ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2008, том 44, № 3, с. 62–78

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

© 2008 г. **А. А. Акаев**

(Москва)

Получено общее дифференциальное уравнение, описывающее совместное взаимодействие долгосрочного экономического роста и циклических колебаний деловой активности. Уравнение содержит встроенный нелинейный акселератор инвестиций, поддерживающий незатухающие колебания в экономике. Предложена схема приближенного решения нелинейного уравнения макроэкономической динамики путем разделения быстроколеблющихся деловых циклов и медленноменяющейся траектории тренда с помощью метода усреднения Крылова–Боголюбова–Митропольского.

1. ОБЗОР МОДЕЛЕЙ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Центральное место в современной макроэкономической динамике принадлежит теории долгосрочного экономического роста и теории деловых циклов (бизнес-циклов). Экономический рост является классическим предметом экономики, восходящим к А. Смиту, Д. Рикардо, Т. Мальтусу, К. Марксу и другим. Основы современной теории роста заложил лауреат Нобелевской премии Р. Солоу, создав неоклассическую модель экономического роста (Solow, 1956, p. 65), которая позволила изучить влияние экзогенных факторов роста, таких как норма сбережения, темпы роста населения и технического прогресса, а также выявить условия устойчивого сбалансированного роста. Дальнейшее развитие теории роста связано с разработкой Р. Лукасом (Lucas, 1988) моделей эндогенного роста путем введения в базовую модель Солоу человеческого капитала, накопление которого на основе образования и обучения в процессе деятельности служит источником непрерывного роста, наряду с техническим прогрессом, а также продукта инвестиций в НИОКР (Romer, 1986). Все это привело к существенному улучшению моделей роста и их соответствию эмпирическим данным, что вызвало мощную волну теоретических исследований и практических разработок.

Основным недостатком неоклассической модели Солоу является декларирование существования экзогенного технического прогресса, никак не связанного с действиями экономических субъектов, который объясняет до 75% реального темпа роста. Включение знаний и НИОКР в производственную функцию в эндогенных моделях роста также не решает всех проблем.

Альтернативная эволюционная теория роста, лишенная указанного основного недостатка неоклассических моделей, была предложена Р. Нельсоном и С. Уинтером (Нельсон, Уинтер, 2002). Они разработали дискретные эволюционные модели экономического роста, основанные на шумпетерианской конкуренции путем поиска и отбора инноваций, которые в полной мере учитывают тот факт, что эта конкуренция протекает в условиях продолжительного неравновесия. Отбор и поиск у эволюционистов заменяют принципы равновесия и максимизации прибыли у неоклассиков. Они полагают, что “правила принятия решений” связаны с поиском новых технологических возможностей, инноваций, причем конкуренция рассматривается как процесс “естественного отбора”. Они также привели эмпирические подтверждения того, что экономический рост нельзя объяснить лишь движением вдоль производственной функции, так как сама функция должна также смещаться при появлении новых производственных возможностей. Эволюционная теория использует микроэкономические механизмы роста, поэтому отпадает необходимость в производственной функции. Поскольку модель оказалась достаточно сложной, она была реализована в виде компьютерной имитационной модели. В результате моделирования было выявлено, что эволюционная модель более полно отражает технологические изменения, что в большей степени соответствует реальным эмпирическим данным.

Значительную роль в развитии современной теории деловых циклов (бизнес-циклов) сыграли работы А. Бернса, У. Митчелла, Й. Шумпетера, П. Самуэльсона, Дж. Хикса, А. Филлипса, Р. Гудвина и других. А. Бернс и У. Митчелл предприняли первую серьезную попытку определить разницу между трендом и циклом (Burns, Mitchell, 1946). Одна из центральных гипотез, лежащих в основе подхода Бернса и Митчелла к исследованию бизнес-циклов, состояла в том, что динамику рядов выпуска обусловливает экономический рост, известный как возрастающий тренд, а циклы деловой активности представляют собой колебания вокруг тренда. Было установлено, что тренд есть результат действия факторов, формирующих долговременный рост экономики – уровня сбережений, прироста трудовых ресурсов, технологических сдвигов и т.п. Практически все исследователи согласны с тем, что факторы, определяющие вид делового цикла, почти не влияют на формирование долговременного экономического тренда. Й. Шумпетер рассматривал циклы как отклонения от состояния равновесия, вызванные инновационными шоками, "как серьезные нарушения экономического кругооборота, без которых не было бы вообще экономического роста" (Шумпетер, 1982). Изящные математические модели для анализа бизнес-циклов были получены с использованием различных вариантов акселератора инвестиций и мультипликатора потребления, которые стали называться "кейнсианскими моделями". Наиболее полная формулировка взаимодействия мультипликатора и акселератора в дискретной форме впервые была дана П. Самуэльсоном (Samuelson, 1939, p. 786) и позднее развита Дж. Хиксом (Hicks, 1950). Основная предпосылка модели Самуэльсона–Хикса состоит в осуществлении планов потребления и капиталовложений. Следовательно, остается открытой возможность непредвиденных сбережений, что придает модели необходимую гибкость. Модель включает линейную функцию потребления и линейный акселератор с дискретно распределенным запаздыванием. А. Филлипс (Phillips, 1954) разработал непрерывную модель, взяв непрерывно распределенные запаздывания спроса на потребительские товары и элементы капиталовложений. В отличие от модели Самуэльсона–Хикса А. Филлипс рассматривает спрос и предложение отдельно. Планы потребления и капиталовложений в сумме образуют совокупный спрос, а предложение с дальнейшим запаздыванием приспосабливается к спросу. Модель Филлипса оказалась наиболее гибкой и плодотворной, она лучше отражает реальные динамические процессы, протекающие в экономической системе. Именно поэтому она легла в основу всех последующих разработок, связанных с реализацией практической политики экономического регулирования и стабилизации.

Ограниченность моделей Самуэльсона–Хикса и Филлипса состоит в их линейности, что справедливо для малых мощностей акселератора, тогда как в реальных деловых циклах решающую роль играет нелинейное взаимодействие основных переменных, в частности нелинейный акселератор. Именно нелинейный акселератор позволяет удерживать взрывные колебания, возникающие в экономической системе с большой мощностью акселератора, в ограниченных пределах. Дж. Хикс прекрасно понимал важность нелинейных факторов для возникновения незатухающих циклических колебаний в экономике, поэтому он дополнил свою модель мультипликатора–акселератора внешними факторами, определяющими ее верхний и нижний пределы. Он предполагал, что мощность акселератора достаточно велика для возникновения собственных симметричных колебаний взрывного типа. Дж. Хикс считал, что главной причиной циклических колебаний в экономике является акселератор инвестиций.

Наиболее удачную нелинейную модель разработал Р. Гудвин (Goodwin, 1951, p. 1), основываясь на некоторых особенностях модели Филлипса, он встроил нелинейный элемент в систему взаимодействия мультипликатора–акселератора. Модель Гудвина включает запаздывания двух типов: со стороны спроса на капиталовложения – отставание с фиксированной продолжительностью действия акселератора, а со стороны предложения – непрерывно распределенное запаздывание. В результате получается колебательное движение, которое совершенно не зависит от внешних факторов или начальных условий (что характерно для нелинейных колебательных систем).

Анализ кейнсианских моделей убедительно показал, что, во-первых, динамика циклических колебаний определяется главным образом запаздываниями и нелинейностью или обоими факторами сразу, причем основную роль играет нелинейность акселератора инвестиций. Во-вторых, взаимодействие мультипликатора–акселератора служит необходимым механизмом распространения циклических колебаний после изменения индуцированных инвестиций. Кейнс и его последователи совершенно справедливо считали главным источником импульсов, порождающих экономические колебания, изменения автономных инвестиционных расходов.

Как только выяснилось, что деловые циклы не демонстрируют той регулярности и симметрии, которая необходима для использования детерминистских кейнсианских моделей, возобладал подход, при котором циклы рассматриваются как следствия последовательно возникающих случайных толчков (шоки, сдвиги), называемых импульсами, на экономическую систему, что и вызывает циклическую модель отклика. Естественно, что каждый из такого рода импульсов распространяется в экономике благодаря механизму взаимодействия мультипликатора и акселератора. Причем благоприятный шок может вызвать увеличение текущего выпуска. Хотя основы анализа циклов деловой активности как отклика экономики на случайные шоки были заложены российским ученым Е. Слуцким еще в 1927 г. (Слуцкий, 1927, с. 34), дальнейшие попытки развития данного подхода были предприняты лишь в 1970-е годы. Этот подход, получивший широкую известность как модель реального делового цикла, исходит прежде всего из идей Й. Шумпетера, полагавшего, что для капитализма характерны волны “созидательного разрушения”, во время которых непрерывное введение различных инноваций и технологических новшеств постоянно выталкивает неконкурентоспособные компании из бизнеса (Шумпетер, 1982). Таким образом, сторонники теории реального делового цикла (РДЦ) полагают, что циклические колебания возникают как результат случайных технологических шоков (Plosser, 1988; Prescott, 1986), а в общем случае – шоков предложения, непосредственно воздействующих на производственную сторону экономической системы. Случайные шоки выводят экономику из устойчивого состояния равновесия и вызывают цепную реакцию во всей экономической системе, приводящую к циклическим колебаниям. Идея о том, что основной источник колебания деловой активности следует искать в шоках спроса или в политических шоках, таких как изменения денежного предложения, отвергается сторонниками теории РДЦ. РДЦ оказалась плодотворной, воспринимающей экономическую систему как “черный ящик”, получающий шоковые импульсы на входе и преобразующий их в деловые циклы на выходе. Главным недостатком моделей РДЦ является основное предположение теории, которое состоит в том, что шоки производительности могут быть как положительными, так и отрицательными, т.е. возможен как технический прогресс, так и технический регресс. Более того, в рамках данной теории именно отрицательные шоки вызывают рецессии, что выглядит искусственным и порождает серьезные сомнения. Ведь технические достижения обычно используются до тех пор, пока не замещаются еще более совершенной техникой.

Теория РДЦ стала господствующим подходом к осмыслению деловых циклов, поскольку она хорошо согласуется с так называемыми стилизованными фактами, полученными на основе анализа доступных эмпирических данных и присущими всем деловым циклам во всех странах. Приведем наиболее важные стилизованные факты (см. (Туманова, Шагас, 2004, с. 276)):

1) в развитых странах темпы роста реального ВВП испытывают повторяющиеся, но нерегулярные колебания с продолжительностью цикла в среднем 5–8 лет;

2) амплитуда делового цикла, измеренная относительно среднего ВВП и относительно процесса экономического роста, невелика и обычно составляет 2–5%; она порождается исключительно внутренними свойствами экономической системы;

3) деловые циклы несимметричны; подъем по продолжительности имеет тенденцию быть длиннее спада в 2–3 раза.

Действительно, поскольку шоки предложения случайны, они порождают циклы различной продолжительности и амплитуды, на что указывают стилизованные факты 1 и 2. Факт 3 теоретически может быть реализован только при учете в модели нелинейной связи между переменными. Если многие шоки связаны с технологическими нововведениями, они не только вызывают циклы, но и в длительном периоде накапливаются, обусловливая процесс долгосрочного экономического роста. Принято считать, что хорошая теория делового цикла – это теория, которая может повторить ключевые стилизованные факты, приведенные выше.

Главным недостатком рассмотренных выше математических моделей экономического роста и деловых циклов является изолированное рассмотрение роста и циклических колебаний друг от друга, тогда как из теории Шумпетера вытекает, что циклические колебания – это составная часть долгосрочного экономического роста. Более того, Р. Нельсон и Ч. Плоссер показали (Nelson, Plosser, 1982, p. 139), что большинство изменений, происходящих в ВВП, являются постоянными и не исчезают со временем, поэтому отсутствует тенденция возвращения выпуска к неизменному тренду. Это означает, что происходит смещение самого тренда выпуска, что противоречит основной гипотезе Бернса и Митчелла о разграничении между трендом и циклическими колебаниями.

Циклы деловой активности представляют собой отклонения реального совокупного выпуска от своего долгосрочного тренда. Таков основной вывод фундаментальной работы Нобелевского лауреата Р. Лукаса “Понимание экономических циклов” (Lucas, 1977, p. 7). На основе идей Лукаса сформировалась новая концепция теории циклов роста. Отсюда следует, что изолированное изучение экономического роста и циклических колебаний является серьезной ошибкой. Следовательно, тренд маскирует колебания, которые представляют большой интерес при исследовании деловых циклов. Для того чтобы выделить эти колебания, необходимы математические модели, описывающие совместное взаимодействие долгосрочного роста и деловых циклов, которые позволяли бы разделить их. Разработка такой модели и стала предметом настоящей работы.

Основы теории реальных деловых циклов были заложены в 1980-е годы Э. Кюдландом и Э. Прескоттом (Kydland, Prescott, 1982, p. 1345) и с тех пор остаются базовыми в макроэкономическом компьютерном моделировании. Э. Кюдланд и Э. Прескотт поставили своей целью объединить теорию экономического роста с теорией деловых циклов. Разработанная ими дискретная модель делового цикла, базирующаяся на стохастической динамической модели общего равновесия, включала также стохастическую версию неоклассической модели экономического роста Солоу. Они показали, что технологические шоки, т.е. резкие краткосрочные отклонения от положительного тренда технологического развития, определяющего рост экономики в долгосрочной перспективе, являются причиной колебаний совокупного выпуска. Они также доказали, что эффект долгосрочного роста есть следствие краткосрочных циклических воздействий. Отсюда вытекает, что технический прогресс становится основным фактором не только долгосрочных изменений в экономике, но и краткосрочных колебаний уровня выпуска – в силу того, что технологическое развитие неравномерно во времени. За разработку нового подхода к численному моделированию циклов деловой активности и макроэкономической динамики Э. Кюдланд и Э. Прескотт были удостоены Нобелевской премии 2004 г. по экономике.

В настоящей работе предпринята попытка возродить аналитические методы исследования экономических колебаний путем объединения обоих подходов – стохастического и детерминистского. Первый дает описание случайных входных импульсов, второй раскрывает механизм распространения этих импульсов, а также запаздывания и нелинейности, которые определяют незатухающие циклические колебания, наблюдаемые в экономике. Современная экономическая система, основанная на частном предпринимательстве и свободной конкуренции, есть нелинейная система с обратной связью, что невозможно отразить в модели, не учитывая запаздывания и взаимодействия мультипликатора и акселератора. Наличие положительной обратной связи делает устойчивым состояние продолжительного неравновесия, в котором пребывает современная динамичная экономика.

2. ВЫВОД ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ, ОПИСЫВАЮЩЕГО СОВМЕСТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДОЛГОСРОЧНОГО РОСТА И ДЕЛОВЫХ ЦИКЛОВ

Приступим к выводу общего уравнения макроэкономической динамики, следуя схеме, избранной в свое время А. Филлипсом (Аллен, 1963, § 3.5, с. 81). В этой схеме предполагается, что реализуются плановые величины потребления и капиталовложений. Мы также придерживаемся этой предпосылки, поскольку она оказывается экономически наиболее значимой. Следовательно, планы потребления и капиталовложений с запаздыванием превращаются в фактические затраты, дающие в сумме выпуск продукции. А. Филлипс обосновал, что наиболее подходящей формой запаздывания является показательная форма запаздывания. Соответствующее непрерывное распределение запаздывания имеет вид $f(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}$. Что же касается сбережений, то относительно них допускается возможность непредвиденных сбережений, что вносит гибкость в динамическую модель. Следует помнить, что по определению фактические сбережения и капиталовложения равны, т.е. $S = I$.

Если выделить автономные (не зависящие от дохода) расходы на капиталовложение и потребление, не зависящие от дохода, то основное условие равновесия можно записать в виде:

$$Y = C + I + A. \tag{1}$$

Здесь C – потребление; I – фактические индуцированные капиталовложения; А – независимые инвестиции. Поскольку I представляет собой фактические индуцированные капиталовложения в момент времени t, вызванные изменениями в выпуске продукции и запаздыванием в виде показательной функции, они удовлетворяют дифференциальному уравнению запаздывания:

$$dI/dt = -\kappa[I(t) - J(t)], \tag{2}$$

где $J(t)$ – потенциальный объем капиталовложений, κ – скорость реакции запаздывания. Временна́я постоянная запаздывания $T = 1/\kappa$.

Суть данного уравнения заключается в том, что скорость возрастания капиталовложений dI/dt всегда пропорциональна разности $-[I(t) - J(t)]$ фактического I и потенциального объемов капиталовложений J. Функциональную связь между индуцированными капиталовложениями и

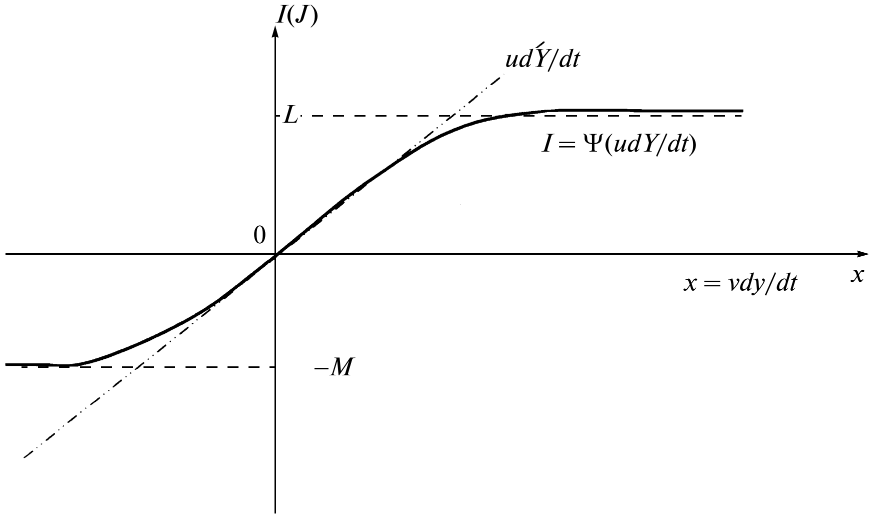

Рис. 1. Нелинейный акселератор по Гудвину.

изменениями выпуска продукции принято называть акселератором. В общей форме акселератор без запаздывания можно записать по Гудвину следующим образом (Аллен, 1963, § 7.3, с. 196): $J(t) = \Psi\{dY(t)/dt\}$, где Ψ – нелинейная функция, подходящая форма которой показана на рис. 1. Здесь акселератор выступает как зависимость между объемом решений о капиталовложениях $J(t)$ и текущей скоростью изменения выпуска продукции dY/dt. Для малых изменений выпуска действует акселератор в линейной форме $J = vdY/dt$, где v – положительная постоянная, коэффициент инвестиций, указывающий мощность акселератора. При значительном увеличении выпуска уровень J повышается до верхнего предела L, ограничиваемого наличными мощностями отраслей, производящих капитальное оборудование. При большом сокращении выпуска J понижается до нижнего предела ($-M$), ограничиваемого нормой износа основного капитала. Между фактическими капиталовложениями и решениями об инвестициях имеется запаздывание, которое Р. Гудвин в отличие от А. Филлипса в целях упрощения ввел в форме фиксированного отставания (Аллен, 1963, § 7.3, с. 197):

$$I(t) = J(t-\theta) = \Psi\left\{v\frac{d}{dt}Y(t-\theta)\right\}.$$

Установим конкретное выражение нелинейной функции $\underline{\Psi}$. Кривая на рис. 1 представляет искомую функциональную зависимость и является логистической кривой, она описывается логистическим уравнением, которое известно также как уравнение Ферхюльста (Безручко, Короновский и др., 2005, с. 85):

$$\frac{dJ}{dx} = k(J+\varepsilon)(1-\varepsilon-J), \tag{3}$$

где $x = vdY/dt$, $\varepsilon = M/(L + M)$. Решая данное уравнение с разделяющимися переменными для наиболее важного симметричного случая, когда $\varepsilon = 0.5$, получаем $J = 0.5\,\mathrm{th}(0.5kx)$. Гиперболический тангенс в правой части имеет разложение в ряд (Двайт, 2005, с. 132):

$$\mathrm{th}z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{2}{15}z^5 - \ldots,$$

которое сходится при $z^2 < 0.25\pi^2$ или $|z| < 0.5\pi$. Ограничиваясь первыми двумя членами данного ряда, будем иметь приближенное выражение для нелинейного акселератора по Гудвину:

$$J \cong \frac{k}{4}\left[1 - \frac{k^2}{12}x^2\right]x.$$

Поскольку для малых значений простейшего (линейного) акселератора $x = vdY/dt$ имеет место $I \cong x$, отсюда следует, что $k = 4$, аппроксимация для нелинейного (гибкого) акселератора имеет вид:

$$J \cong \left[1 - \frac{4}{3}\left(v\frac{dY}{dt}\right)^2\right] v\frac{dY}{dt} \tag{4}$$

при условии, что $|vdY/dt| < 0.25\pi$. Легко показать, что в реальной экономике последнее условие почти всегда выполняется.

Вернемся к основному условию равновесия. Поскольку запаздывания спроса отсутствуют, а планируемое потребление $C = cY = (1 - s)Y$, где c и s – коэффициенты потребления и сбережений, то совокупный спрос будет равен

$$Z = (1-s)Y + I + A. \tag{5}$$

Предложение также берется с непрерывно распределенным запаздыванием показательной формы и скоростью реакции λ:

$$dY/dt = -\lambda(Y - Z). \tag{6}$$

Уравнения (2), (5) и (6) являются уравнениями модели для реальной экономической системы. Модель имеет два непрерывно распределенных запаздывания: одно – на стороне предложения (реакция выпуска продукции на спрос со скоростью λ), второе – на стороне акселератора (индуцированные капиталовложения реагируют на изменение выпуска продукции со скоростью κ). Чтобы получить дифференциальное уравнение относительно выпуска Y, необходимо исключить Z и I из уравнений модели. С этой целью подставим (5) в (6), учитывая, что в (5) стоят потенциальные или ожидаемые (Y^e, I^e) величины всех переменных, т.е.

$$Z = (1-s)Y^e + I^e + A^e.$$

Поскольку $A^e = A$ как заданные независимые инвестиции, а $I^e = I$ согласно принятой предпосылке модели, в результате имеем:

$$dY/dt = -\lambda[Y - (1-s)Y^e - I - A].$$

Разрешив последнее уравнение относительно I и дифференцируя полученное выражение, запишем:

$$I = \frac{1}{\lambda}\frac{dY}{dt} + Y - (1-s)Y^e - A; \quad \frac{dI}{dt} = \frac{1}{\lambda}\frac{d^2Y}{dt^2} + \frac{dY}{dt} - (1-s)\frac{dY^e}{dt} - \frac{dA}{dt}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (2), получаем дифференциальное уравнение относительно выпуска Y:

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d^2Y}{dt^2} + \left\{1 + \frac{\kappa}{\lambda} - \kappa v\left[1 - \chi\frac{4}{3}\left(v\frac{dY}{dt}\right)^2\right]\right\}\frac{dY}{dt} - (1-s)\frac{dY^e}{dt} + \kappa Y - \kappa(1-s)Y^e = \frac{dA}{dt} + \kappa A. \tag{7}$$

Здесь введена постоянная χ, которая принимает лишь два значения – 0 или 1. При $\chi = 0$ имеем классическую модель Филлипса с линейным акселератором, а при $\chi = 1$ получаем модель Филлипса со встроенным нелинейным акселератором в форме Гудвина.

Если в уравнении (7) принять $Y = Y^e$, что является грубым приближением, так как доход Y есть непланируемая величина, а также положить $\chi = 0$ и $A = \text{const}$, то получим известное уравнение Филлипса (Аллен, 1963, § 3.5, с. 82):

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + (\lambda s + \kappa - \kappa\lambda v)\frac{dY}{dt} + \kappa\lambda s Y = \kappa\lambda A. \tag{8}$$

В отличие от А. Филлипса и Р. Гудвина внесем в уравнение (7) выражение для потенциального (или ожидаемого) значения выпуска Y^e, определяемого через основные производственные факторы – капитал K и труд L. Как известно, связь выпуска с факторами производства описывается производственной функцией (Столерю, 1974, § 11.2, с. 307) вида $\bar{Y} = F(K, L)$, которая представляет собой траекторию долгосрочного экономического роста и подчиняется уравнению производственной функции

$$aK\frac{\partial \bar{Y}}{\partial K} + bL\frac{\partial \bar{Y}}{\partial L} = h\bar{Y}, \tag{9}$$

где a, b и h – постоянные коэффициенты.

Итак, из уравнения (9) следует требуемое приближенное выражение для ожидаемого значения выпуска Y^e:

$$Y^e \cong \bar{Y} = \frac{a}{h}K\frac{\partial \bar{Y}}{\partial K} + \frac{b}{h}L\frac{\partial \bar{Y}}{\partial L}. \tag{10}$$

Очевидно, что данное приближение является более точным, нежели грубое допущение Филлипса–Гудвина ($Y^e = Y$). Но главное достоинство такого подхода состоит в том, что он дает возможность ввести в основное уравнение производственные факторы. Дифференцируя по времени данное выражение и проводя необходимые упрощения, получим:

$$\frac{dY^e}{dt} = \frac{\partial \bar{Y}}{\partial K}\frac{dK}{dt} + \frac{\partial \bar{Y}}{\partial L}\frac{dL}{dt}. \tag{11}$$

Теперь нам необходимо установить функциональные зависимости производных от капитала dK/dt и труда dL/dt, входящего в выражение (11). В первом случае можно воспользоваться широко известным уравнением инвестиций, описывающим накопление капитала (Столерю, 1974, § 13.2, с. 375):

$$\frac{dK}{dt} = I(t) - \mu K(t) = sY(t) - \mu K(t), \tag{12}$$

где μ – коэффициент выбытия капитала. Во втором случае применим закон Оукена, устанавливающий связь между величиной циклической или конъюнктурной безработицы $(u - u^*)$ и конъюнктурным разрывом в выпуске $(Y_F - Y)$:

$$(Y_F - Y)/Y_F = \gamma(u - u^*), \tag{13}$$

где γ – параметр Оукена; $Y_F(L^*)$ – национальный доход при полной занятости; $Y(L)$ – фактический объем выпуска при наличии конъюнктурной безработицы; L^* – численность рабочих при полной занятости; L – фактическая численность рабочих, занятых в производстве; u^* – естественный уровень безработицы, соответствующий полной занятости L^*; u – фактический уровень безработицы. Поскольку $u - u^* = (L^* - L)/L^*$, то из соотношения (13) вытекает $Y_F - Y = \gamma^*(L^* - L)$, где $\gamma^* = \gamma Y_F/L^*$, Y_F/L^* – производительность труда при полной занятости. Дифференцируя обе части последнего соотношения, получаем требуемое соотношение:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{\gamma^*}\frac{dY}{dt}. \tag{14}$$

Подставим выражения (12) и (14) в (11), а выражение для Y^e (10) и dY^e/dt (15) – в исходное уравнение (7), тогда

$$\frac{dY^e}{dt} = \frac{\partial \bar{Y}}{\partial K}(sY - \mu K) + \frac{\partial \bar{Y}}{\partial L}\frac{dY}{dt}\frac{1}{\gamma^*}. \tag{15}$$

Далее, подставляя выражения для Y^e и dY^e/dt в исходное уравнение (7) и затем, приводя подобные, можем записать общее дифференциальное уравнение макроэкономической динамики:

$$\begin{gathered}\frac{1}{\lambda}\frac{d^2Y}{dt^2} + \left\{1 + \frac{\kappa}{\lambda} - \kappa v\left[1 - \chi\frac{4}{3}\left(v\frac{dY}{dt}\right)^2\right] - (1-s)\frac{1}{\gamma^*}\frac{\partial \bar{Y}}{\partial L}\right\}\frac{dY}{dt} + \left[\kappa - s(1-s)\frac{\partial \bar{Y}}{\partial K}\right]Y + \\ + (1-s)\left(\mu - \kappa\frac{a}{h}\right)K\frac{\partial \bar{Y}}{\partial K} - \kappa(1-s)\frac{b}{h}L\frac{\partial \bar{Y}}{\partial L} = \frac{dA}{dt} + \kappa A.\end{gathered} \tag{16}$$

Отметим, что данное уравнение учитывает закон накопления капитала (12), а также закон Оукена, устанавливающий связь между колебаниями уровня безработицы и колебаниями выпуска (13). Отдельные коэффициенты уравнения могут быть случайными величинами, например κ или λ. Правая часть уравнения, как правило, содержит случайную составляющую. Поэтому уравнение (16) в общем случае является стохастическим дифференциальным уравнением, объединяющим детерминистские и стохастические подходы к исследованию реальных деловых циклов.

При подходящих начальных и граничных условиях дифференциальное уравнение (16) может представить движение выпуска от одного положения равновесия до другого. Начальные и граничные условия целесообразно привязать к трендовой траектории:

$$\begin{aligned}
&\text{а) } Y(t, K, L)\big|_{t=t_0} = \bar{Y}(t_0, K_0, L_0) = \bar{Y}_0;\\
&\text{б) } \left.\frac{dY}{dt}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{d\bar{Y}}{dt}\right|_{t=t_0} = g_0;\\
&\text{в) } \left.\frac{\partial Y}{\partial K}\right|_{K=K_0} = \left.\frac{\partial \bar{Y}}{\partial K}\right|_{K=K_0} = i_0;\\
&\text{г) } \left.\frac{\partial Y}{\partial L}\right|_{L=L_0} = \left.\frac{\partial \bar{Y}}{\partial L}\right|_{L=L_0} = w_0;\\
&\text{д) } \left.\frac{\partial Y}{\partial K}\right|_{K\to\infty} = \left.\frac{\partial \bar{Y}}{\partial K}\right|_{K\to\infty} = 0;\\
&\text{е) } \left.\frac{\partial Y}{\partial L}\right|_{L\to\infty} = \left.\frac{\partial \bar{Y}}{\partial L}\right|_{L\to\infty} = 0.
\end{aligned} \tag{17}$$

Здесь g_0 – начальная скорость изменения выпуска; i_0 – норма процента; w_0 – реальная заработная плата в начальный момент. Условия (17в), (17г) означают достижение максимума прибыли в условиях совершенной конкуренции, условия (17д) и (17е) – свойство убывания предельных производительностей капитала и труда.

В общем уравнении макроэкономической динамики (16) мы имеем дело с двумя переменными, характеризующими выпуск продукции: быстроменяющейся переменной $Y(t)$ и медленноменяющейся $\bar{Y}(t)$. Это обстоятельство позволяет разделить их путем применения метода усреднения (Митропольский, 1971, § 13). Итак, движение экономической системы характеризуется двумя сильно различающимися временными масштабами – быстрые циклические колебания и их медленный дрейф по трендовой траектории. Метод усреднения Крылова–Боголюбова–Митропольского (метод КБМ) направлен на разделение быстрых и медленных составляющих решения. Действительно, можно сначала провести усреднение быстроменяющейся переменной $Y(t)$ и получить усеченное описание системы, учитывающее только ее осредненную эволюцию, представляющую долговременный тренд, описываемый $\bar{Y}(t)$. Такой подход позволяет относительно легко найти обе зависимости.

Для дальнейшего анализа уравнения (16) важно выделить трендовую составляющую в его правой части, которая определяется не зависящими от дохода инвестициями. Сюда входят капиталовложения государственных и частных организаций в развитие общественной инфраструктуры, а также инвестиции, которые вызывают научно-технический прогресс, изобретения и технологические нововведения, которые составляют основу не только долгосрочного экономического роста, но также влияют на краткосрочные колебания, поскольку они имеют нерегулярный характер. Сюда же относятся независимые расходы на потребление домохозяйств. Итак, независимые инвестиции $A(t)$ можно представить в виде $A(t) = \bar{A}(t) + \varphi(t)$, где $\bar{A}(t)$ – трендовая составляющая (например, $\bar{A}(t) = A_0 + A_1 t$ или $\bar{A}(t) = A_2 e^{gt}$); $\varphi(t)$ – квазипериодическая функция, колеблющаяся вокруг трендовой составляющей. Таким образом, правая часть уравнения примет вид:

$$\frac{dA}{dt} + \kappa A = \left(\frac{d\bar{A}}{dt} + \kappa\bar{A}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dt} + \kappa\varphi\right). \tag{18}$$

Второе слагаемое в правой части данного выражения оказывает непосредственное влияние на циклические колебания.

Выделим в основном уравнении (16) циклические колебания, описываемые переменной $y = Y - \bar{Y}$. Для этого рассмотрим линейный случай $\chi = 0$, чтобы воспользоваться принципом суперпозиции. Подставим $Y = y + \bar{Y}$ в линейное уравнение (16) и получим:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \sigma\frac{dy}{dt} + \omega^2 y + \frac{d^2\bar{Y}}{dt^2} + \bar{\sigma}\frac{d\bar{Y}}{dt} + \bar{\omega}^2\bar{Y} - \lambda(1-s)\frac{1}{\gamma^*}\frac{\partial\bar{Y}}{\partial L}\frac{d\bar{Y}}{dt} - \lambda s(1-s)\frac{\partial\bar{Y}}{\partial K}\bar{Y} +$$
$$+ \lambda(1-s)\left[\left(\mu - \kappa\frac{a}{h}\right)K\frac{\partial\bar{Y}}{\partial K} - \kappa\frac{b}{h}L\frac{\partial\bar{Y}}{\partial L}\right] = \lambda\left(\frac{d\bar{A}}{dt} + \kappa\bar{A}\right) + \lambda\left(\frac{d\varphi}{dt} + \kappa\varphi\right), \quad (19)$$

где

$$\sigma = \lambda + \kappa - \kappa\lambda v\left[1 - \frac{4}{3}\left(v\frac{dY}{dt}\right)^2\right] - (1-s)\lambda\frac{1}{\gamma^*}\frac{\partial\bar{Y}}{\partial L}; \quad \omega^2 = \lambda\left[\kappa - s(1-s)\frac{\partial\bar{Y}}{\partial K}\right],$$
$$\bar{\sigma} = \lambda + \kappa - \kappa\lambda v, \quad \bar{\omega}^2 = \lambda\kappa.$$

Поскольку $\partial\bar{Y}/\partial L$ и $\partial\bar{Y}/\partial K$ являются медленноменяющимися функциями, в коэффициентах σ и ω^2 их можно заменить выражениями, вытекающими из максимизации прибыли в условиях совершенной конкуренции (Столерю, 1974, § 11.2):

$$\partial\bar{Y}/\partial K = i, \quad \partial\bar{Y}/\partial L = w = \beta Y_F/L^*,$$

где i – норма процента; w – реальная заработная плата; β – отражает эластичность выпуска по труду в производственной функции Кобба–Дугласа. Следовательно,

$$\sigma = \lambda + \kappa - \kappa\lambda v[1 - 4(v\,dY/dt)^2/3] - (1-s)\lambda\beta/\gamma; \quad \omega^2 = \lambda[\kappa - s(1-s)i],$$
$$\bar{\sigma} = \lambda + \kappa - \kappa\lambda v, \quad \bar{\omega}^2 = \lambda\kappa. \quad (20)$$

Теперь проведем усреднение уравнения (19) по быстроменяющимся переменным y и φ и получим усеченное дифференциальное уравнение, описывающее только ее осредненную эволюцию, т.е. трендовую траекторию:

$$\frac{d^2\bar{Y}}{dt^2} + \bar{\sigma}\frac{d\bar{Y}}{dt} + \bar{\omega}^2\bar{Y} - \lambda(1-s)\frac{1}{\gamma^*}\frac{\partial\bar{Y}}{\partial L}\frac{d\bar{Y}}{dt} - \lambda s(1-s)\frac{\partial\bar{Y}}{\partial K}\bar{Y} +$$
$$+ \lambda(1-s)\left[\left(\mu - \kappa\frac{a}{h}\right)K\frac{\partial\bar{Y}}{\partial K} - \kappa\frac{b}{h}L\frac{\partial\bar{Y}}{\partial L}\right] = \lambda\left(\frac{d\bar{A}}{dt} + \kappa\bar{A}\right). \quad (21)$$

Начальные и граничные условия остаются прежними (17).

Поскольку принцип усреднения заключается в том, что быстроменяющиеся члены основного уравнения должны компенсироваться независимо от медленноменяющихся членов, то уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \sigma\frac{dy}{dt} + \omega^2 y = \lambda\left(\frac{d\varphi}{dt} + \kappa\varphi\right) = \varphi^*$$

дает решение, описывающее циклические колебания. Причем в данном уравнении обязательно нужно учитывать нелинейность акселератора, заключенную в коэффициенте σ (20). Поэтому в дальнейшем будем анализировать решение нелинейного дифференциального уравнения в виде:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \left[\sigma_0 - \frac{4}{3}\kappa\lambda v^3\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]\frac{dy}{dt} + \omega^2 y = \varphi^*, \quad (22)$$

где

$$\sigma_0 = -[\lambda + \kappa - \kappa\lambda v - \lambda(1-s)\beta/\gamma]; \quad \omega^2 = \lambda[\kappa - s(1-s)i]; \quad \beta = h/b - a.$$

Полученное уравнение известно как уравнение Рэлея, и оно имеет большое значение в теории автоколебаний.

3. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ РОСТ И ЦИКЛИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Применяя метод усреднения КБМ к основному уравнению макроэкономической динамики (16), мы разделили быстрые и медленные движения и получили два не зависящих друг от друга уравнения: одно описывает долговременную траекторию роста экономики (21), другое – циклические колебания экономики вокруг трендовой кривой (22). Теперь анализ решений этих уравнений можно осуществлять отдельно, а искомое решение $Y(t)$ уравнения (16) можно получить суперпозицией $Y(t) = y(t) + \bar{Y}(t)$.

Итак, рассмотрим сначала уравнение (21), описывающее трендовую траекторию. Решение этого уравнения проще всего искать путем разделения переменных в виде

$$\bar{Y}(t, K, L) = Q(t)F(K, L), \tag{23}$$

где $F(K, L)$ – положительная однородная функция, удовлетворяющая уравнению Эйлера (9). Подставляя (23) в (21), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $Q(t)$:

$$F(K, L)\left(\frac{d^2Q}{dt^2} + \bar{\sigma}\frac{dQ}{dt} + \kappa\lambda sQ\right) = \lambda\left(\frac{d\bar{A}}{dt} + \kappa\bar{A}\right).$$

Допустим, что правая часть данного уравнения может быть представлена в виде $\bar{A} = A_0F(K, L)f(t)$, или

$$\lambda(d\bar{A}/dt + \kappa\bar{A}) = \lambda A_0F(K, L)(df/dt + \kappa f).$$

В итоге получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \bar{\sigma}\frac{dQ}{dt} + \kappa\lambda sQ = \lambda A_0\left(\frac{df}{dt} + \kappa f\right), \tag{24}$$

где $\bar{\sigma} = \lambda + \kappa - \kappa\lambda v$. Начальные условия для уравнения (24) вытекают из (17а) и (17б) с учетом соотношения (23):

$$Q(0) = Q_0 = \bar{Y}_0F_0^{-1}; \quad \left.\frac{dQ}{dt}\right|_{t = t_0} = g_0F_0^{-1}.$$

Типичные значения параметров, входящих в коэффициенты уравнения (24), и характерные для развитой рыночной экономики: $\lambda = 4$, $\kappa = 1$, $v = 1.1$, $s = 0.25$.

Допустим, правая часть уравнения (24) имеет конкретный вид, описываемый экспоненциальной функцией времени, когда $f(t) = e^{gt}$, что означает рост долгосрочных инвестиций с постоянным ежегодным темпом, равным g. Это наиболее важный частный случай, встречающийся на практике. Тогда при заданных значениях параметров и начальных условиях уравнение (24) имеет общее решение:

$$Q = A_0^*e^{gt} + (C_1\cos 0{,}95t + C_2\sin 0{,}95t)e^{-0{,}3t}, \tag{25}$$

где

$$A_0^* = \frac{\lambda(g+\kappa)A_0}{g^2 + \bar{\sigma}g + \kappa\lambda s}; \quad C_1 = \bar{Y}_0F_0^{-1} - A_0^*; \quad C_2 = 0{,}31[\bar{Y}_0F_0^{-1} - (1 + 3{,}3g)A_0^*].$$

Как видно из решения (25), влияние колебательной части сказывается на переходном режиме в виде затухающих гармонических колебаний. Поскольку это влияние быстро затухает, в установившемся (стационарном) режиме решение имеет вид $Q = A_0^*e^{gt}$, а искомое решение (23) в стационарном режиме –

$$\bar{Y}(t, K, L) = A_0^*e^{gt}F(K, L). \tag{26}$$

Если теперь в качестве функции $F(K, L)$ взять производственную функцию Кобба–Дугласа, то приходим к классической формуле Р. Солоу (Solow, 1956, p. 65–94), описывающей долгосрочный экономический рост в условиях нейтрального по Хиксу технического прогресса:

$$\bar{Y}(t, K, L) = \bar{Y}_0 K^b L^{h/b-a} e^{gt}, \qquad (27)$$

где $\beta = 1 - b$; $h = b(1 - b + a)$. Если и далее, следуя Р. Солоу, принять, что имеет место сбалансированный рост и $L = L_0 e^{nt}$, то $K = K_0 e^{pt}$ и экономика развивается равномерно с темпом роста, равным $p = n + g/\beta$, т.е.

$$\bar{Y}(t) = \bar{Y}_0^* e^{pt}. \qquad (28)$$

В примерах будем придерживаться следующих численных значений параметров: $n = 0.01$ (1% в год); $g = 0.03$ (3% в год); $\beta = 0.67$ и $\bar{Y}_0^* = 1$.

Проанализируем решение уравнения (22), описывающего нелинейные циклические колебания экономической системы вокруг трендовой траектории (26). Существенное влияние на характер искомого решения оказывают абсолютная величина и знак коэффициента σ при первой производной dy/dt:

$$\sigma = -\left[\sigma_0 - \frac{4}{3}\kappa\lambda v^3\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]; \quad \sigma_0 = -[\lambda + \kappa - \kappa\lambda v - \lambda(1-s)\beta/\gamma]. \qquad (29)$$

Типичные значения параметров, входящих в этот коэффициент, характерные для развитой рыночной экономики, следующие: $\lambda = 4$, $\kappa = 1$, $v = 1.1$, $s = 2.5$, $\gamma = 2.5$, $i = 0.1$, $\beta = 0.67$. При данных значениях параметров имеем $\sigma_0 = -0.2$; $\omega^2 = 3.92$, и для линейного уравнения корни соответствующего характеристического уравнения $q^2 + \sigma_0 q + \omega^2 = 0$ составят $q_{1,2} = -0.1 \pm 1.98j$, т.е. определяют затухающий колебательный процесс. Если принять $\gamma = 2$ при неизменных заданных значениях остальных параметров, тогда получим $\sigma_0 = 0$ и корни характеристического уравнения будут чисто мнимыми $q_{1,2} = \pm 1.98j$. Это означает наличие в системе незатухающих, в частности, гармонических колебаний. В классических исследованиях, посвященных кейнсианским моделям циклических колебаний (Аллен, 1963, гл. 6, 7), случаи, когда $\sigma_0 \leq 0$ и выступает в качестве коэффициента затухания, рассматривались как наиболее интересные для практики. Случаи, когда $\sigma_0 > 0$ и имеют место колебания взрывного характера, подробно не анализировались как не соответствующие реальным динамическим процессам, происходящим в реальных экономических системах. Это заблуждение возникло в результате игнорирования нелинейности акселератора. Случай $\sigma_0 \leq 0$ является тривиальным – экономическая система пребывает в равновесии ($\sigma_0 = 0$) или стремится к состоянию равновесия, после того как очередной шок предложения вывел ее из состояния равновесия. Ключевую роль среди заданных параметров играет мощность акселератора v ($v > 0$), причем при небольших величинах $v < 1$, $\sigma < 0$ имеют место затухающие колебания, при некотором значении v, близком к единице, $\sigma_0 = 0$ возникают незатухающие колебания, а при больших величинах v($v > 1$, $\sigma_0 > 0$) они превращаются во взрывные. Можно показать, что значения v, порождающие колебания в линейной модели, расположены на интервале $(1 - \sqrt{s})^2 < v < (1 + \sqrt{s})^2$ (Аллен, 1963, § 7.7) и лишь при одном значении v, близком к единице, имеют место регулярные незатухающие колебания. Однако теория не может опираться на случайный вариант, когда акселератор обладает надлежащей мощностью, порождающей регулярные колебания, что означает несостоятельность линейной теории для описания циклических колебаний в экономике.

Таким образом, для нелинейного дифференциального уравнения (22) наиболее интересным является случай, когда $\sigma_0 > 0$, который, как правило, и встречается в реальной экономике. При этом имеет место взрывной колебательный процесс, вызванный начальным импульсом, который затем ограничивается нелинейным гибким акселератором, преобразуясь в незатухающие нелинейные колебания. Это происходит следующим образом. Поскольку коэффициент σ (29) – это переменная величина, и при малых значениях $|dy/dt|$ имеет место $\sigma \cong -\sigma_0$, а значит $\sigma < 0$, то в системе возникает взрывное колебание, которое усиливает амплитуду колебаний выпуска. Но затем, при достаточном увеличении $|dy/dt|$, второе слагаемое в (29) превышает по абсолютной величине σ_0 и происходит смена знака σ на противоположный, т.е. σ становится положительной и начинается затухание амплитуды выпуска. Это продолжается до тех пор, пока $|dy/dt|$ снова не становится настолько малой, что вновь происходит смена знака σ на отрицательный, вызывает новое взрывное колебание и амплитуда колебаний выпуска вновь разгоняется. Таким образом, в системе происходит установление незатухающих колебаний. Можно показать, что в пределах практических изменений параметров системы выполняется

$$|\sigma| = \left|\sigma_0 - \frac{4}{3}\kappa\lambda v^3\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right| \le 0{,}3 \ll 1,$$

т.е. σ можно рассматривать как малый параметр. Следовательно, перед нами слабо нелинейное дифференциальное уравнение с малым параметром, для решения которого можно эффективно использовать метод усреднения КБМ (Боголюбов, Митропольский, 1974, гл. 1).

Как же происходят незатухающие циклические колебания в реальной экономической системе в условиях, когда колебания имеют взрывной характер? Под влиянием роста спроса увеличивается выпуск продукции и возникают стимулы, необходимые для его обеспечения капиталовложениями. Однако первая реакция может повлечь уменьшение оборотного капитала (запасов готовой продукции, полуфабрикатов, незавершенного производства), и лишь затем последуют капиталовложения в производство, а также восстановление оборотного капитала за счет индуцированных инвестиций. По мере увеличения выпуска будут нарастать и потери оборотного капитала (это и есть явление диссипации в экономических системах), так что в конце концов средний за период колебаний объем расходов достигнет уровня, соответствующего поступающим инвестициям, что приводит к стабилизации объемов выпуска на определенном уровне. Теперь в системе будет протекать самоподдерживающийся колебательный процесс.

Заметим, что амплитуда колебаний выпуска определяется только внутренними параметрами системы и не зависит от внешних факторов или начальных условий, что соответствует стилизованному факту 3 (разд. 1). Следовательно, изменения оборотного капитала (движение товарных запасов) в течение промежуточного периода – между принятием решения об объемах инвестиций и фактическим капиталовложением в производство – играют ключевую роль в колебательном процессе, выступая элементом усиления циклических колебаний. Поэтому неудивительно, что деловые циклы в большой степени напоминают колебания товарных запасов. Более того, незатухающие колебания в экономической системе существуют потому, что расход оборотного капитала, возникающий в результате немедленного реагирования на возникший спрос, будет компенсироваться за счет индуцированных инвестиций, но с определенным запаздыванием по времени. Таким образом, благодаря наличию нелинейного гибкого акселератора экономическая система способна порождать автоколебания. В такой системе параметр σ является бифуркационным параметром. Когда σ проходит критическое значение $\sigma = 0$, происходит простейшая бифуркация Андронова–Хопфа, т.е. бифуркация рождения незатухающих автоколебаний. Амплитуда колебаний обычно пропорциональна $\sqrt{\sigma}$. Мощность акселератора играет роль коэффициента усиления в системе обратной связи. Если мощность акселератора достаточно велика, то колебания малой амплитуды, возникшие в системе, будут раскачиваться, порождая незатухающие колебания.

Для получения приближенных решений уравнения (22) рассмотрим ряд частных случаев.

Пример 1. Собственные колебания системы. Внешнее воздействие отсутствует, т.е. $\varphi = 0$. Если обозначить

$$F\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{\varepsilon}\left[\sigma_0 - \frac{4}{3}\kappa\lambda v^3\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]\frac{dy}{dt},$$

то для применения метода усреднения (Боголюбов, Митропольский, 1974, гл. 1, § 3) уравнение (22) можно записать в стандартной форме:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = \varepsilon F\left(\frac{dy}{dt}\right). \tag{30}$$

Решение данного уравнения в первом приближении ищем в виде $y = a\cos\psi$, где a и ψ – функции, определяемые уравнениями:

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\omega}F_1(a\omega), \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega, \quad \psi = \omega t = \vartheta. \tag{31}$$

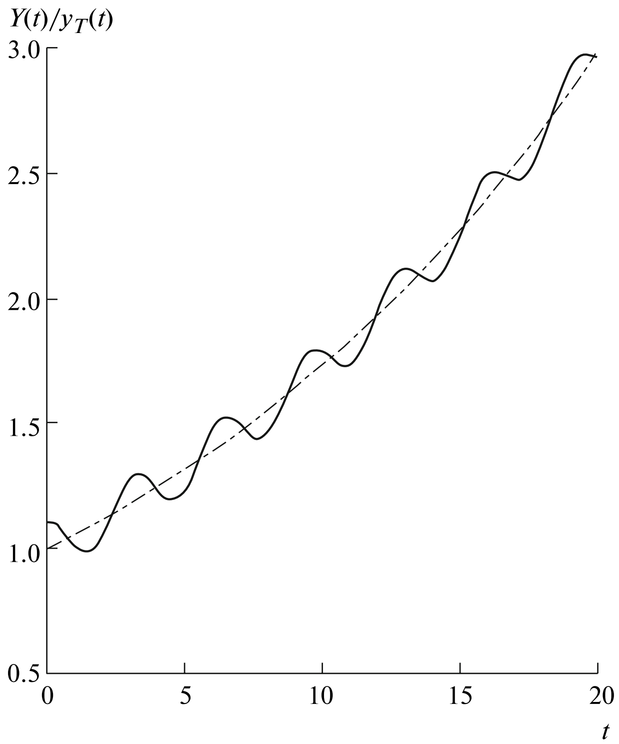

Рис. 2. Собственные колебания экономической системы.

Поскольку $F(-a\omega\sin\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(a\omega)\cos n(\psi + \pi/2)$, отсюда легко найти $F_1(a\omega) = (\sigma_0 - \sigma_1 a^2)a\omega/\varepsilon$, где $\sigma_1 = \kappa\lambda v^3\omega^2$, $\sigma_1 a^2 > \sigma_0 > 0$. Решая уравнение (31) относительно параметра a, получим:

$$a = a_0\exp(0{,}5\sigma_0 t)/\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}a_0^2[\mathrm{e}^{\sigma_0 t} - 1] + 1\right)^{1/2}.$$

Следовательно, приближенное решение уравнения (30), описывающее собственные колебания системы, имеет вид:

$$y = a_0\exp(0{,}5\sigma_0 t)\cos(\omega t + \vartheta)/\sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_0}a_0^2[\exp(\sigma_0 t) - 1] + 1}. \tag{32}$$

В стационарном режиме –

$$y_{\text{ст}} = y_0\cos(\omega t + \vartheta), \quad y_0 = \sqrt{\sigma_0/\sigma_1}. \tag{33}$$

Суперпозиция трендовой траектории движения выпуска (28) и его циклических колебаний (33) дает реальную кривую движения выпуска:

$$Y_{\text{ст}} = \mathrm{e}^{pt} + y_0\cos(\omega t + \vartheta). \tag{34}$$

График данной кривой представлен на рис. 2 и соответствует стилизованным фактам (разд. 1).

Пример 2. Воздействие на автономную систему стационарного "белого шума". В этом случае уравнение (29) примет стандартный вид:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = \varepsilon F\left(\frac{dy}{dt}\right) + \sqrt{\varepsilon}\sigma_\xi\xi(t), \tag{35}$$

где $\xi(t)$ – гауссовский "белый шум"; σ_ξ – среднее квадратическое отклонение $\xi(t)$.

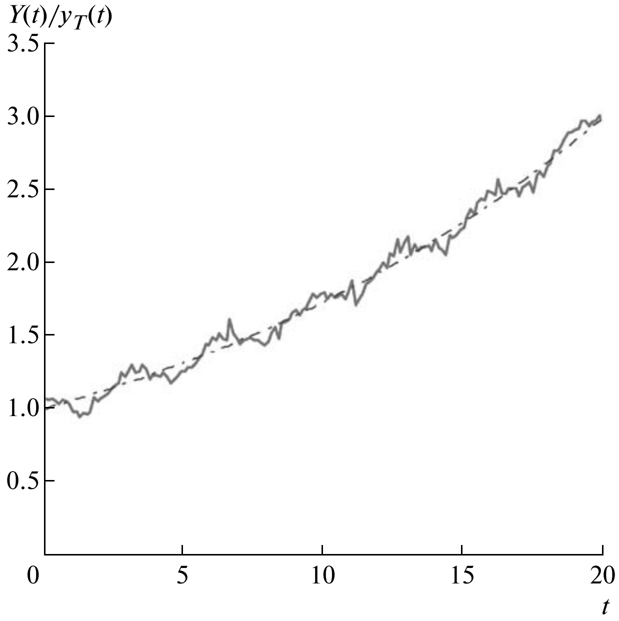

Рис. 3. Воздействие стационарного "белого шума" на автономную систему при $\sigma = 0.05$ ($a_m = 0.084$, $\sigma_a = 0.046$, $\sigma_\theta = 0.213$), $\Delta t = 0.125$.

Решение в первом приближении ищем в виде $y = a\cos(\omega t + \theta)$. Амплитуда a и фаза θ являются случайными величинами, которые удовлетворяют системе стохастических дифференциальных уравнений (Митропольский, 1971, § 23):

$$d\bar{a} = 0{,}5\bar{a}(\sigma_0 - \sigma_1\bar{a}^2)dt + \sigma_\xi\sqrt{0{,}5\varepsilon}d\xi(t); \quad d\bar{\theta} = \frac{\sigma_\xi}{\bar{a}\omega}\sqrt{0{,}5\varepsilon}d\xi(t). \tag{36}$$

Для первого уравнения системы (36) из соответствующего уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка можно получить точное выражение для стационарной плотности распределения усредненной амплитуды $\bar{a}$ (Маланин, Полосков, 2005, § 2.1, с. 54):

$$p(\bar{a}) = C\exp\left(\frac{\sigma_0\bar{a}^2}{\varepsilon\sigma_\xi^2} - \frac{\sigma_1\bar{a}^4}{2\varepsilon\sigma_\xi^2}\right), \tag{37}$$

где C – константа нормировки. Из второго уравнения системы (36) следует, что $\bar{\theta}$ является гауссовским "белым шумом". Зная функцию плотности распределения $\bar{a}$, можно построить кривые практической реализации движения общего выпуска по формуле (34). Одна из таких реализаций представлена на рис. 3.

Пример 3. Влияние внешних периодических сил. Пусть $\phi^* = q\sin\nu t$. Уравнение (22) принимает вид:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = \varepsilon F\left(\frac{dy}{dt}\right) + q\sin\nu t, \tag{38}$$

где

$$F\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{\varepsilon}\left[\sigma_0 - \sigma_2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]\frac{dy}{dt}; \quad \sigma_2 = \frac{4}{3}\kappa\lambda v^3.$$

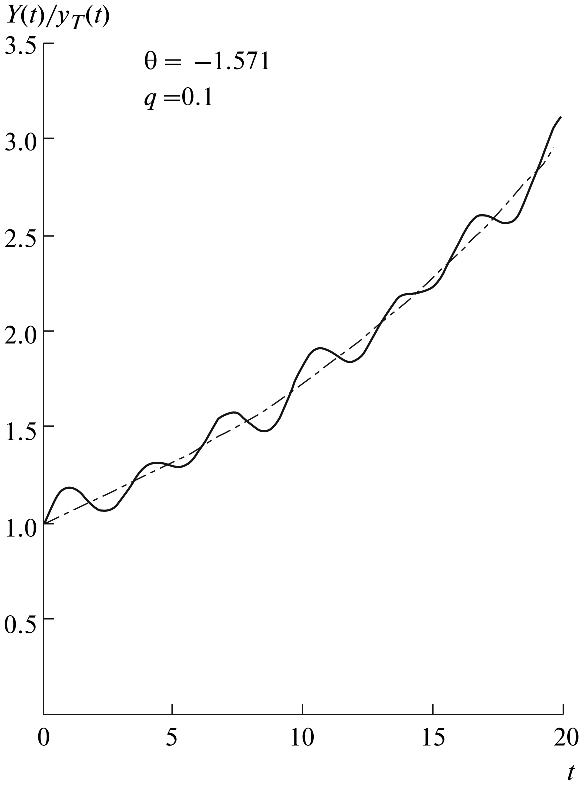

Рис. 4. Вынужденные колебания экономической системы в нерезонансном случае.

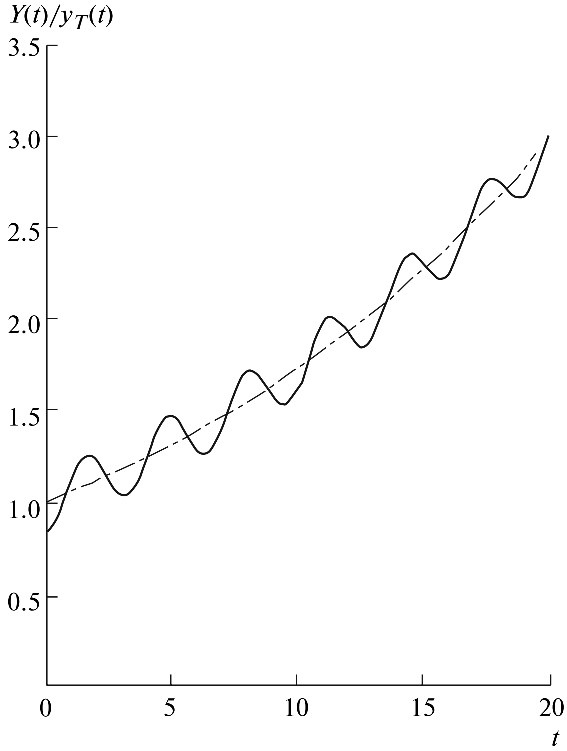

Рис. 5. Вынужденные колебания экономической системы в резонансном случае ($q = 1$; $\varepsilon = 0.1$; $a = 0.158$).

Рассмотрим вначале решение в отсутствии резонанса, т.е. $\nu \neq \omega$. Чтобы привести уравнение (38) к стандартному для применения метода усреднения виду, сделаем замену $y = x + U\sin\nu t$. Тогда

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(\nu t, \frac{dx}{dt}\right) = \varepsilon\frac{1}{\varepsilon}\left[\sigma_0 - \sigma_2\left(\frac{dx}{dt} + \nu U\cos\nu t\right)^2\right]\left(\frac{dx}{dt} + \nu U\cos\nu t\right),$$

где $U = q/(\omega^2 - \nu^2)$, далее $\theta = \nu t$.

В качестве первого приближения решения берем функцию $x = a\cos\psi$, в которой a и ψ определяются уравнениями (Боголюбов, Митропольский, 1974, гл. 3, § 13):

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a), \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a),$$

где

$$A_1(a) = -\frac{1}{4\pi^2\omega}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(a, \psi, \theta)\sin\psi\, d\theta\, d\psi,$$

$$B_1(a) = -\frac{1}{4\pi^2\omega a}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(a, \psi, \theta)\cos\psi\, d\theta\, d\psi,$$

$$f_0(a, \psi, \theta) = f(\nu t, a\cos\psi, -a\omega\sin\psi).$$

Взяв интегралы, получаем:

$$A_1(a) = \frac{a}{4\varepsilon}[2\sigma_0 - 3\sigma_2(\nu U)^2 - 1{,}5\sigma_2(a\omega)^2]; \quad B_1(a) = 0.$$

Итак, у нас имеются следующие дифференциальные уравнения для определения a и ψ:

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dt} = a(\sigma_3^2 - a^2)\sigma_4, \quad \sigma_3^2 = \dfrac{4\sigma_0 - 6\sigma_2(\nu U)^2}{3\sigma_2\omega^2}, \quad \sigma_4 = \dfrac{3}{8}\sigma_2\omega^2; \\ \dfrac{d\psi}{dt} = \omega, \quad \psi = \omega t + \vartheta. \end{cases}$$

Решение уравнения относительно a имеет вид:

$$a = a_0 \exp(0{,}5\sigma_2 t)/\sqrt{\frac{a_0^2}{\sigma_3^2}[\exp(\sigma_5 t) - 1] + 1}, \quad \sigma_5 = \sigma_0 - 1{,}5\sigma_2(q\nu/(\omega^2 - \nu^2))^2.$$

Отсюда следует, что стационарное значение амплитуды $a_{\text{ст}} = \sigma_3$, стационарное решение исходного уравнения (38):

$$y_{\text{ст}} = x_{\text{ст}} + U\sin\nu t = \sigma_3\cos(\omega t + \vartheta) + (q/(\omega^2 - \nu^2))\sin\nu t.$$

Следовательно,

$$Y_{\text{ст}} = \mathrm{e}^{pt} + \sigma_3\cos(\omega t + \vartheta) + (q/(\omega^2 - \nu^2))\sin\nu t. \tag{39}$$

Кривая динамики выпуска (39) представлена на рис. 4 при соотношении частот $\nu = 2\omega/3$.

Рассмотрим теперь решение уравнения (38) в резонансном случае, когда $\nu \approx \omega$. В отличие от (38) возьмем только малое внешнее воздействие:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = \varepsilon F\left(\frac{dy}{dt}\right) + \varepsilon q\sin\nu t. \tag{40}$$

В данном случае решение в первом приближении ищем в виде $y = a\cos(\nu t + \vartheta)$, где a и ϑ определяются системой дифференциальных уравнений (Боголюбов, Митропольский, 1974, гл. 3, § 15):

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dt} = -\dfrac{\varepsilon}{2\pi\omega}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_0(a, \psi)\sin\psi d\psi - \dfrac{\varepsilon q\cos\vartheta}{\omega + \nu}, \\ \dfrac{d\vartheta}{dt} = \omega - \nu - \dfrac{\varepsilon}{2\pi\omega a}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_0(a, \psi)\cos\psi d\psi + \dfrac{\varepsilon q\sin\vartheta}{a(\omega + \nu)}. \end{cases}$$

После взятия интегралов получаем уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dt} = 0{,}5a[\sigma_0 - 0{,}75\sigma_2(a\omega)^2] - \dfrac{\varepsilon q\cos\vartheta}{\omega + \nu}, \\ \dfrac{d\vartheta}{dt} = \omega - \nu + \dfrac{\varepsilon q\sin\vartheta}{a(\omega + \nu)}. \end{cases} \tag{41}$$

В стационарном режиме $da/dt = 0$, $d\vartheta/dt = 0$. Исключая ϑ из уравнений (41), получаем:

$$(\varepsilon q)^2 = a^2\{(\nu^2 - \omega^2)^2 + \nu^2[\sigma_0 - 0{,}75\sigma_2(a\omega)^2]^2\}.$$

Упрощая данное уравнение, получим кубическое уравнение для определения a:

$$a^3 - 0{,}75a\frac{\sigma_0}{\sigma_2\omega^2} + \frac{4\varepsilon q}{3\sigma_2\nu\omega^2} = 0. \tag{42}$$

Итак,

$$Y_{\text{ст}} = \mathrm{e}^{pt} + a_3\cos(\nu t + \vartheta). \tag{43}$$

Здесь a_3 – действительный корень уравнения (42). Соответствующая уравнению (43) кривая движения выпуска представлена на рис. 5.

Как показывают рассмотренные выше примеры, предлагаемый в работе подход является эффективным для изучения циклических колебаний в современной экономике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Аллен Р. (1963): Математическая экономия. М.: Изд-во иностр. лит-ры.

Безручко Б.П., Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е. (2005): Путь в синергетику. Экскурс в десяти лекциях. М.: КомКнига.

Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. (1974): Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука.

Двайт Г.Б. (2005): Таблицы интегралов и другие математические формулы. СПб.: Лань.

Маланин В.В., Полосков И.Е. (2005): Методы и практика анализа случайных процессов в динамических системах. М., Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика".

Митропольский Ю.А. (1971): Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наукова Думка.

Нельсон Р.Р., Уинтер С.Дж. (2002): Эволюционная теория экономических изменений. М.: Дело.

Слуцкий Е.Е. (1927): Сложение случайных причин как источник циклических процессов // *Вопр. Конъюнктуры*. Т. 3. Вып. 1.

Столерю Л. (1974): Равновесие и экономический рост. М.: Статистика.

Туманова Е.А., Шагас Н.Л. (2004): Макроэкономика. М.: Инфра-М.

Шумпетер Й. (1982): Теория экономического развития. М.: Прогресс.

Burns A.F., Mitchell W.C. (1946): Measuring Business Cycles. N.Y.: NBER.

Goodwin R.M. (1951): The Non-linear Accelerator and the Persistence of Business Cycles // *Econometrica*. № 19.

Hicks J.R. (1950): A Contribution to the Theory of the Trade Cycle. Oxford: Oxford University Press.

Kydland E., Prescott E. (1982): Time to Build and Aggregate Fluctuations // *Econometrica*. Vol. 50. № 6.

Long J., Plosser C. (1983): Real Business Cycles // *J. of Polit. Econ*. Vol. 91. February.

Lucas R.E. (1977): Understanding Business Cycles // *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*. № 5.

Lucas R.E. (1988): On the Mechanics of Economic Development // *J. of Monetary Econ*. № 22.

Nelson R., Plosser Ch.I. (1982): Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series // *J. of Monetary Econ*. Vol. 10. September.

Phillips A.W. (1954): Stabilization Policy in a Closed Economy // *Econ. J*. № 64.

Plosser C. (1989): Universtanding Real Buisiness Cycle // *J. of Econ. Perspectives*. № 3.

Prescott E. (1986): Theory Ahead of Business Cycle Measurement // *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*. Autumn.

Romer P. (1986): Increasing Returns and Long-Run Growth // *J. of Polit. Econ*. Vol. 94. № 5.

Samuelson P.A. (1939): A Synthesis of the Principle of Acceleration and the Multiplier // *J. of Polit. Econ*. № 47.

Solow R. (1956): A Contribution to the Theory of Economic Growth // *Quarterly J. of Econ*. February.

Поступила в редакцию
14.06.2007 г.

Analysis of Solutions of General Equations of Microeconomic Dynamics

A. A. Akayev

The general differential equation, describing the joint interaction of long-term economic growth and cyclical fluctuations of business activity, was derived for the first time. The equation has an integrated nonlinear investment accelerator that supports the persistent fluctuations in the economics. The scheme of approximate solution of derived nonlinear equation of macroeconomic dynamics by means of separation of business cycles with high fluctuations from slow-changing trend trajectory using averaging-out method of Krylov-Bogolyubov-Mitropolsky is suggested.