаксируем условие (20) целочисленности вектора x, заменив их на (21). После этого решим задачу ЛП, определяемую условиями (18), (19) при $x^k = y^k$, где $0 < y_j < 1, j \in J$. Пусть $\tilde{\lambda}$ – оптимальное решение двойственной к ЛП задачи (ДЛП). Добавим к (19) заменяющее ограничение

$$\tilde{\lambda}_k(a^k x) \le \sum_{k \in K} \tilde{\lambda} b_k$$

и запишем получающуюся задачу, которая определяет оценку для P_3 в виде двух подзадач – подзадачи о рюкзаке

$$Q^x : z_1 = \max\left\{\sum_{j \in J}(c_j - w_j)x_j \middle| \sum_{k \in K} \tilde{\lambda}_k(a^k x) \le \sum_{k \in K} \tilde{\lambda} b_k,\ x \in \{0, 1\}^n\right\}$$

и подзадачи ЛП

$$Q^{y\triangledown} : z_2 = \max\left\{\sum_{j \in J} w_j y_j \middle| a^k y \le b_k,\ k \in K;\ 0 \le y^j \le 1, j \in J\right\}.$$

Эти подзадачи задают для P_3 оценку, равную

$$z_1 + z_2. \tag{22}$$

По примеру задач P_1, P_2, P_3 можно будет проводить w-декомпозицию структурно близких к ним задач. В качестве примера приведем одну из трех моделей Г.М. Татевосяна (см. (Седова, 2007)), w-декомпозиция "упрощенной" постановки которой описывается в разд. 4. Упрощение связано с введением дополнительного условия

$$x_j \text{ – целые}, \quad j \in J_1 \subset J.$$

Их учет достаточно просто реализуется, однако излишне перегружает изложение метода. В связи с этим в разд. 4 описание ведется для случая $x_j \in \{0, 1\}, j \in J$.

4. МОДЕЛЬ T_2 (УПРОЩЕННАЯ)

Запишем T_2 в "развернутом" виде

$$T_2 : \max \sum_{j \in J} c_j x_j, \quad J = 1, \ldots, n;$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij}^t x_j \le y_i^t, \quad I = 1, \ldots, m, \quad t \in T = 1, \ldots, \bar{t}; \tag{23}$$

$$\sum_{j \in J} r_{lj} x_j \le b_l, \quad l \in L_1 = \{1, \ldots, l_1\}; \tag{24}$$

$$\sum_{j \in J} r_{lj} x_j \ge b_l, \quad l \in L_1 = \{l_1 + 1, \ldots, l_2\}; \tag{25}$$

$$\underline{d}_{it} \le y_i^t \le \bar{d}_{it}, \quad i \in I, \quad t \in T;$$

$$x_j - \text{целые}, \quad j \in J.$$

В "исходной" модели $T_2^{\text{исх}}$

$$x_j - \text{целые}, \quad j \in J_1 \subset J.$$

Модель T_2 обобщает особенности моделей P_2 и P_3. В неравенства (23) входят как непрерывные переменные y_i^t, так и целочисленные $x_j, j \in J$. В связи с этим для T_2 описывается схема w-декомпозиции, в которой сочетаются черты моделей P_2 (разд. 2) и P_3 (разд. 3).

Как и в разд. 2, для построения оценочной задачи ЛП вида Q_w^{yv} (16) обозначим через $v_j, j \in J$, целочисленные переменные $x_j, j \in J$, и включим условия $x_j = v_j, j \in J$, в функцию Лагранжа с множителями $w_j, j \in J$. В результате получим оценочную подзадачу

$$\max_{y,\, v} \left\{ \sum_{j \in J} w_j v_j \middle| \sum_{j \in J} a_{ij}^t v_j \le y_i^t,\ i \in I,\ t \in T;\ \underline{d}_{it} \le y_i^t \le \bar{d}_{it},\ i \in I,\ t \in T;\ v_j - \text{целые},\ j \in J \right\},$$

в которой релаксируем условия целочисленности переменных, заменив условие

$$v_j - \text{целые}, \quad j \in J,$$

на

$$\underline{h}_j \le v_j \le \bar{h}_j, \quad j \in J.$$

В результате подзадачу ЛП можно переписать в виде

$$Q_w^{yv} : z_1(w) = \max_{yv} \left\{ \sum_{j \in J} w_j v_j \middle| \sum_{j \in J} a_{ij}^t v_j \le y_i^t,\ i \in I,\ t \in T;\ \underline{d}_{it} \le y_i^t \le \bar{d}_{it},\ i \in I,\ t \in T;\ \underline{h}_j \le v_j \le \bar{h}_j,\ j \in J \right\}. \tag{26}$$

В отличие от P_3 для T_2 приходится строить две задачи о рюкзаке. Это связано с тем, что знаки неравенств (24) и (25) противоположны. Поэтому сложение неравенств, часть которых в (24), а другая часть в (25), приводит к ослаблению оценки. Приходится изменить схему построения оценки $Z_2(w)$ и строить две подзадачи о рюкзаке. В одну из них будем включать неравенства только из (24), а в другую – неравенства из (25). Соответствующим образом меняются правила, используемые при учете заменяющих ограничений. Обозначим задачу о рюкзаке, строящуюся исходя из (24) через $Q_w^x(\le 0)$, тогда коэффициенты заменяющего ограничения $\tilde{\lambda}^1$ будем определять исходя из $\tilde{\lambda}^1 = Opt\text{ДЛП}_{\ge 0}$. По аналогии, для $Q_w^x(\ge 0)$ имеем $\tilde{\lambda}^2 = Opt\text{ДЛП}_{\ge 0}$.

Подзадачи о рюкзаке задают оценки

$$Q_w^x(\le 0) : z_2(w) \;=\; \max\left\{\sum_{j \in J}(c_j x_j - w_j x_j) \mid \sum_{l \in L_1} \tilde{\lambda}_l^1 (r_{lj} x_j) \le \sum_{l \in L_1} \tilde{\lambda}_l^1 b_l,\; x_j - \text{целые},\, j \in J\right\}, \tag{27}$$

$$Q_w^x(\ge 0) : z_3(w) \;=\; \max\left\{\sum_{j \in J}(c_j x_j - w_j x_j) \mid \sum_{l \in L_2} \tilde{\lambda}_l^2 (r_{lj} x_j) \le \sum_{l \in L_2} \tilde{\lambda}_l^2 b_l,\; x_j - \text{целые},\, j \in J\right\}. \tag{28}$$

А подзадачи (26) , (27), (28) определяют для T_2 оценку, равную

$$z(w) := z_1(w) + \max(z_2(w), z_3(w)).$$

Для вычисления $z(w)$ целесообразно использовать метод уровней, обрывая его после проведения небольшого числа итераций, ограничиваясь получением приближенного значения оценки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Гольштейн Е.Г., Немировский А.С., Соколов Н.А. (1994): Новый алгоритм двойственной декомпозиции с приложением к задачам транспортного типа // *Экономика и мат. методы.* Т. 30. Вып. 2.

Заславский А.А., Лебедев С.С. (2002): Метод узловых векторов целочисленного программирования. Часть 3. Новая вычислительная схема и ее приложения. Препринт #WP/2002/148. М.: ЦЭМИ РАН.

Лебедев С.С., Седова С.В. (2006): Декомпозиционный метод целочисленного программирования // *Экономика и мат. методы.* Т. 42. Вып. 3.

Седова С.В., Лебедев С.С. (2007): Декомпозиционный метод дискретной оптимизации. Часть 1. Подходы к построению декомпозиционных алгоритмов. Препринт # WP/2007/218. М.: ЦЭМИ РАН.

Седова С.В. (2007): Компьютерная поддержка разработки, анализа и корректировки межрегиональных экономических программ. В сб. “*Механизм обоснования межрегиональных экономических программ и смежные вопросы*”. М.: ЦЭМИ РАН (в печати).

Поступила в редакцию
14.09.2007 г.