

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

УРАВНЕНИЯ МАКРОЭКОНОМИКИ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

© 2008 г. В. Е. Накоряков, В. Г. Гасенко

(Новосибирск)

В рамках монетарных моделей предложена система дифференциальных уравнений макроэкономики в частных производных гиперболического типа для совокупного потребления и предложения как функций двух независимых переменных — времени и индекса цен. Показано, что динамику изменения кривых спроса и предложения определяют два механизма — кинетика (или скорость установления равновесия между спросом и предложением) и кинематические волны инфляции и дефляции. Модель позволяет рассчитывать текущие значения спроса, предложения и уровня цен как при наличии динамического равновесия и пересечении кривых спроса и предложения, так и при отсутствии такого равновесия.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в некоторой экономике никогда не возникает стабильного состояния. Никогда не наступает баланс между спросом и предложением, между денежными массами разного типа. Развитие производства происходит непрерывно и зависит от времени и цены. Такое предположение делалось ранее в рамках монетарных моделей роста экономики (Tobin, 1965; Занг, 1999) и немонетарных (Гранберг, 1985; Solow, 1988; Накоряков, Гасенко, 2002, 2004). Допустим также, что в сфере предложения экономика стремится к равновесию, описываемому уравнением Фридмана (Friedman, Schwartz, 1963, 1982):

$$y_1 = Q_1 v/p, \quad (1)$$

сфера потребления — уравнением Фишера (Dornbusch, Fisher, 1986)

$$y_2 = Q_2 v/p. \quad (2)$$

Здесь y_1 и y_2 — реальные величины предложения товаров и услуг потребления, соответственно; p — цена; Q_1 и Q_2 — номинальные денежные массы; v — скорость обращения денег. Предполагая, что практически всегда при средней цене на рынке p равновесие денежной массы и объем предлагаемого и потребляемого продуктов отсутствуют, запишем динамические уравнения:

$$\frac{dy_1}{dt} = \alpha(Q_1 v/p - y_1), \quad (3)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \beta(Q_2 v/p - y_2), \quad (4)$$

где $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dp}{dt} \frac{\partial}{\partial p}$ — полная производная по времени. На самом деле эти уравнения следует переписать в виде:

$$\frac{\partial y_1}{\partial t} + \frac{dp}{dt} \frac{\partial y_1}{\partial p} = k_1 \left(\frac{Q_1 v}{p} - y_1 \right), \quad (5)$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial t} + \frac{dp}{dt} \frac{\partial y_2}{\partial p} = k_2 \left(\frac{Q_2 v}{p} - y_2 \right). \quad (6)$$

Для описания зависимости $p(t)$ воспользуемся уравнением Вальраса (Мэнкью, 1994; Lucas, 1973)

$$\frac{dp}{dt} = k_3(y_2 - y_1). \quad (7)$$

В (5)–(7) кинетические коэффициенты k_1 , k_2 и k_3 представляют собой обратные времена установления равновесия уровня производства, потребления и уровня цен, соответственно.

В отличие от Фридмана, Фишера и их последователей будем считать, что точка равновесия – величина фиктивная, и экономика ее никогда не достигает.

Зависимости $y_1(p)$ и $y_2(p)$ формируются по времени. Задав исходное распределение $y_1(p, 0)$, $y_2(p, 0)$ и начальную массу денег, проследим за эволюцией системы. Разделим Q на денежную массу предложения Q_1 , денежную массу потребления Q_2 и деньги сбережения Q_3 , $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$. Считаем, что денежную массу генерирует государство. Государство выделяет бюджетную заработную плату, предприятия поддерживают некоторый фонд заработной платы. Объем сбережений зависит от процентной ставки. Будем задавать законы изменения общего объема денег и изменение по времени компонент денежной массы.

Описание динамики инфляционных процессов в дифференциальной форме и, в частности, в форме дифференциальных уравнений в частных производных кажется нам более предпочтительным, чем лаговая или дискретная формы, рассмотренные в (Тябин, 2001).

Приведем уравнение к безразмерному виду, используя значения переменных в начальный момент времени $t = 0$: $p_0 = p(0)$ – начальный уровень цен; $y_{10} = y_1(0, p_0)$ – начальное предложение; $y_{20} = y_2(0, p_0)$ – начальное потребление. Вводим безразмерные переменные $\tilde{p} = p/p_0$ – индекс цен, $\tilde{y}_1(t, \tilde{p}) = y_1/y_{10}$, $\tilde{y}_2(t, \tilde{p}) = y_2/y_{20}$ и $\tau = tk_3$. Теперь уравнения (5)–(7) станут безразмерными и примут вид:

$$\frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial \tau} + \frac{d\tilde{p}}{d\tau} \frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial \tilde{p}} = \alpha \left(\frac{\tilde{Q}_1}{\tilde{p}} - \tilde{y}_1 \right), \quad (8)$$

$$\frac{\partial \tilde{y}_2}{\partial \tau} + \frac{d\tilde{p}}{d\tau} \frac{\partial \tilde{y}_2}{\partial \tilde{p}} = \beta \left(\frac{\tilde{Q}_2}{\tilde{p}} - \tilde{y}_2 \right), \quad (9)$$

$$\frac{d\tilde{p}}{d\tau} = \tilde{y}_2 - \gamma \tilde{y}_1, \quad (10)$$

где $\gamma = y_{10}/y_{20}$, $\tilde{k}_3 = k_3 y_{20}/p_0$, $\tilde{Q}_1 = Q_1 v/y_{10} p_0$ и $\tilde{Q}_2 = Q_2 v/y_{20} p_0$ – безразмерные критерии, характеризующие процесс; $\alpha = k_1/\tilde{k}_3$, $\beta = k_2/\tilde{k}_3$ – безразмерные критерии Деборы¹. Поскольку $y_{10} = Q_1 v/p_0$ и $y_{20} = Q_2 v/p_0$, начальное безразмерное количество денег $\tilde{Q}_1$ и $\tilde{Q}_2$ равно 1. С учетом (10) полная система (8)–(10) сводится к двум уравнениям в частных производных:

$$\frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial \tau} + (\tilde{y}_2 - \gamma \tilde{y}_1) \frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial \tilde{p}} = \alpha \left(\frac{\tilde{Q}_1}{\tilde{p}} - \tilde{y}_1 \right), \quad (11)$$

$$\frac{\partial \tilde{y}_2}{\partial \tau} + (\tilde{y}_2 - \gamma \tilde{y}_1) \frac{\partial \tilde{y}_2}{\partial \tilde{p}} = \beta \left(\frac{\tilde{Q}_2}{\tilde{p}} - \tilde{y}_2 \right). \quad (12)$$

Система (11), (12) является гиперболической. Она имеет две вещественные характеристики, одна из которых контактная, а вторая – звуковая (кинематическая), причем последняя превращается в контактную при $\tilde{y}_2 = \gamma \tilde{y}_1$. Это означает, что решениями (11), (12) могут быть разрывные решения, проходящие по линии $\tilde{y}_2 = \gamma \tilde{y}_1$ и распространяющиеся с нулевой скоростью или с нулевой инфляцией.

¹ Критерий или число Деборы (De), как отношение времени релаксации к времени наблюдения или времени процесса, впервые ввел в обращение для характеристики текучести вещества основатель реологии М. Рейнер в 1928 г. в честь ветхозаветной прорицательницы и воительницы Деборы. Чем меньше число Деборы, тем менее постоянно характеризуемое этим числом явление. Быстропротекающий процесс при коротком времени наблюдения кажется постоянным и характеризуется большим числом Деборы ($De \gg 1$). С другой стороны, даже очертания материков за время геологических эпох будут характеризоваться малым числом Деборы ($De \ll 1$). Поэтому именно так трактуют популярную цитату ветхозаветной Деборы: “... и горы растеклись перед Господом” (Судьи 5:5).

В безразмерном варианте система (11), (12) включает два экзогенных параметра $\tilde{Q}_1$ и $\tilde{Q}_2$, зависящих от времени, а также три постоянных параметра α , β , γ . В дальнейшем, не нарушая общности, начальный спрос и начальное предложение можно считать равными и исключить параметр $\gamma = y_{10}/y_{20} = 1$. В отношении зависимости $\tilde{Q}_1(\tau)$ и $\tilde{Q}_2(\tau)$ ограничимся случаем разовой эмиссии денег в начальный момент времени на 20–30% до величины $\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2 = 1.2–1.3$.

Оценка величины безразмерных параметров Деборы в реальной экономике показывает, что $\beta \ll \alpha \ll 1$, однако варьирование этих параметров будем проводить в больших пределах, чтобы выявить существование разных типов решений системы (11), (12).

Рассмотрим частные случаи уравнений (11), (12). Предположим, что цена в процессе эволюции не меняется, т.е. $p = \text{const}$. Тогда, как следует из уравнения Вальраса (7), либо $k_3 = 0$, либо $y_1 = y_2$. Второй случай тривиален и возможен только при $Q_1 = Q_2$. Первый же случай в краткосрочном периоде вполне реален и может осуществляться за счет мер правительства по снижению инфляции до полного нуля. В этом случае система (11), (12) превращается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых индекс цен является постоянным параметром

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{y}_1}{d\tau} = \alpha \left(\frac{\tilde{Q}_1}{p} - y_1 \right), \\ \frac{d\tilde{y}_2}{d\tau} = \beta \left(\frac{\tilde{Q}_2}{p} - y_2 \right). \end{cases} \quad (13)$$

В этом случае решение задачи (13) с начальными условиями $\tilde{y}_1(0) = \tilde{y}_2(0) = 1$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1(\tau) &= e^{-\alpha\tau} + \frac{\alpha}{p} \int_0^\tau e^{-\alpha(\tau-\tau')} \tilde{Q}_1(\tau') d\tau' = 1 + \Delta\tilde{Q}_1(1 - e^{-\alpha\tau}), \\ \tilde{y}_2(\tau) &= e^{-\beta\tau} + \frac{\beta}{p} \int_0^\tau e^{-\beta(\tau-\tau')} \tilde{Q}_2(\tau') d\tau' = 1 + \Delta\tilde{Q}_2(1 - e^{-\beta\tau}). \end{aligned} \quad (14)$$

Решение (14) дано для разовой эмиссии в начальный момент времени вида $\tilde{Q}_{1,2}(\tau) = 1 + \Delta\tilde{Q}_{1,2}\eta(\tau)$, где $\eta(\tau)$ — единичная функция Хевисайда. Решение (14) означает, что при нулевой инфляции предложение и потребление будут прирастать пропорционально вложенным средствам со своими постоянными времени $\tau_1 = 1/\alpha$ и $\tau_2 = 1/\beta$.

В случае, когда инфляция постоянна ($\pi = d\ln p/dt = \text{const}$), система (11), (12) упрощается:

$$\begin{cases} \frac{\partial\tilde{y}_1}{\partial t} + \pi\tilde{p}\frac{\partial\tilde{y}_1}{\partial\tilde{p}} = \alpha \left(\frac{\tilde{Q}_1}{\tilde{p}} - y_1 \right), \\ \frac{\partial\tilde{y}_2}{\partial t} + \pi\tilde{p}\frac{\partial\tilde{y}_2}{\partial\tilde{p}} = \beta \left(\frac{\tilde{Q}_2}{\tilde{p}} - y_2 \right). \end{cases} \quad (15)$$

Решения системы (15), дополненной начальными условиями, также могут быть найдены только численно и будут рассматриваться отдельно.

2. ПРИБЛИЖЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Представляет интерес исследование предельного случая очень маленькой величины параметра $\tilde{k}_3 \ll 1$ или, что эквивалентно, больших значений параметров Деборы ($\alpha, \beta \gg 1$), отвечающих случаю квазизамороженных цен. Здесь конвективный член в уравнениях (8), (9) имеет пренебре-

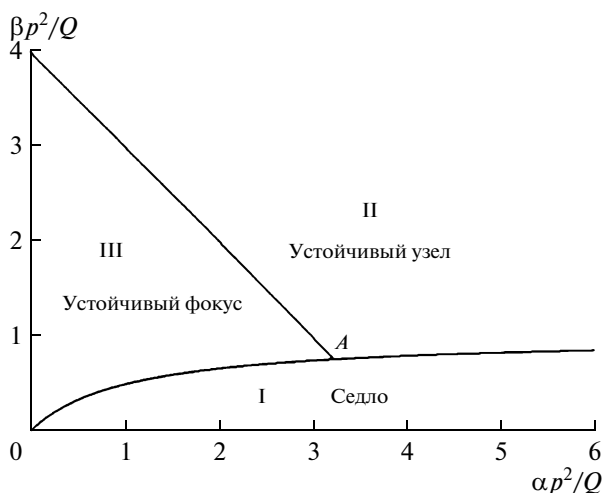


Рис. 1. Типы особой точки системы уравнений (16) в плоскости параметров.

жимо малое влияние, цена выступает в качестве независимой переменной, а система (8)–(10) принимает вид обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{y}_1}{d\tau} = \alpha\left(\frac{\tilde{Q}_1}{\tilde{p}} - \tilde{y}_1\right), \\ \frac{d\tilde{y}_2}{d\tau} = \beta\left(\frac{\tilde{Q}_2}{\tilde{p}} - \tilde{y}_2\right), \\ \frac{d\tilde{p}}{d\tau} = \tilde{y}_2 - \tilde{y}_1. \end{cases} \quad (16)$$

Проанализируем решения системы (16). В случае $\tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_2 = \tilde{Q}$ система (16) имеет множество особых точек равновесия, представляющих собой в трехмерном фазовом пространстве ($\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{p}$) гиперболу $\tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = \tilde{Q}/\tilde{p}$. Тип особых точек определяется характеристическим уравнением

$$\begin{vmatrix} \alpha + \lambda & 0 & \alpha\tilde{Q}/\tilde{p}^2 \\ 0 & \beta + \lambda & \alpha\tilde{Q}/\tilde{p}^2 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda[\lambda^2 + \lambda(\alpha + \beta) + \alpha\beta + (\beta - \alpha)(\tilde{Q}/\tilde{p}^2)] = 0, \quad (17)$$

имеющим решения:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = -0,5(\alpha + \beta) \pm (0,25(\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \beta)\tilde{Q}/\tilde{p}^2)^{0,5}. \quad (18)$$

Параметрическая зависимость типа особой точки от параметров представлена на рис. 1 в плоскости параметров $\alpha p^2/Q$ и $\beta p^2/Q$. В области I при $\beta < \alpha/(1 + \alpha\tilde{p}^2/\tilde{Q})$ особая точка является

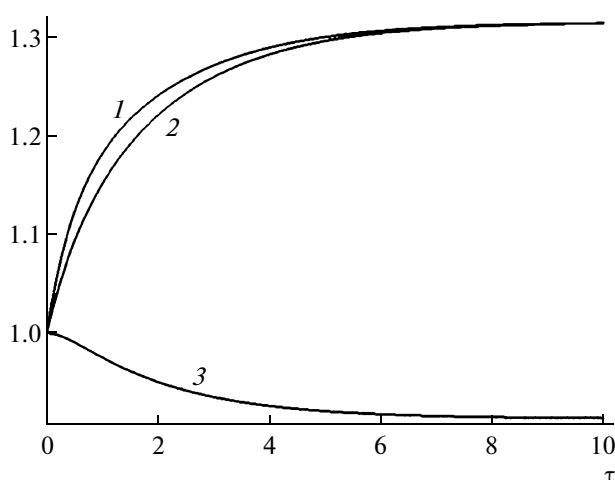


Рис. 2. Решение системы уравнений (16) при $\alpha = 1.8, \beta = 1.2, \tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_2 = 1.2$, где кривая 1 описывает предложение, 2 – потребление, 3 – индекс цен. Особая точка – устойчивый узел.

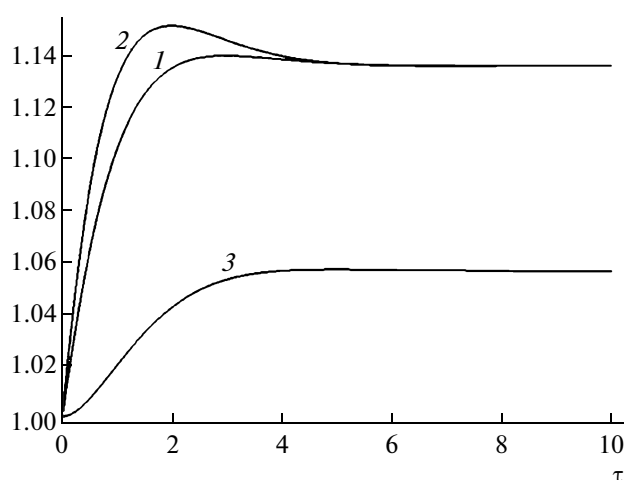


Рис. 3. Решение системы уравнений (16) при $\alpha = 0.8, \beta = 1.2, \tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_2 = 1.2$, где кривая 1 описывает предложение, 2 – потребление, 3 – индекс цен. Особая точка – устойчивый фокус.

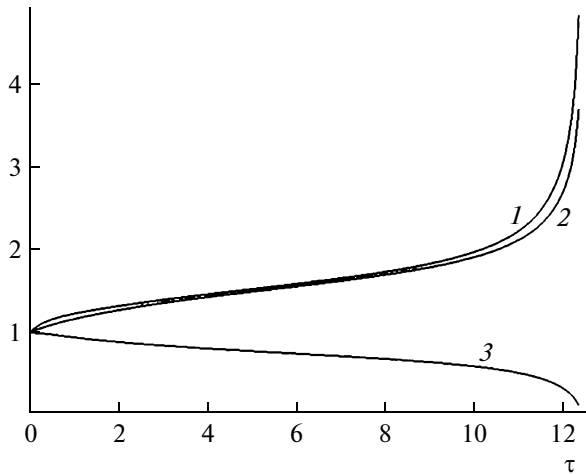


Рис. 4. Решение системы уравнений (16) при $\alpha = 2.8$, $\beta = 1.2$, $\tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_2 = 1.2$, где кривая 1 описывает предложение, 2 – потребление, 3 – индекс цен. Особая точка – седло.

неустойчивой седловой точкой, в области II при $\alpha > \beta > 4\tilde{Q}/\tilde{p} - \alpha$ – устойчивой седловой точкой, а в области III при $4Q/p^2 - \alpha > \beta > \alpha/(1 + \alpha p^2/Q)$ – устойчивым фокусом. При этом точка бифуркации A имеет координаты $\alpha p^2/Q = 1 + \sqrt{5} \approx 3.24$ и $\beta p^2/Q = 3 - \sqrt{5} \approx 0.76$. Примеры решения системы (16) при $\tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_2 = 1.2$, $\beta = 1.2$, когда достигается устойчивое равновесное состояние экономики, приведены на рис. 2, 3. В случае $\alpha = 1.8 > \beta$ (рис. 2) новые равновесные значения $\tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = 1.3$ достигаются при снижении уровня цен, а в случае $\alpha = 0.8 < \beta$ (рис. 3) равновесное значение $\tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = 1.13$ достигается при повышении уровня цен. Если же значения параметров α , β , p , Q соответствуют неустойчивой седловой особой точке, то экономика неизбежно “сваливается” в нереальное состояние с нулевым уровнем цен. Пример такого решения приведен на рис. 4.

В случае $Q_1 \neq Q_2$ система (16) не имеет стационарных решений. Все решения в этом случае четко детерминированы значениями параметров α , β , $\tilde{Q}_1$, $\tilde{Q}_2$ и делятся на два типа: инфляционные (эмиссия в потребительский сектор выше, чем в производственный, т.е. $Q_2 > Q_1$) и дефляционные (когда $Q_2 < Q_1$). В первом случае характер решения не зависит принципиальным образом от соотношения коэффициентов α и β , что наглядно следует из примеров решения системы (16) (рис. 5, 6) при $\tilde{Q}_1 = 1.2$, $\tilde{Q}_2 = 1.3$, $\beta = 1.2$ и $\alpha = 2.8$ и $\alpha = 0.8$, соответственно, где рост индекса цен остается монотонным по времени. При $Q_2 < Q_1$ характер дефляции зависит от соотношения коэффициентов α и β . При $\alpha < \beta$ дефляция остается монотонной на всем протяжении времени, как это следует из решения (16) при $\tilde{Q}_1 = 1.3$, $\tilde{Q}_2 = 1.2$, $\beta = 1.2$ и $\alpha = 0.8$ (рис. 7). В противном же случае, например при $\tilde{Q}_1 = 1.3$, $\tilde{Q}_2 = 1.2$, $\beta = 1.2$ и $\alpha = 1.8$, дефляционное решение (16) в некоторый момент времени заканчивается коллапсом индекса цен (рис. 8).

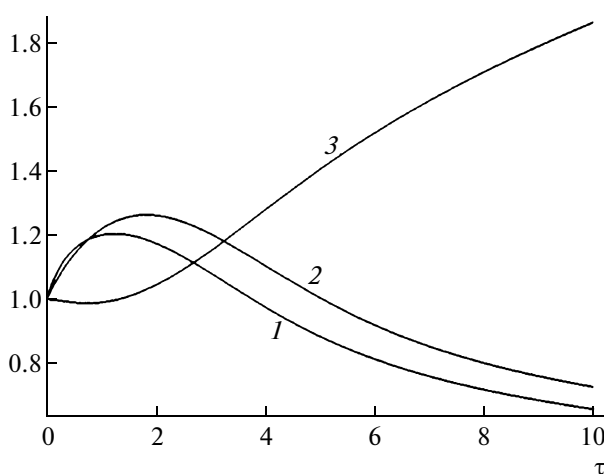


Рис. 5. Монотонный рост цен как решение системы уравнений (16) при $\alpha = 2.8$, $\beta = 1.2$, $\tilde{Q}_1 = 1.2$, $\tilde{Q}_2 = 1.3$, где кривая 1 описывает предложение, 2 – потребление, 3 – индекс цен.

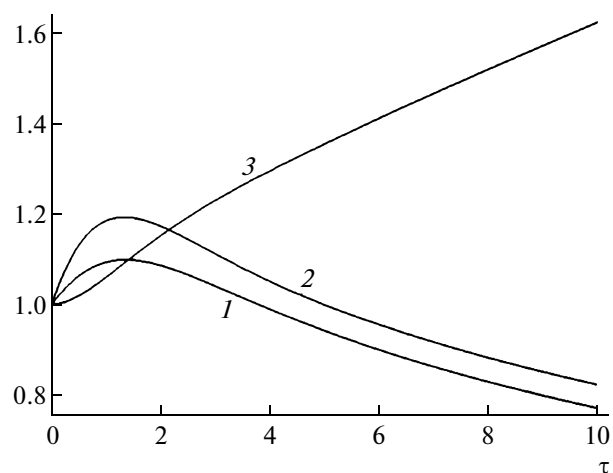


Рис. 6. Монотонный рост цен как решение системы уравнений (16) при $\alpha = 0.8$, $\beta = 1.2$, $\tilde{Q}_1 = 1.2$, $\tilde{Q}_2 = 1.3$, где кривая 1 описывает предложение, 2 – потребление, 3 – индекс цен.

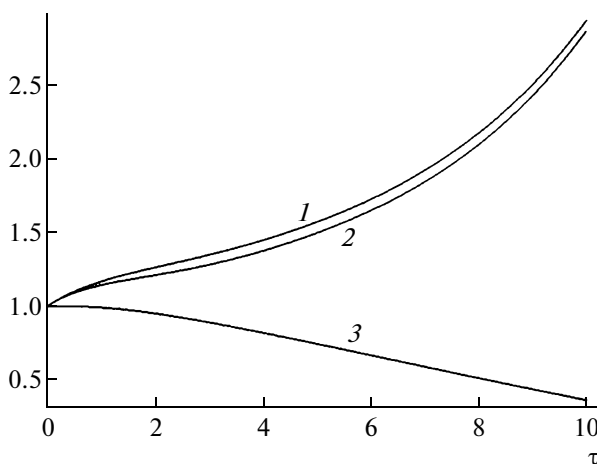


Рис. 7. Монотонная дефляция τ как решение системы уравнений (16) при $\alpha = 0.8$, $\beta = 1.2$, $\tilde{Q}_1 = 1.3$, $\tilde{Q}_2 = 1.2$, где кривая 1 описывает предложение, 2 – потребление, 3 – индекс цен.

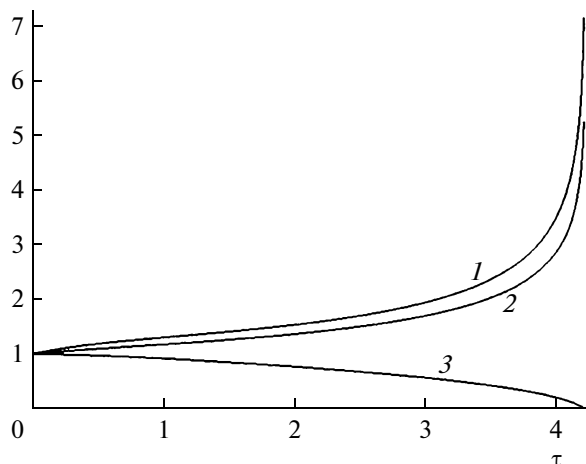


Рис. 8. Взрывная дефляция и коллапс цен как решение системы уравнений (16) при $\alpha = 1.8$, $\beta = 1.2$, $\tilde{Q}_1 = 1.3$, $\tilde{Q}_2 = 1.2$, где кривая 1 описывает предложение, 2 – потребление, 3 – индекс цен.

3. КВАЗИРАВНОВЕСНАЯ КИНЕМАТИКА КРИВЫХ СПРОСА И ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим непосредственно решения системы уравнений (11), (12) в частных производных. В общем случае для этого необходимо задать начальные и граничные условия. В качестве начального распределения выберем классический случай с пересечением кривых спроса и предложения, справедливый в краткосрочном периоде (Friedman, 1968; Lucas, 1977):

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1(0, \tilde{p}) &= 1 - a(\tilde{p} - 1), \\ \tilde{y}_2(0, \tilde{p}) &= 1 + b(\tilde{p} - 1).\end{aligned}\quad (19)$$

В данном случае спрос и предложение представляют собой, соответственно, убывающую ($a > 0$) и растущую ($b < 0$) прямые. Величина коэффициентов a и b , определяющих наклон начальных кривых, существенно зависит от величины экономики и ее типа. В дальнейшем ограничимся фиксированным значением коэффициентов $a = b = 0.5$. На концах интервала интегрирования $\tilde{p}_1 \leq \tilde{p} \leq \tilde{p}_2$ выберем нулевые граничные условия II рода для обеих функций:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{y}_1(\tau, \tilde{p}_1)}{\partial \tilde{p}} &= \frac{\partial \tilde{y}_2(\tau, \tilde{p}_1)}{\partial \tilde{p}} = 0, \\ \frac{\partial \tilde{y}_1(\tau, \tilde{p}_2)}{\partial \tilde{p}} &= \frac{\partial \tilde{y}_2(\tau, \tilde{p}_2)}{\partial \tilde{p}} = 0.\end{aligned}\quad (20)$$

Граничные условия вида (20) не фиксируют значение функций на границах области интегрирования, что делает решение задачи (11), (12) не зависящим от положения границ $\tilde{p}_1$ и $\tilde{p}_2$.

Численные решения нелинейной краевой задачи в частных производных (11), (12), (19), (20) находились с помощью явной разностной схемы второго порядка точности по τ и $\tilde{p}$. Экзогенные параметры $\tilde{Q}_1(\tau)$ и $\tilde{Q}_2(\tau)$ соответствовали случаю разовой эмиссии на 10–20%, интервал интегрирования был ограничен областью $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = (0.5 - 2.0)$, т.е. охватывал область 100% дефляции и 100% инфляции. Из всего множества решений нас интересуют только квазиравновесные, при которых кривые спроса и предложения в каждый момент времени имеют точку пересечения $\tilde{p}_E$ и позволяют таким образом найти $\tilde{p}_E(\tau)$ и, соответственно, $\tilde{y}_1(\tilde{p}_E, \tau) = \tilde{y}_2(\tilde{p}_E, \tau)$. Анализ численных решений показал, что динамику изменения формы кривых спроса и предложения определяют два механизма.

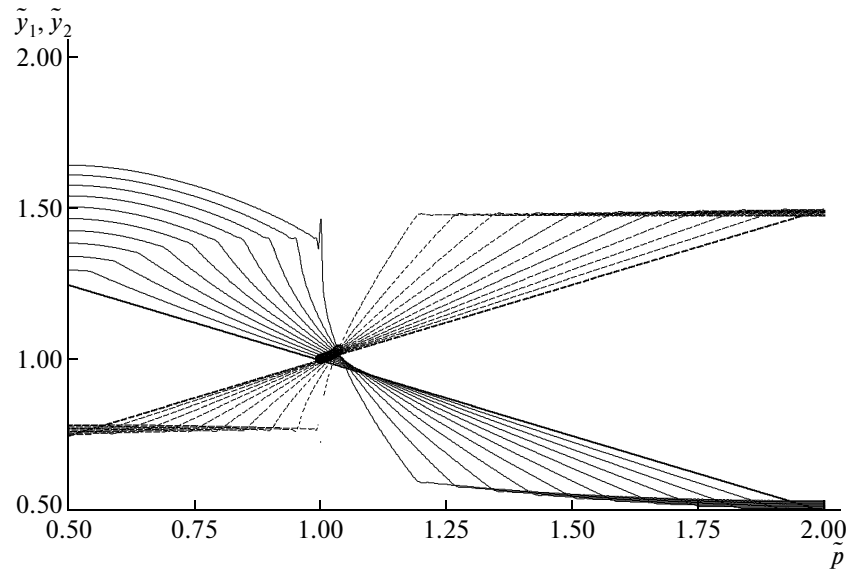


Рис. 9. Кинетическая динамика кривых спроса (сплошные кривые) $\tilde{y}_1(\tau_i, \tilde{p})$ и предложения $\tilde{y}_2(\tau_i, \tilde{p})$ (пунктирные кривые) реальной экономики в последовательные моменты времени $\tau_i = 0, 0.085, 0.17, \dots, 0.85$ при $\alpha = 0.03, \beta = 0.5, \tilde{Q}_1 = 1.1, \tilde{Q}_2 = 1.2$. Крупные точки – места пересечения $\tilde{y}_1$ и $\tilde{y}_2$. Эмиссия в сектор потребления выше, чем в сектор производства. Конечный рост цен 3.7%, рост производства-потребления – 3.3%.

Первый механизм – это кинематические волны, характерная скорость которых $\dot{\tilde{p}} = \tilde{y}_2 - \tilde{y}_1$ до точки пересечения кривых $\tilde{y}_1$ и $\tilde{y}_2$ положительна, а после точки пересечения – отрицательна. Поэтому левые и правые части обеих кривых движутся навстречу друг другу, стягиваясь в пределе в разрывное стационарное решение. Кинематические волны возникают при малости хотя бы одного параметра Деборы $\alpha, \beta \ll 1$. Пример численного решения с преобладающим проявлением кинематических волн приведен на рис. 9, 10 при значениях параметра Деборы $\alpha = 0.03, \beta = 0.5$ и разных уровнях эмиссии, отвечающих их значениям в реальной экономике². В первом случае $\tilde{Q}_1 = 1.1, \tilde{Q}_2 = 1.2$, а во втором – $\tilde{Q}_1 = 1.2, \tilde{Q}_2 = 1.1$. Как следует из приведенных решений, квазиравновесный уровень цен, найденный по точкам пересечения кривых спроса и предложения, растет в обоих случаях, причем по мере увеличения крутизны кривых спроса и предложения рост замедляется, а уровень цен приближается к своему равновесному значению.

Второй механизм – это кинетика, определяемая величиной правых частей уравнений (11), (12), которая стремится привести обе кривые к равновесной гиперболической форме $\tilde{y}_{1E}(\tilde{p}) = \tilde{Q}_1/\tilde{p}$ и $\tilde{y}_{2E}(\tilde{p}) = \tilde{Q}_2/\tilde{p}$. Кинетика превалирует и подавляет кинематические волны при $\alpha, \beta > 1$. Важно отметить, что равновесные гиперболические кривые спроса и предложения не пересекаются и, следовательно, поставленная задача по определению текущего уровня цен как точки пересечения кривых спроса и предложения не имеет решения. Пример такого решения задачи (11), (12), (19), (20) при $\alpha = 2, \beta = 3.5, \tilde{Q}_1 = 1.1, \tilde{Q}_2 = 1.2$ приведен на рис. 11. Здесь при большей эмиссии в потребительский сектор наблюдается квазиравновесный рост цен, который отражается в пересечении кривых спроса и предложения только до момента $\tau \leq 0.988$, а затем – кривые расслаиваются и перестают пересекаться. Аналогичная картина преобладания кинетических механизмов в динамике кривых спроса и предложения наблюдается при противоположном соотношении эмиссий (рис. 12). Здесь $\alpha = 2, \beta = 3.5, \tilde{Q}_1 = 1.2, \tilde{Q}_2 = 1.1$, но вместо инфляции до момента $\tau \leq 0.426$ имеет место дефляция, а затем кривые спроса и предложения опять расслаиваются и

² Размерная скорость установления совокупного спроса определяется частотой выдачи зарплаты и сравнима со скоростью установления уровня цен, поэтому в безразмерном виде $\beta \approx 0.5$. Скорость же установления уровня предложения, т.е. скорость подъема производства, более чем на порядок ниже, поэтому $\alpha \approx 0.03$.

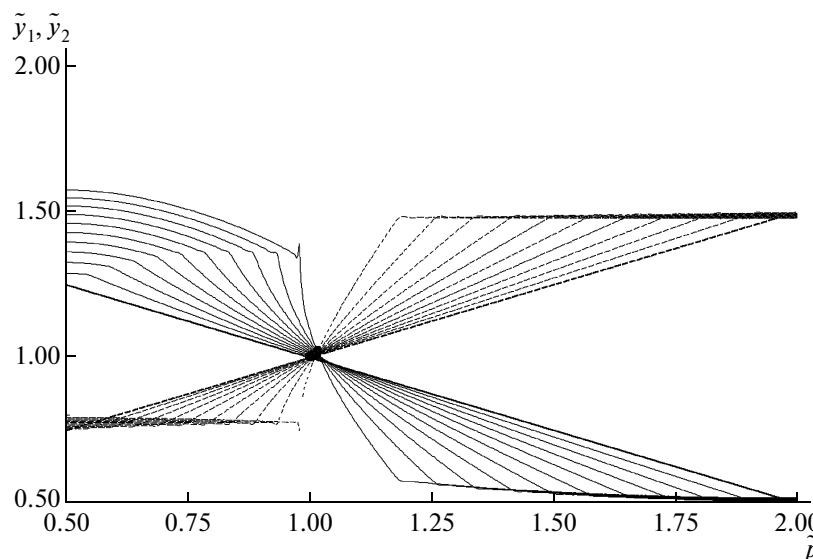


Рис. 10. Кинетическая динамика кривых спроса (сплошные кривые) $\tilde{y}_1(\tau_i, \tilde{p})$ и предложения $\tilde{y}_2(\tau_i, \tilde{p})$ (пунктирные кривые) реальной экономики в последовательные моменты времени $\tau_i = 0, 0.085, 0.17, \dots, 0.85$ при $\alpha = 0.03, \beta = 0.5, \tilde{Q}_1 = 1.2, \tilde{Q}_2 = 1.1$. Крупные точки – места пересечения $\tilde{y}_1$ и $\tilde{y}_2$. Эмиссия в сектор производства выше, чем в сектор потребления. Конечный рост цен 1.8%, рост производства-потребления –2.1%.

квазиравновесный механизм определения уровня цен перестает работать. С этого момента времени задача (11), (12), (19), (20) и задача (16) оказываются эквивалентными.

4. НЕРАВНОВЕСНАЯ КИНЕМАТИКА КРИВЫХ СПРОСА И ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Рассмотренный выше квазиравновесный метод определения уровня цен по пересечению кривых спроса и предложения дает результат не во всех случаях. Также этот метод не работает, если кривые спроса и предложения изначально не пересекаются. Скорректируем рассмотренную задачу как комбинацию системы уравнений в частных производных для $\tilde{y}_1(\tau, \tilde{p})$, $\tilde{y}_2(\tau, \tilde{p})$ и обыкновенного дифференциального уравнения для $\tilde{p}_E(\tau)$ в виде:

$$\frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial \tau} + (\tilde{y}_2 - \gamma \tilde{y}_1) \frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial \tilde{p}} = \alpha \left(\frac{\tilde{Q}_1}{\tilde{p}} - y_1 \right), \quad (21)$$

$$\frac{\partial \tilde{y}_2}{\partial \tau} + (\tilde{y}_2 - \gamma \tilde{y}_1) \frac{\partial \tilde{y}_2}{\partial \tilde{p}} = \beta \left(\frac{\tilde{Q}_2}{\tilde{p}} - y_2 \right), \quad (22)$$

$$\frac{d\tilde{p}_E}{d\tau} = \tilde{y}_2(\tau, \tilde{p}_E) - \gamma \tilde{y}_1(\tau, \tilde{p}_E).$$

В качестве начального распределения выберем не (19), а совпадающие равновесные кривые

$$\tilde{y}_1(0, \tilde{p}) = \tilde{y}_2(0, \tilde{p}) = 1/\tilde{p}. \quad (23)$$

Краевые условия оставим в прежнем виде (20). Начальное условие для задачи (22) в этом случае $\tilde{p}_E(0) = 1$ никак не привязано к начальной точке пересечения кривых спроса и предложения, а определяется только из условия нормировки безразмерных переменных. Задачи (21) и (22) имеют одностороннюю зависимость: задача (21) полностью автономна, а значения $\tilde{y}_{1E}(\tau) = \tilde{y}_1(\tau, \tilde{p}_E)$, $\tilde{y}_{2E}(\tau) = \tilde{y}_2(\tau, \tilde{p}_E)$ берутся в (22) из решения (21). Поэтому для однозначности решения задачи (22) необходимо, чтобы интервал интегрирования задачи (21) заведомо включал значение те-

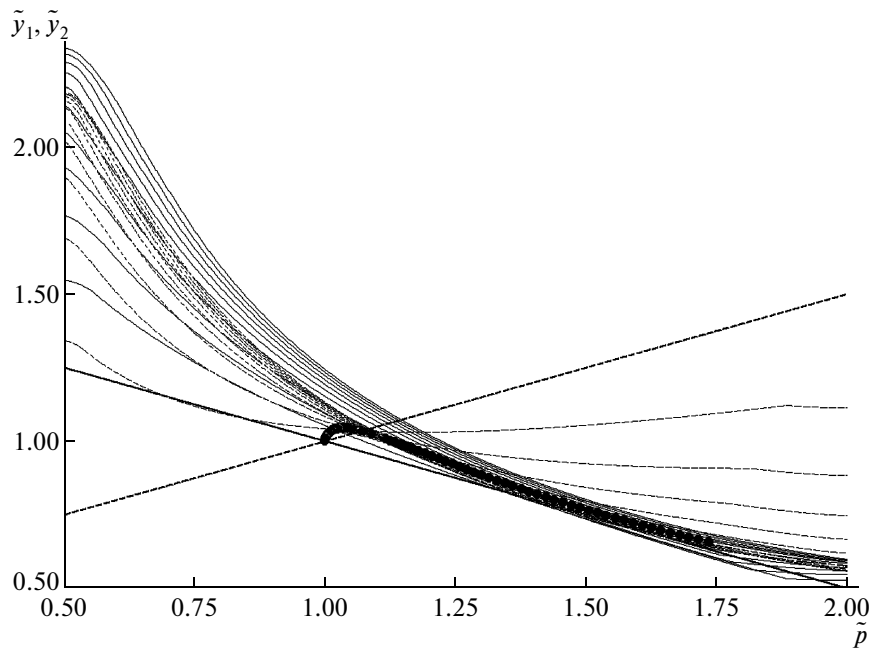


Рис. 11. Кинетическая динамика кривых спроса (сплошные кривые) $\tilde{y}_1(\tau_i, \tilde{p})$ и предложения $\tilde{y}_2(\tau_i, \tilde{p})$ (пунктирные кривые) в последовательные моменты времени $\tau_i = 0, 0.15, 0.3, \dots, 1.5$ при $\alpha = 2, \beta = 3.5, \tilde{Q}_1 = 1.1, \tilde{Q}_2 = 1.2$. Крупные точки – места пересечения $\tilde{y}_1$ и $\tilde{y}_2$. Эмиссия в сектор потребления выше, чем в сектор производства.

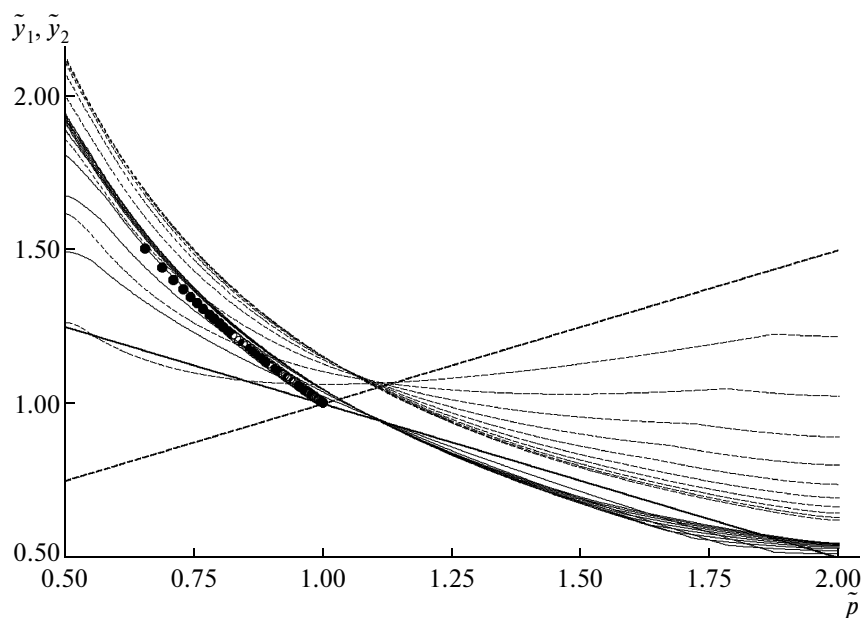


Рис. 12. Кинетическая динамика кривых спроса (сплошные кривые) $\tilde{y}_1(\tau_i, \tilde{p})$ и предложения $\tilde{y}_2(\tau_i, \tilde{p})$ (пунктирные кривые) в последовательные моменты времени $\tau_i = 0, 0.15, 0.3, \dots, 1.5$ при $\alpha = 2, \beta = 3.5, \tilde{Q}_1 = 1.2, \tilde{Q}_2 = 1.1$. Крупные точки – места пересечения $\tilde{y}_1$ и $\tilde{y}_2$. Эмиссия в сектор производства выше, чем в сектор потребления.

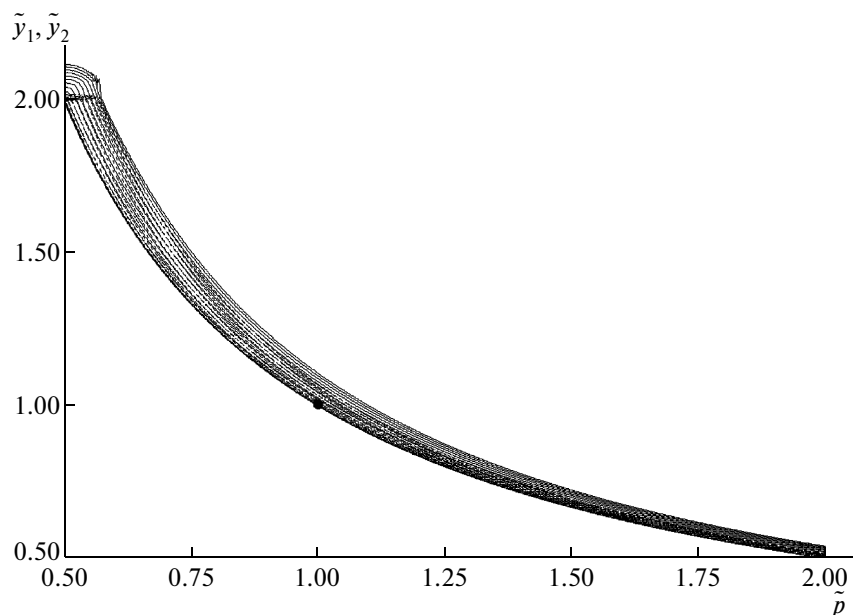


Рис. 13. Неравновесная кинематика кривых спроса (сплошные кривые) $\tilde{y}_1(\tau_i, \tilde{p})$ и предложения $\tilde{y}_2(\tau_i, \tilde{p})$ (пунктирные кривые) как решение задачи (20)–(23) в последовательные моменты времени $\tau_i = 0.2, 0.4, \dots, 2.0$ при $\alpha = 0.03, \beta = 0.5, \tilde{Q}_1 = 1.2, \tilde{Q}_2 = 1.1, \gamma = 1$. Эмиссия в производство выше, бюджет сбалансирован.

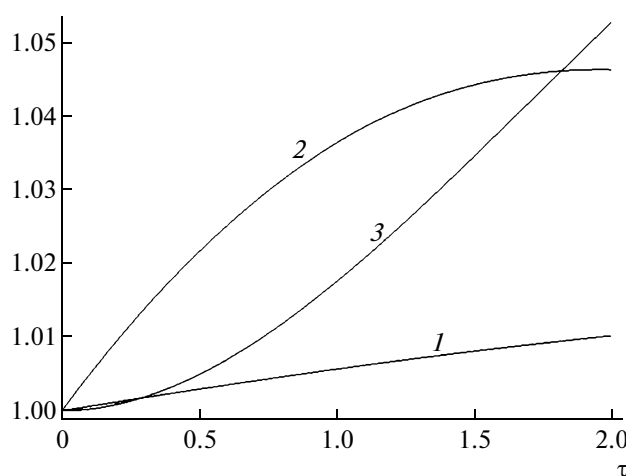


Рис. 14. Текущие предложение $\tilde{y}_{1E}(\tau)$, потребление $\tilde{y}_{2E}(\tau)$ и индекс цен $\tilde{p}_E(\tau)$ (соответственно кривые 1, 2, 3) как решение задачи (20)–(23) при $\alpha = 0.03, \beta = 0.5, \tilde{Q}_1 = 1.2, \tilde{Q}_2 = 1.1, \gamma = 1$.

кущего уровня цен $\tilde{p}_E \subset (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$. Значение параметра γ в данной постановке оказывается принципиальным и связано с начальным профицитом $\gamma < 1$ или с дефицитом $\gamma > 1$ потребительского бюджета. Задача (20)–(23) имеет смысл только при малых значениях параметров Деборы $\alpha, \beta \ll 1$, соответствующих реальной экономике, поскольку при $\alpha, \beta \gg 1$ кинематические механизмы формирования кривых спроса и предложения, связанные с величиной конвективных членов в (21), оказываются несущественными и задача (20)–(23) оказывается эквивалентной задаче (16).

Пример численного решения задачи (20)–(23) при $\alpha = 0.03, \beta = 0.5$, при большей эмиссии в производство $\tilde{Q}_1 = 1.2, \tilde{Q}_2 = 1.1$ и сбалансированном бюджете $\gamma = 1$ приведен на рис. 13 для кривых $\tilde{y}_1(\tau_i, \tilde{p})$ и $\tilde{y}_2(\tau_i, \tilde{p})$ в последовательные моменты времени и на рис. 14 для кривых $\tilde{y}_{1E}(\tau)$,

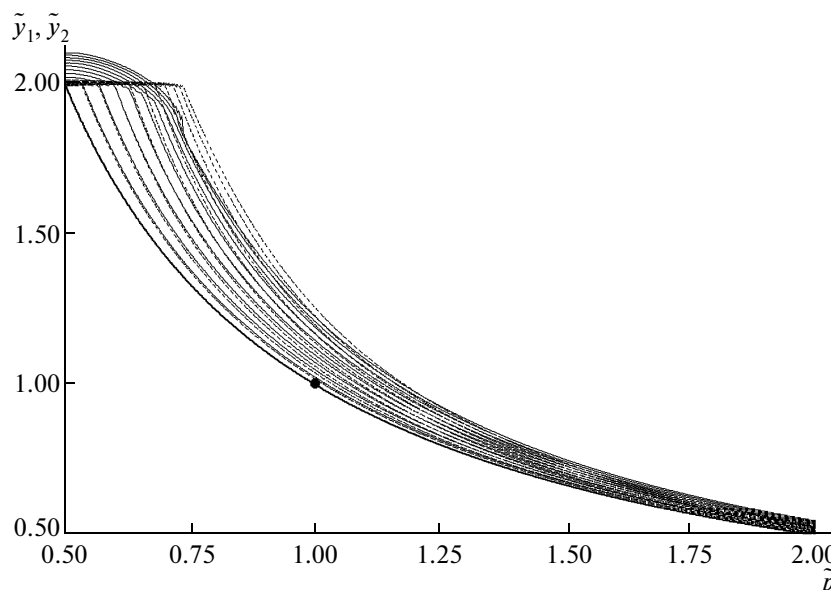


Рис. 15. Неравновесная кинематика кривых спроса (сплошные кривые) $\tilde{y}_1(\tau_i, \tilde{p})$ и предложения $\tilde{y}_2(\tau_i, \tilde{p})$ (пунктирные кривые) как решение задачи (20)–(23) в последовательные моменты времени $\tau_i = 0.16, 0.32, \dots, 1.6$ при $\alpha = 0.03, \beta = 0.5, \tilde{Q}_1 = 1.2, \tilde{Q}_2 = 1.1, \gamma = 0.9$. Эмиссия в производство выше, бюджет дефицитный.

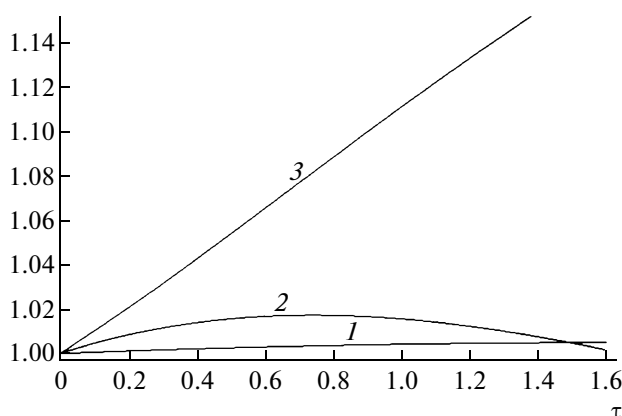


Рис. 16. Текущие предложение $\tilde{y}_{1E}(\tau)$, потребление $\tilde{y}_{2E}(\tau)$ и индекс цен $\tilde{p}_E(\tau)$ (соответственно кривые 1, 2, 3) как решение задачи (20)–(23) при $\alpha = 0.03, \beta = 0.5, \tilde{Q}_1 = 1.2, \tilde{Q}_2 = 1.1, \gamma = 0.9$.

$\tilde{y}_{2E}(\tau), \tilde{p}_E(\tau)$. Как легко увидеть, в этом случае преобладает рост уровня потребления и сравнимый с ним рост уровня цен. Если при тех же значениях параметров снизить только величину $\gamma = 0.9$ (т.е. 10% начальный дисбаланс спроса и предложения или неудовлетворенный спрос), то из решений задачи (20)–(23) (рис. 15, 16) видно, что это приведет к существенному снижению уровней потребления и предложения, сопровождающихся более чем трехкратным повышением уровня цен. Еще большее повышение уровня цен возникнет при одновременном снижении γ и преобладании эмиссии в потребление. Такой случай решения системы (20)–(23) при значениях параметров $\alpha = 0.03, \beta = 0.5, \tilde{Q}_1 = 1.1, \tilde{Q}_2 = 1.2, \gamma = 0.9$ приведен на рис. 17, 18. Отметим, что во всех случаях на динамику кривых спроса и предложения заметное влияние оказывают кинематические волны, поэтому решения задач (20)–(23) и (16) оказываются нетождественными.

Тем самым показано, что динамику изменения кривых спроса и предложения в немалой степени определяют кинематические волны инфляции и дефляции и что расчет текущих значений

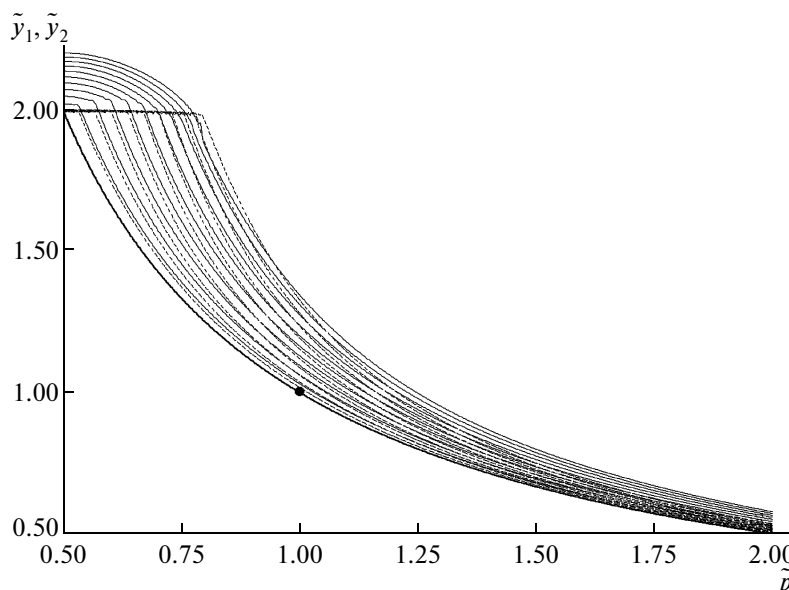


Рис. 17. Неравновесная кинематика кривых спроса (сплошные кривые) $\tilde{y}_1(\tau_i, \tilde{p})$ и предложения $\tilde{y}_2(\tau_i, \tilde{p})$ (пунктирные кривые) как решение задачи (20)–(23) в последовательные моменты времени $\tau_i = 0.15, 0.3, \dots, 1.5$ при $\alpha = 0.03, \beta = 0.5, \tilde{Q}_1 = 1.2, \tilde{Q}_2 = 1.1, \gamma = 0.9$.

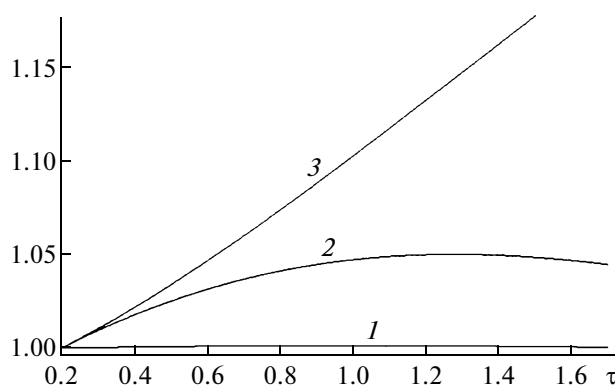


Рис. 18. Текущие предложение $\tilde{y}_{1E}(\tau)$, потребление $\tilde{y}_{2E}(\tau)$ и индекс цен $\tilde{p}_E(\tau)$ (соответственно кривые 1, 2, 3) как решение задачи (20)–(23) при $\alpha = 0.5, \beta = 0.03, \tilde{Q}_1 = 1.1, \tilde{Q}_2 = 1.2, \gamma = 0.9$.

спроса, предложения и уровня цен можно проводить классическим способом, если кривые совокупного спроса и предложения пересекаются (динамическое равновесие) и если такое равновесие отсутствует. Правомерность модели и ее внутренняя непротиворечивость показаны на многочисленных примерах численных расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Гранберг А.Г. (1985): Динамические модели народного хозяйства. М.: Экономика.
- Занг В.-Б. (1999): Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории. М.: Мир.
- Мэнкью Н.Г. (1994): Макроэкономика. М.: Изд-во МГУ.
- Накоряков В.Е., Гасенко В.Г. (2002): Математическая модель плановой макроэкономики // *Экономика и мат. методы*. Т. 38. № 2.
- Накоряков В.Е., Гасенко В.Г. (2004): Кинетическая модель инфляции // *Экономика и мат. методы*. Т. 40. № 1.

- Тябин В.Н.** (2001): Комплекс макроэкономических моделей инфляции // *Экономика и мат. методы*. Т. 37. № 3.
- Dornbusch R., Fisher S.** (1986): Stopping Hyperinflations: Past and Present // *Weltwirtschaftliches Archive*. Vol. 122. April.
- Friedman M.** (1968): The Role of Monetary Policy // *American Econ. Rev.* Vol. 58. March.
- Friedman M., Schwartz A.J.** (1963): A Monetary History of the United States 1867–1960. N.Y.: Princeton University Press.
- Friedman M., Schwartz A.J.** (1982): Monetary Trends in the United States and the United Kingdom: Their Relation to Income, Prices and Interest Rates, 1876–1975. Chicago: University of Chicago Press.
- Lucas R.E.Jr.** (1973): Some International Evidence on Output-inflation Tradeoffs // *American Econ. Rev.* Vol. 63. June.
- Lucas R.E.Jr.** (1977): Understanding Business Cycles // *Stabilization of the Domestic and International Econ.* Vol. 5 of Carnegie-Rochester Conference on Public Policy. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.
- Solow R.** (1988): Growth Theory and After // *The American Econ. Rev.* Vol. 78.
- Tobin J.** (1965): Money and Economic Growth // *Econometrica*. Vol. 33. № 4.

Поступила в редакцию
22.11.2006 г.

Partial Derivative Equations for Macroeconomics

V. Ye. Nakoryakov, V. G. Gasenko

The systems of partial derivative equations of hyperbolic type for aggregate demand (AD) and aggregate supply (AS) as functions of two independent variables (time and price index) are suggested for macroeconomics. It is shown that two mechanisms have great influence on dynamics of AD and AS curves: kinetics, or the velocity, of equilibrium setting between AS and AS curves and cinematic waves of inflation and deflation. The current values of aggregate demand, aggregate supply and price index can be calculated within the model for both cases of crossing and not crossing AD and AS curves.