

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ**

**БЮДЖЕТНАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ МОДЕЛИ НЕЙМАНА–ГЕЙЛА
В НЕПРЕРЫВНОМ ВРЕМЕНИ***

© 2010 г. В.З. Беленький¹

(Москва)

Формулируется версия модели Неймана–Гейла в непрерывном времени и дается ее характеристическое описание в терминах “бюджетных” функций (потенциальной функции G и функции затрат g). Эти функции являются решениями прямого и обратного уравнений Беллмана и полностью определяют предельные (при $t \rightarrow \infty$) области достижимости $\hat{\omega}(x)$ для приведенных траекторий, исходящих из произвольной начальной точки x фазового пространства. Полученные в статье результаты переносят на непрерывную версию хорошо известные свойства модели Неймана–Гейла в дискретном времени.

Модель Неймана–Гейла (НГ-модель) в дискретном времени широко известна (наиболее компактная ее формулировка дана в (Карлин, 1964)) и подробно изучена. Менее изучена версия НГ-модели в непрерывном времени, хотя принципиальная возможность получения здесь результатов, аналогичных дискретной модели, отмечалась еще в работах (Макаров, 1969; Макаров, Рубинов, 1973). Некоторые варианты непрерывных моделей леонтьевского типа изучались в (Дюкалов, Илютович, 1973, 1974). Наиболее продвинутые результаты по непрерывной модели принадлежат С.Ю. Яковенко (Яковенко, 1986, 1987, 1989); они опираются на общетеоретические работы Р. Роккафеллара по выпуклому анализу и вариационному исчислению, в частности (Rockafellar, 1970, 1971). Наше изложение следует работе (Яковенко, 1987).

Цель статьи – получение характеристического описания непрерывной версии замкнутой НГ-модели, аналогичное описанию дискретной версии, полученному ранее в работе (Беленький, 1990). Именно на непрерывную версию распространяется понятие “бюджетные функции” – потенциальная функция G и функция затрат g . Эти функции являются решениями прямого и обратного уравнений Беллмана и дают полную характеристику асимптотической (при $t \rightarrow \infty$) области достижимости для приведенных траекторий, исходящих из (произвольной) начальной точки x .

Основные результаты сформулированы в форме теорем, доказательства которых вынесены в приложение; часть утверждений доказана строго, часть – схематично.

1. НГ-МОДЕЛЬ, ОПИСАНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ ТРАЕКТОРИЙ

1.1. Исходные позиции. Модель Неймана–Гейла в непрерывном времени (в годах) задается пространством состояний $X := R_+^n$, пространством скоростей $U := \dot{R}^n$ и определенным в их декартовом произведении технологическим конусом $Z \subset X \times U$, выпуклым и замкнутым. Точка $x \in X$ интерпретируется как вектор ресурсов, точка $v \in U$ – как вектор скорости эволюции ресурсов во времени.

Считаем, что в пространствах X, U введено естественное векторное (покоординатное) упорядочение.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (проект 06-02-00082).

¹ Автор выражает искреннюю благодарность рецензенту статьи за полезные замечания, которые позволили устранить ряд ошибочных утверждений первоначальной версии. Более того, “работа над ошибками” привела к существенному продвижению автора в понимании исследуемой задачи (см., например, замечания 2, 7) и, соответственно, к улучшению статьи.

1.2. Гейловская технология. Обычно описание модели дается в терминах точечно-множественного *технологического отображения* (далее – технологии) $\omega: X \rightarrow U$, связанного с конусом Z отношением $\omega(x) := \{v \in U \mid (x, v) \in Z\}$ $x \in X$; $\omega(x)$ – множество скоростей v , доступных в состоянии x .

Замечание 1. Предполагается, что в описание технологии включены и трудовые ресурсы, которые рассматриваются как воспроизводимый, наряду с прочими, фактор производства. Такая модель называется *замкнутой по трудовым ресурсам*, основной целью развития в ней является экономический рост с максимально возможным темпом.

В данной работе принимается, что гейловская технология удовлетворяет следующим условиям (посылкам).

T1. Для любого $x \in X$ множество $\omega(x) \subset U$ непусто, замкнуто, выпукло и ограничено.

T2. Положительная однородность: $\omega(\lambda x) = \lambda \omega(x)$, $\lambda > 0$.

T3. Супераддитивность: $\omega(x^1 + x^2) \supseteq \omega(x^1) + \omega(x^2)$ $\forall x^1, x^2 \in R_+^n$ (сумма множеств понимается в смысле Минковского).

T4. Полнота: $\forall (v^1, v^2 \in \omega(x), v^1 \leq v^2): v^1 \leq v \leq v^2 \Rightarrow v \in \omega(x)$.

T5. Допустимость: любой вектор скорости $v \in \omega(x)$ в состоянии x :

$$x + vt \in R_+^n \quad \forall v \in \omega(x). \quad (1)$$

Это означает, что если компонента $x_i = 0$, то $v_i \geq 0$.

Условие (1) обеспечивает корректность модели. В частности, из него следует, что $\omega(\mathbf{0}) \subset \dot{R}_+^n$; полагая далее в T3 $x^1 = x^2 = \mathbf{0}$, получаем $\omega(\mathbf{0}) \supseteq 2\omega(\mathbf{0})$, откуда следует (с учетом ограниченности множества скоростей) $\omega(\mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\}$.

1.3. Траектории, условие свободного расходования, области достижимости.

Определение 1а. *Траекторией* НГ-модели называется вектор-функция времени $\mathbf{x} = (x_t, t \geq 0)$ со значениями в X , такая, что:

а) функция x_t непрерывна;

б) производная \dot{x}_t кусочно-непрерывна, причем в точках разрыва производная понимается в смысле Кларка (Кларк, 1988) (является замкнутой функцией);

в) $\dot{x}_t \in \omega(x_t) \quad \forall t > 0^2$.

В этой формулировке траектория определена на всей полуоси R_+ ; это корректно в силу непустоты множеств $\omega(x)$ (посылка T1) и условия допустимости T5. Траектории, исходящие (в момент времени $t = 0$) из некоторой начальной точки $x_0 = a \in X$, образуют *пучок*, обозначаемый $\mathbf{Tr}(a)$.

В экономических приложениях обычно имеют дело не с бесконечными траекториями, а с траекториями конечной длины. Для некоторого фиксированного $T \geq 0$ множество

$$D := \{y \in X \mid y = x(T) \text{ для некоторой траектории } \mathbf{x} \in \mathbf{Tr}(a)\}$$

(срез пучка траекторий $\mathbf{Tr}(a)$) было бы естественно назвать областью достижимости. Однако D не удовлетворяет условию *нормальности* (термин предложен в (Макаров, Рубинов, 1973))

$$(y \in D, z \in X, z \leq y) \Rightarrow z \in D,$$

экономически вполне оправданному применительно к понятию “область достижимости” (в отличие от поля скоростей $\omega(x)$, которое может не быть нормальным даже при выполнении свойства полноты T4) и в реальных моделях может нарушаться; такое положение имеет место, в частности, в примере, рассматриваемом ниже в п. 5.2.

Для устранения указанного недостатка примем условие нормальности и введем следующее определение.

² Более строго надо было бы писать $\dot{x}_t \subset \omega(x_t)$ (поскольку \dot{x}_t является множеством), но для простоты эти “тонкости” опускаем.

Определение 2а. Для произвольных $T \geq 0$ и $a \in X$ областью достижимости называется множество

$$\Omega^T(a) := \{y \in R_+^n \mid y \leq x(T) \text{ для некоторой траектории } x \in \text{Tr}(a)\}.$$

Замечание 2. В этом определении параметр T имеет смысл “горизонта планирования”. Условие нормальности в этом контексте удобнее интерпретировать как “условие свободного расходования” (если какие-то продукты получены в излишнем количестве, избыток может свободно уничтожаться). В дискретной НГ-модели это условие всегда выполняется. Подчеркнем, что принятие условия свободного расходования приводит к необходимости формальной поправки к определению траектории конечного горизонта T : в завершающий момент T траектория может иметь разрыв – скачок вниз; тем самым в конечной точке допускается нарушение ограниченности (снизу) множества скоростей (посылка Т1), некоторые компоненты вектора скорости могут обращаться в $-\infty$.

Условие свободного расходования принципиально важно для результатов данной статьи; без него теряют силу нижеследующая основополагающая лемма 1 и вытекающее из нее свойство автоморфизма оператора Беллмана (19). В примере 1 п. 5.1 показано (замечание 7), к чему это может привести.

Лемма 1. В принятых посылках Т1–Т5 при каждом фиксированном T отображение $x \rightarrow \Omega^T(x)$, $x \cup X$ является гейловским отображением дискретной НГ-модели (в которой “единицей времени” служит интервал длины T).

Доказательство. Согласно (Карлин, 1964, с. 392) дискретное точечно-множественное отображение называется гейловским, если оно обладает свойствами, аналогичными Т1–Т3 отображения ω (обозначим их О1–О3), и, дополнительно, свойствами

О4. $\Omega(x) \ni \mathbf{0} \quad \forall x \in X$.

О5. $\Omega(\mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\}$.

Покажем, что для отображения $\Omega = \Omega^T$ все эти свойства имеют место. Свойство О5 следует из отмеченного выше равенства $\omega(\mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\}$, О4 вытекает из условия свободного расходования, О2 очевидно.

Осталось показать О1, О3; они следуют из того, что график Z гейловской технологии является выпуклым конусом. Последнее порождает выпуклость “трубки” траекторий $\text{Tr}(a)$. Именно пусть $a^1, a^2 \in X$ – две начальные точки (возможно, $a^1 = a^2 = a$) и им отвечают траектории $(x_t^1) \in \text{Tr}(a^1)$, $(x_t^2) \in \text{Tr}(a^2)$, направляемые скоростями (v_t^1) , (v_t^2) . Пусть $a^\lambda := (1 - \lambda)a^1 + \lambda a^2$, $\lambda \in [0, 1]$, – некоторая промежуточная (взвешенная) начальная точка. Тогда траектория $(x_t^\lambda) := (1 - \lambda)(x_t^1) + \lambda(x_t^2)$, направляемая скоростью $(v_t^\lambda) := (1 - \lambda)(v_t^1) + \lambda(v_t^2)$, принадлежит пучку $\text{Tr}(a^\lambda)$. ■

Замечание 3. В (Карлин, 1964) на отображение Ω накладывается еще свойство *монотонности*:

$$(x^1, x^2 \in X, \quad x^1 \geq x^2) \Rightarrow \Omega(x^1) \supseteq \Omega(x^2). \tag{2}$$

Однако это свойство не является независимым, оно автоматически вытекает из супераддитивности О3 и свойства О4:

$$x^1 \geq x^2 \Rightarrow x^1 = x^2 + z, \quad z := x^1 - x^2 \in X,$$

и поэтому

$$\Omega(x^1) = \Omega(x^2 + z) \supseteq \Omega(x^2) + \Omega(z) \supseteq \Omega(x^2) + \{\mathbf{0}\} = \Omega(x^2).$$

Таким образом, отображение Ω^T монотонно.

Важнейшими элементами множества $\Omega^T(x)$ являются “недоминируемые состояния”, подмножество которых называется *верхней границей Парето*:

$$\text{Pa}^T := \{y \in \Omega^T(a) \mid z > y \Rightarrow z \notin \Omega^T(a)\}$$

(слабая граница); если заменить здесь условие $z > y$ на $z \geq y$, $z \neq y$, то такая граница называется сильной.

Траектория $x \in \text{Tr}(a)$ называется *эффективной*, если при всех $t \geq 0$

$$x_t \in \text{Pa}'(a).$$

1.4. Равновесие, регулярная модель.

Определение 3. Равновесием модели называется тройка $\{\alpha \in \dot{R}, h \in X, \pi \in X^*\}$, такая, что выполняются соотношения³:

$$\alpha h \in \omega(h); \quad (3a)$$

$$\pi v \leq \alpha \pi x \quad \forall (x, v) \in Z. \quad (3б)$$

В этом определении векторы h, π могут быть выбраны с точностью до произвольного множителя. Будем считать, что нормировка h произвольна, а ковектор $\pi \in X^*$ нормируется условием $\pi h = 1$. Равновесие в НГ-модели существует всегда (Яковенко, 1987), но оно может быть неединственным.

Введем функцию

$$\Pi(x) := \pi x, \quad x \in R_+^n; \quad (4)$$

из условия (3б) следует, что на любой траектории имеет место оценка

$$\Pi(x_t) \leq e^{\alpha t} \Pi(x_0), \quad T \geq 0. \quad (5)$$

Множество пар $(x, v) \in Z$, для которых в (3б) достигается равенство, называется *неймановской гранью* \mathbf{N} . Если некоторая траектория движется по неймановской грани (более строго $(x_t, \dot{x}_t) \in \mathbf{N}$; назовем такую траекторию *неймановской*), то в (5) достигается равенство: функция (4) растет экспоненциально с темпом α . В частности, неймановской траекторией будет траектория, движущаяся вдоль *неймановского луча* $\mathbf{I} := R_+ h$.

Определение 4. НГ-модель назовем *регулярной*, если равновесие единственно, с точностью до нормировки векторов h, π , причем оба эти вектора строго положительны $h > \mathbf{0}, \pi > \mathbf{0}$, и каждая неймановская траектория сходится (в угловой метрике⁴) к неймановскому лучу⁵:

$$|x_t / \Pi(x_t) - h| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Как будет видно ниже, условие (6) означает, что неймановский луч \mathbf{I} является аттрактором бесконечных эффективных траекторий (магистралью).

В данной работе рассматривается регулярная НГ-модель.

1.5. Индикатриса роста. Для анализа модели полезно ввести следующее понятие.

Определение 5. *Индикатрисой роста* называется функция $\beta: X \rightarrow \dot{R}$, определенная соотношением

$$\beta(x) := \max \{ \lambda \in \dot{R} \mid \lambda x \in \omega(x) \}, \quad x \in X. \quad (7)$$

Из посылки T2 следует, что функция β постоянна вдоль каждого луча (положительно однородна нулевой степени) и значение $\beta(x)$ показывает, с каким темпом может идти развитие системы по “лучевой” траектории, т.е. при движении вдоль луча, “натянутого” на точку x ; этим и объясняется название функции. Очевидно, что

$$\alpha = \max_{x \in X} \beta(x). \quad (8)$$

Ниже будут рассматриваться *приведенные* траектории $\xi = (\xi_t := e^{-\alpha t} x_t, t \geq 0)$ из оценки (5) следует, что они ограничены $\Pi(\xi_t) \leq \Pi(x_0) \quad \forall t$.

³ Скаляры оси \dot{R} имеют размерность [1/год].

⁴ Строгая положительность ковектора π позволяет рассматривать функцию $\Pi(x)$ как норму вектора $x \in R_+^n$.

⁵ Это условие несколько слабее, чем условие строгого равновесия, которое состоит в том, что неймановской гранью является неймановский луч \mathbf{I} .

Замечание 4. Употребляя термин “рост с темпом α ”, мы неявно подразумеваем, что модель *продуктивна*: $\alpha > 0$. Это предположение придает модели экономически содержательный смысл. Покажем, что оно не уменьшает общности получаемых результатов.

Поскольку каждое множество $\omega(x)$ ограничено и выполняется посылка T2, при произвольном $\mu \in \dot{R}$ *сдвинутая* технология

$$\omega_\mu(x) := \{u \in U \mid u := v + \mu x \quad v \in \omega(x)\}, \quad x \in X,$$

сохраняет основные характеристики модели – равновесие $\{\alpha, h, \pi\}$ и вводимые ниже бюджетные функции G, g инвариантны относительно сдвига: они не меняются, кроме значения параметра α , которое заменяется на $\alpha + \mu$ (положительное при достаточно большом μ).

1.6. Класс допустимых функций. Функция $\Phi : R_+^n \rightarrow R_+$ *допустима*, если она обладает следующими свойствами:

а) монотонность: $\Phi(0) = 0$ и $\Phi(x)$ монотонно возрастает по x ;

б) линейность (положительная однородность): $\Phi(\lambda x) = \lambda \Phi(x) \quad \forall x \in R_+^n, \lambda \in R_+$. Класс таких функций обозначается W ; в нем выделяются два самостоятельных подкласса: \bar{W} – функции, выпуклые вверх, и \underline{W} – функции, выпуклые вниз. Известно, что каждая функция $\Phi \in W$ непрерывна в $\text{Int } R_+^n$, кроме того, в (Беленький, 1981, лемма 1) показано, что Φ полунепрерывна снизу всюду в R_+^n ; для функций из \bar{W} последнее влечет непрерывность всюду в R_+^n .

Знак неравенства $\Phi^1 \preceq \Phi^2$ понимается в обычном смысле: одна функция меньше другой на всем пространстве R_+^n .

1.7. Основная теорема. Аналогично дискретному случаю, рассмотренному в (Беленький, 1990), для непрерывной НГ-модели имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть НГ-модель *регулярна*, тогда:

1. Из любой точки $a \in \text{Int } X$ исходит ровно одна (бесконечная) эффективная траектория $\mathbf{x}(a) = (x_t)$.

2. В приведенной форме $\xi_t := e^{-\alpha t} x_t$ эффективная траектория $\xi(a)$ имеет предельную точку, и она находится на *неймановском луче*:

$$\xi^+ := \lim_{t \rightarrow \infty} \xi_t = G(a)h \in \mathbf{I}; \tag{9}$$

величина $G(a)$ является максимальной координатой точки на *неймановском луче* \mathbf{I} , *достижимой* (в пределе) из начального состояния $a \in \text{int} X$.

3. Функция $G: X \rightarrow R_+$, определенная⁶ соотношением (9), принадлежит классу \widehat{W} и удовлетворяет уравнению Якоби–Гамильтона–Беллмана (ЯГБ-уравнение (Беленький, 2007, п. 4.3.1))

$$G: \alpha \Phi(x) = \max_{v \in \omega(x)} [\text{grad } \Phi(x), v], \quad x \in \text{Int } R_+^n, \quad \Phi \in \widehat{W}, \quad \Phi(h) = 1 \tag{10}$$

(в квадратных скобках стоит скалярное произведение ковектора $\text{grad } \Phi(x) \in X^*$ и вектора скорости v); функция G является единственным решением уравнения (10).

4. Эффективная траектория $\mathbf{x}(a)$ строится по правилу

$$x_0 := a, \quad \dot{x}_t = \arg \max_{v \in \omega(x_t)} [\text{grad } G(x_t), v], \quad t \geq 0, \tag{11}$$

при этом

$$G(x_t) = e^{\alpha t} G(a) \quad \forall t \geq 0. \tag{12}$$

Примечание. Выпуклые функции Φ , определенные на R_+^n , дифференцируемы почти всюду в $\text{Int } R_+^n$. Соотношение (10) достаточно понимать в этом смысле; в обобщенном смысле оно справедливо всюду: для функции G в каждой точке $x \in \text{Int } R_+^n$ существует обобщенный градиент, удовлетворяющий равенству (10).

⁶ Строго говоря, (9) определяет функцию G только во внутренних точках ортанта R_+^n ; подразумевается, что на границу ортанта она продолжается по непрерывности.

Соотношение (9) позволяет назвать функцию G *потенциальной функцией* (далее – “потенциалом”) экономической системы, моделируемой описанной НГ-моделью; в то же время (11) показывает, что потенциальная функция является генератором эффективных траекторий.

1.8. НГ-модель в приведенной форме. Если ввести *приведенную* технологию

$$\tilde{\omega}(x) = \{u \in U \mid u := v - \alpha x, \quad v \in \omega(x)\}, \quad x \in X, \quad (13)$$

то она отличается от исходной только темпом роста $\tilde{\alpha} = 0$ (см. замечание 4), поэтому условия равновесия (3) примут вид:

$$\mathbf{0} \in \tilde{\omega}(h), \quad \pi u \leq 0 \quad \forall (x, u) \in \tilde{Z}. \quad (14)$$

Потенциальная функция не изменится, но ЯГБ-уравнение (10) примет вид:

$$G: \max_{u \in \tilde{\omega}(x)} [\text{grad } \Phi(x), u] = 0, \quad x \in \text{Int } R_+^n, \quad \Phi \in \hat{W}, \quad \Phi(h) = 1. \quad (15)$$

Приведенная эффективная траектория $\xi(a)$ строится по правилу

$$\xi(0) = a, \quad \dot{\xi}_t = \arg \max_{u \in \tilde{\omega}(x)} [\text{grad } G(\xi_t), u], \quad t \geq 0, \quad (16)$$

при этом

$$G(\xi_t) \stackrel{!}{=} G(a), \quad t \geq 0. \quad (17)$$

Таким образом, в приведенной форме **эффективная траектория движется по линии уровня потенциальной функции, проходящей через начальную точку**. Ее *орбита* (т.е. параметрическая кривая $\{\xi_t, t \geq 0\}$ в фазовом пространстве) начинается в точке $\xi_0 = a$ и заканчивается в точке $\xi^+ = G(a)h$.

Анализ оптимальных траекторий НГ-модели удобно проводить именно в приведенной форме, поскольку такие траектории остаются ограниченными; так мы и будем поступать в дальнейшем. Множества достижимости и их границы Парето в приведенной форме будут снабжаться дополнительным знаком “~” сверху.

Замечание 5. Приведенные формы исходной и сдвинутой технологии совпадают; это еще раз показывает несущественность предположения о продуктивности модели (замечание 4).

2. ОПТИМИЗАЦИОННАЯ НГ-МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

2.1. Постановка оптимизационной задачи. Поставим в рамках замкнутой (в смысле замечания 1) НГ-модели оптимизационную задачу развития экономической системы, функционирующей в непрерывном времени. В замкнутой модели экзогенно задаваемая функция полезности потребления (что имеет место в моделях, *открытых по потреблению*) отсутствует, и критерий оптимизации задается выбором горизонта планирования T и *терминального функционала* Ψ . Отметим, что априорный выбор конкретного значения T и функционала Ψ – трудная проблема при постановке задачи, известная как “проблема хвоста”.

Итак, сформулируем задачу.

Задача 1. Для данных начальной точки $x_0 = a \in X$, горизонта планирования $T > 0$ и терминального функционала $\Psi \in \hat{W}$ найти траекторию ξ *приведенной* НГ-модели, максимизирующую критериальный функционал $Cr(\xi) = \Psi(\xi_T)$:

$$\Psi(\xi_T) \rightarrow \max_{\xi \in \mathbf{Tr}(x)} = \max_{y \in \Omega^T(x)} \Psi(y) =: V_T(a); \quad (18)$$

соответствующее максимальное значение критерия обозначено через $V_T(a)$.

2.2. Семейство операторов Беллмана. Поскольку начальная точка $a \in X$ в задаче 1 (начальное состояние системы в фазовом пространстве) может быть произвольной, эта задача порождает *апостериорный* (по результатам расчета) функционал $V_T: X \rightarrow R_+$, который называется *функцией выигрыша горизонта* T . Содержательный смысл функционалов Ψ и V_T одинаков: с их помощью оце-

ниваются различные состояния системы; поэтому можно рассматривать решение задачи 1 (т.е. вычисление функционала V_T) как уточнение априорно выбранного при постановке задачи функционала Ψ , а переход $\Psi \rightarrow V_T$ – как результат действия оператора Беллмана B_T . Положим по определению

$$B_T \Psi := V_T - \text{функционал (18)}, \quad \Psi \in \widehat{W}. \quad (19)$$

Формула (19) задает семейство операторов Беллмана $\mathcal{B} := \{B_T, T > 0\}$ на подклассе \widehat{W} . Дополним его, положив $B_0 := E$ – тождественный оператор. Опираясь на лемму 1 (выпуклость трубки траекторий), нетрудно убедиться, что каждый из операторов семейства \mathcal{B} является автоморфизмом над \widehat{W} , $B_T: \widehat{W} \rightarrow \widehat{W}$. Из принципа оптимальности вытекает, что семейство \mathcal{B} является коммутативной полугруппой, т.е. имеет место (Яковенко, 1987) соотношение

$$B_t B_s = B_{t+s} \quad \forall t, s \geq 0. \quad (20)$$

Теорема 1'. *В дополнение к четырем утверждениям теоремы 1 имеют место следующие утверждения.*

5. При любом T оператор B_T имеет единственную (нормированную) собственную функцию G_T , т.е. решение уравнения

$$G_T: B_T \Phi = \Phi, \quad \Phi \in \widehat{W}, \quad \Phi(h) = 1.$$

6. Функция G_T на самом деле не зависит от T и является потенциальной функцией G , определенной в (9); это означает, что имеет место равенство

$$B_T G = G \quad \forall T \geq 0, \quad (21)$$

т.е. (см. (18)),

$$\max_{y \in \widehat{Q}^T(a)} G(y) = G(a) \quad \forall T \geq 0, \quad \forall a \in X.$$

7. Каков бы ни был терминальный функционал $\Psi \in \widehat{W}$ в задаче 1, имеет место предельное соотношение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} B_T \Psi = \gamma G, \quad (22)$$

где неотрицательный скалярный множитель γ зависит от Ψ , $\gamma = \gamma(\Psi)$ (предел функций понимается в поточечном смысле).

Отметим, что соотношение (21) может быть положено в основу определения потенциальной функции.

2.3. Стационарная постановка задачи. Из (21) следует, что если в задаче 1 в качестве терминального функционала Ψ взять потенциальную функцию G , то при любом T оптимальная траектория $\xi_{\text{опт}}^T$ задачи 1 будет начальным T -“куском” бесконечной эффективной ξ -траектории (16). В любой момент времени t оптимальный вектор (приведенной) скорости зависит только от текущего состояния $x = x_t$ (не зависит от t) и задается формулой

$$u_{\text{опт}}(x) = \arg \max_{u \in \widehat{U}(x)} [\text{grad } G(x), u], \quad x \in X.$$

Такая постановка задачи называется *стационарной*, и вектор-функция $u_{\text{опт}}: X \rightarrow U$ задает синтез управления.

Таким образом, стационарная постановка задачи является наиболее естественной. Отметим, что в этой постановке снимается “проблема хвоста”, так как ЯГБ-уравнение (15) и его решение – потенциальная функция – не зависят от T и Ψ .

3. РЕТРООПИСАНИЕ

Для полной характеристики НГ-модели необходимо дать описание не только траекторий, направленных в будущее (это сделано в п. 1.3), но также и траекторий, приходящих из прошлого; этому посвящен данный раздел. Назовем приходящие траектории *левыми* и будем использовать индекс l (left).

3.1. Левые траектории.

Определение 16. *Левой траекторией* называется вектор-функция времени $\mathbf{x}^l = (x_t, t \leq 0)$ со значениями в X , удовлетворяющая следующим условиям:

- а) функция x_t непрерывна;
- б) производная \dot{x}_t кусочно-непрерывна, причем в точках разрыва производная понимается в смысле Кларка;
- в) $\dot{x}_t \in \omega(x_t), t \leq 0$.

Пучок левых траекторий, приходящих (в момент $t = 0$) в финальную точку $a \in X$, обозначается $\mathbf{\Pi}(a)$.

Определение 26. Для произвольных $T \geq 0$ и $a \in \text{Int } R_+^n$ областью предшествования $\Omega_T^T(a)$ называется множество

$$\Omega_T^T(a) := \{x \in R_+^n \mid \Omega^T(x) \ni a\}. \quad (23)$$

На языке общей теории многозначных отображений (23) означает, что отображение Ω_T^T является обратным к отображению $\Omega^T(\Omega_T^T = (\Omega^T)^{-1})$.

Из свойства монотонности (2) прямого отображения Ω^T следует, что каждое множество $\Omega_T^T(a)$ непусто и неограничено сверху:

$$(x^1 \in \Omega_T^T(a), x^2 \geq x^1) \Rightarrow x^2 \in \Omega_T^T(a),$$

а само отображение Ω_T^T антимонотонно.

В отличие от множеств $\Omega^T(a)$, в которых эффективной была верхняя граница Парето, теперь эффективной будет нижняя (слабая) граница Парето:

$$\Pi_T^T(a) := \{x \in \Omega_T^T(a) \mid z < x \Rightarrow z \notin \Omega_T^T(a)\}.$$

Левая траектория $\mathbf{x}^l \in \mathbf{\Pi}(a)$ называется эффективной, если

$$x(-t) \in \Pi_T^T(a) \quad \forall t > 0.$$

Как и прямые траектории, левые траектории приводятся с показателем α ; по определению $\xi^l := (\xi_t := e^{-\alpha t} x_t, t \leq 0)$. При $t \rightarrow -\infty$ они могут неограниченно возрастать, однако всякая эффективная приведенная траектория ограничена. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Пусть НГ-модель регулярна, тогда:

1. В любую точку $a \in \text{Int } R_+^n$ приходит ровно одна (бесконечная) эффективная левая траектория $\mathbf{x}^l(a) = (x_t, t \leq 0)$.

2. В приведенной форме $\xi_t := e^{-\alpha t} x_t, t < 0$, левая траектория $\xi^l(a)$ имеет предельную точку и она находится на неймановском луче:

$$\xi^- := \lim_{t \rightarrow -\infty} \xi_t = g(a)h \in \mathbf{1}. \quad (24)$$

Величина $g(a)$ является минимальной координатой точки на луче $\mathbf{1}$, из которой может быть достигнута (в пределе) конечная точка a .

3. Функция $g: R_+^n \rightarrow R_+$, определенная⁷ соотношением (24), принадлежит классу \check{W} и удовлетворяет ЯГБ-уравнению (в приведенной форме)

$$g: \max_{u \in \check{\omega}(x)} [\text{grad } \Phi(x), u] = 0, \quad x \in \text{Int } R_+^n, \Phi \in \check{W}, \Phi(h) = 1 \quad (25)$$

(отличие от (15) только в подклассе функций – \check{W} вместо \widehat{W}).

4. Приведенная эффективная левая траектория $\xi^l(a)$ строится по правилу

$$\xi_0 := a, \dot{\xi}_t = \arg \max_{u \in \check{\omega}(\xi_t)} [\text{grad } g(\xi_t), u], t \leq 0, \quad (26)$$

⁷ См. сноску 6.

при этом

$$g(\xi_t) \stackrel{!}{=} g(a), \quad t \leq 0. \tag{27}$$

Соотношение (24) позволяет назвать функцию g *функцией затрат*. Правило (26) показывает, что g является генератором левых эффективных траекторий.

Замечание 6. В приложении нам потребуется “обращенная” формулировка утверждения 2. Заменяя фиксированную конечную точку a на переменную y , можем сказать, что из начальной точки λh ($\lambda > 0$) на неймановском луче \mathbf{I} достижимы в пределе (при $t \rightarrow \infty$) только те точки $y \in R_+^n$, которые удовлетворяют условию $g(y) \leq \lambda$; при этом согласно условию свободного расходования все такие точки достижимы. В терминах областей достижимости обращенное утверждение означает, что имеет место предельное соотношение

$$\hat{\Omega}(\lambda h) := \lim_{t \rightarrow \infty} \Omega^t(\lambda h) = \{y \in R_+^n \mid g(y) \leq \lambda\}.$$

3.2. **Жизненный цикл.** Согласно изложенным фактам можно описать “жизненный цикл” системы следующим образом. В приведенной форме полный “жизненный цикл” эффективной траектории, проходящей через данную точку $a \in X$, состоит из двух этапов (рис. 1).

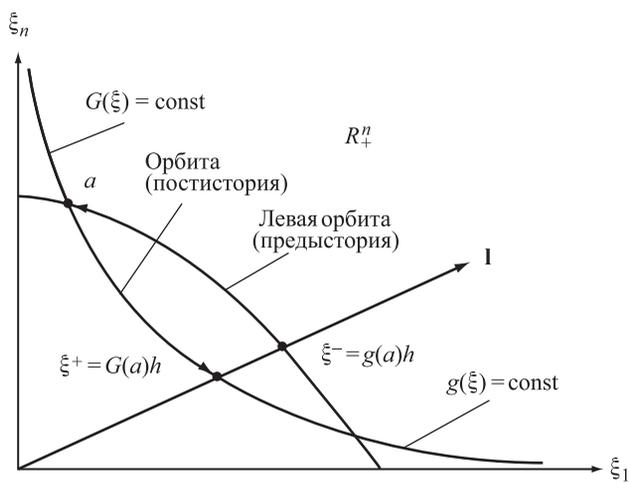


Рис. 1. Жизненный цикл точки a

Этап 1. Предыстория начинается (при $t = -\infty$) в точке $\xi^- = g(a)h$ и заканчивается достижением в момент $t = 0$ точки a ; орбита левой траектории находится на линии уровня функции затрат g .

Этап 2. Постистория начинается с момента $t = 0$ в точке a и завершается (при $t = +\infty$) в точке $\xi^+ = G(a)h \in \mathbf{I}$. Орбита траектории находится на линии уровня потенциальной функции G .

Добавим, что потенциальная функция G меньше функции затрат g ($G \leq g$; что будет показано ниже, см. (36)), поэтому в течение жизненного цикла происходит снижение потенциала от начального значения $G(\xi^-) = g(a)$ до финального $G(\xi^+) = G(a) < g(a)$.

3.3. **Ретрооптимизационная задача.** Ретрозадача формулируется “симметрично” основной задаче 1 (п. 2.1).

Задача 2. Для данных $T > 0$ и $\Psi \in \check{W}$ найти приведенную левую траекторию ξ^- , минимизирующую ретротерминальный функционал⁸ $Cr(\xi^l) = \Psi(\xi(-T))$:

$$\Psi(\xi(-T)) \rightarrow \min_{\xi^l \in \Pi(a)} = \min_{x \in \hat{\Omega}_T^l(a)} \Psi(x) =: V_T^l(a). \tag{28}$$

Далее, аналогично п. 2.2 введем семейство *ретрооператоров* Беллмана $\mathcal{B}^l := \{B_T^l, T \geq 0\}$; положим по определению

$$B_T^l \Psi := V_T^l - \text{функционал (28)}, \quad \Psi \in \check{W}. \tag{29}$$

Каждый из операторов B_T^l является автоморфизмом на классе \check{W} , и семейство \mathcal{B}^l образует полугруппу в смысле (20).

Теорема 2'. В дополнение к четырем утверждениям теоремы 2 имеют место следующие утверждения.

5. При любом T оператор B_T^l имеет единственную собственную функцию g_T , т.е. решение уравнения

$$g_T: B_T^l \Phi = \Phi, \quad \Phi \in \check{W}, \quad \Phi(h) = 1. \tag{30}$$

⁸ Нет подходящего термина, можно назвать функционал Ψ *инициальным*.

6. Функция g_T на самом деле не зависит от T и является функцией затрат g , определенной в (24). Это означает, что имеет место равенство

$$B_T^l g = g \quad \forall T \geq 0, \tag{31}$$

т.е. (см. (28))

$$\min_{x \in \hat{\Omega}_T^l(a)} g(x) = g(a) \quad \forall T \geq 0, \quad \forall a \in X.$$

7. Каков бы ни был терминальный функционал $\Psi \in \tilde{W}$ в задаче 2, имеет место предельное соотношение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} B_T^l \Psi = \gamma g, \tag{32}$$

где скалярный множитель γ зависит от Ψ , $\gamma = \gamma(\Psi)$.

Как и раньше, соотношение (31) может быть положено в основу определения функции затрат.

3.4. Стационарная постановка задачи. Из (30) следует, что если в задаче 2 в качестве терминального функционала Ψ взять функцию затрат g , то при любом $T > 0$ оптимальная левая траектория $\xi_{\text{опт}}^T$ задачи 2 будет конечным T -“куском” бесконечной эффективной левой траектории ξ^l . При этом оптимальный вектор (приведенной) скорости зависит только от текущего состояния и задается формулой

$$u_{\text{опт}}(x) = \arg \max_{u \in \hat{\omega}(x)} [\text{grad } g(x), u], \quad x \in R_+^n,$$

определяющей синтез управления.

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ НГ-МОДЕЛИ

4.1. Базисная тройка. Покажем, что тройка $\{\alpha, G, g\}$ однозначно определяет равновесие технологии ω .

Лемма 2. *Имеют место соотношения:*

$$\max_{x \in X} (G(x)/\pi x) = 1, \tag{33a}$$

$$\min_{x \in X} (g(x)/\pi x) = 1, \tag{33б}$$

$$\max_{x \in X} (G(x)/g(x)) = 1, \tag{33в}$$

$$h = \arg \max_{x \in X} \frac{G(x)}{g(x)} = \arg \max_{x \in X} \frac{G(x)}{\pi x} = \arg \min_{x \in X} \frac{g(x)}{\pi x}, \tag{34}$$

$$\pi = \text{graf } G(h) = \text{grad } g(h). \tag{35}$$

Доказательство. В доказательстве теорем 1, 2 в приложении показано, что имеют место неравенства

$$G \leq \Pi \leq g; \tag{36}$$

кроме того, по определению

$$G(h) = \pi h = g(h) = 1. \tag{37}$$

Учитывая, что функция G выпукла вверх, а функция g – вниз, соотношения (36), (37) означают, что гиперплоскость $\pi x = 1$ является разделяющей между линиями уровня $G(x) = 1$ и $g(x) = 1$. Отсюда следуют все соотношения (33)–(35) (рис. 2).

Соотношения (34), (35) выражают векторы равновесия через функции G, g , которые можно считать *базисными* при характеристизации технологии ω .

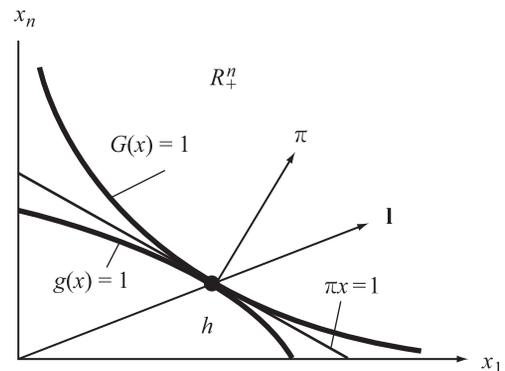


Рис. 2. К доказательству леммы 2

4.2. Асимптотическая характеристика НГ-модели. Следующие два заключительных предложения являются буквальным аналогом асимптотического описания дискретной модели (Беленький, 1990).

Теорема 3. Для данной точки и начальной точки $a \in X$ приведенные области достижимости и предшествования имеют пределы:

$$\hat{\Omega}(a) := \lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{\Omega}^T(a) = \{y \in X | g(y) \leq G(a)\}; \tag{38a}$$

$$\hat{\Omega}_l(a) := \lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{\Omega}_l^T(a) = \{x \in X | G(x) \geq g(a)\}. \tag{38б}$$

Экономическая интерпретация соотношения (38a) такова: для начальной точки $a \in X$ доступны (в пределе при $T \rightarrow \infty$) те и только те конечные состояния y , затраты на достижение которых не превосходят потенциала начальной точки. Обратное, согласно (38б) конечная точка $a \in X$ доступна (в пределе) для тех и только тех начальных состояний x , потенциал которых не меньше затрат на достижение этой точки. Таким образом, (38) представляет собой асимптотическую бюджетную характеристику технологии $\tilde{\omega}$; как бы сложно ни было описание исходной технологии ω , ее предельная приведенная форма $\hat{\Omega}$ сводится к единственному (скалярному) условию: *конечная точка доступна тогда и только тогда, когда затраты на ее достижение не больше, чем потенциал начальной точки.*

4.3. Асимптотика оптимальных траекторий конечного горизонта. Теперь дадим описание оптимальных траекторий в оптимизационной задаче 1 (п. 2.1) при больших значениях горизонта планирования T . Ввиду полной аналогии с трехэтапной структурой траекторий дискретной модели (Беленький, 1990) приведем сокращенную формулировку, опуская детали, связанные с бесконечно малыми величинами.

Теорема 4 (о магистрали). Пусть в задаче 1 значение T достаточно велико; тогда (рис. 3):
1) конечная точка $b := \xi_T$ приведенной оптимальной траектории находится по формуле

$$b = \arg \max_{y \in \hat{\Omega}(a)} \Psi(y); \tag{39}$$

2) для любого $\varepsilon > 0$ существуют временные интервалы T_1, T_2 (зависящие от начальной точки a и от ε , но не зависящие от T), такие, что оптимальная траектория имеет следующую трехэтапную структуру (рис. 3).

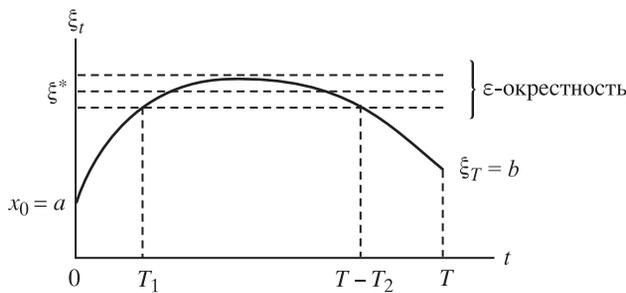


Рис. 3. Трехэтапная структура оптимальной траектории

Этап 1 ($t \in [0, T_1]$). Оптимальная траектория совпадает с бесконечной эффективной траекторией $\xi(a)$, строящейся по формуле (16). Момент T_1 определяется условием попадания $\xi(a)$ -траектории в ε -окрестность предельной точки ξ^+ (см. (9)), которая интерпретируется как стационарное состояние $\xi^* = \xi^+$ на неймановском луче **I** (на магистрали).

Этап 2 ($t \in [T_1, T - T_2]$). Траектория находится в ε -окрестности стационарной точки ξ^* .

Этап 3 ($t \in [T - T_2, T]$). Оптимальная траектория совпадает с бесконечной эффективной левой траекторией $\xi^l(b)$, приходящей в конечную точку (39). Эта траектория строится по формуле (26) при $\xi_0 = b$. Момент T_2 определяется условием попадания траектории $\xi^l(b)$ в ε -окрестность предельной точки $\xi^- = \xi^*$.

Примечание. Значения $\xi^+(a)$ и $\xi^-(b)$ совпадают (и определяют стационарное состояние ξ^*). Это означает, что на оптимальной траектории выполняется равенство $g(b) = G(a)$: *затраты на достижение конечной точки равны потенциалу начальной точки* (закон переноса стоимости ресурсов на стоимость конечного продукта).

5. ПРИМЕРЫ

5.1. Матричная модель. Зададим технологию в виде:

$$\omega(x) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid -\Gamma x \leq v \leq Bx\}, \quad x \in \mathbb{R}_+^n, \quad (40)$$

где Γ – диагональная матрица коэффициентов $\gamma = \gamma(\gamma_j)$ выбытия ресурсов (γ_j – максимально возможный темп выбытия ресурса x_j); $B(n \times n)$ – неотрицательная квадратная матрица “производства” скорости.

Технология (40) – гейловская. Отметим, что условие допустимости T5 выполняется автоматически. Равновесием в технологии (40) является тройка (α, h, π) , где $\alpha = r(B)$ – спектральный радиус матрицы B (Карлин, 1964, разд. 8.2); h, π – правый и левый собственные векторы (предполагаемые единственными и строго положительными), отвечающие собственному числу r :

$$\alpha = r, \quad Bh = rh, \quad \pi B = r\pi \quad (\pi h = 1). \quad (41)$$

Неймановской гранью здесь является луч $\mathbf{1}$, поэтому в технологии (40) равновесие является строгим и, следовательно, модель регулярна.

Ясно, что бесконечная эффективная траектория строится по правилу $\dot{x} = Bx$ или в приведенной форме

$$\dot{\xi} = \tilde{B}\xi, \quad \tilde{B} := B - \alpha E. \quad (42)$$

Матрица \tilde{B} имеет собственное число, равное нулю, а остальные ее собственные числа имеют отрицательные вещественные части. Из (42) следует $\pi \dot{\xi}_t = \pi \tilde{B} \xi_t = (\mathbf{0}, \xi_t) = 0$, поэтому предельной точкой траектории (42), исходящей из начальной точки a , будет $\xi^+ = \pi a h$; следовательно (см. (9)), $G(a) = \pi a$, т.е. потенциальной функцией является $G = \Pi$ (см. (4)).

Перейдем к функции затрат. Определим в классе W функцию-мажоранту:

$$\mathcal{M}(x) := \min \{\lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \lambda h \geq x\}, \quad x \in \mathbb{R}_+^n. \quad (43)$$

По определению

$$x \leq \mathcal{M}(x)h; \quad (44)$$

множество компонент j , на которых в (44) достигается равенство $x_j = \mathcal{M}(x)h_j$, назовем *носителем* $\text{supp}(x)$.

Лемма 3. *Мажоранта (43) является максимальной в множестве функций $\Phi \in W$, принимающих в точке h значение единица.*

Доказательство. Ясно, что $\mathcal{M}(h) = 1$. Пусть $\Phi \in W$ и $\Phi(h) = 1$. Из (44) имеем

$$\Phi(x) \leq \mathcal{M}(x)\Phi(h) = \mathcal{M}(x) \quad \forall x_+^n;$$

это означает $\Phi \leq \mathcal{M}$. ■

Лемма 4. *Мажоранта (43) не возрастает на приведенных траекториях системы.*

Доказательство. Рассмотрим приращение (неприведенной) траектории за бесконечно малый интервал времени dt :

$$y := x(t + dt) = x + v dt \leq x + Bx dt.$$

Так как функция \mathcal{M} выпукла вниз, отсюда получаем

$$\mathcal{M}(y) \leq \mathcal{M}(x + Bx dt) \leq \mathcal{M}(x) + \mathcal{M}(Bx) dt. \quad (45)$$

Из неравенства (44) следует

$$Bx \leq \mathcal{M}(x)Bh = \alpha \mathcal{M}(x)h \Rightarrow \mathcal{M}(Bx) \leq \alpha \mathcal{M}(x).$$

Используя это неравенство, из (45) получаем

$$\mathcal{M}(y) \leq \mathcal{M}(x)(1 + \alpha dt) \leq \mathcal{M}(x)e^{\alpha dt}. \quad \blacksquare$$

Рассматривая приведенную левую эффективную траекторию $\xi^l(a)$ (см. (24)) как прямую траекторию, исходящую при $t = -\infty$ из точки ξ^- и приходящую при $t = 0$ в точку a , на основании леммы 4

$$M(\xi^-) \geq M(a),$$

но $M(\xi^-) = g(a)$, поэтому

$$g(a) \geq M(a) \quad \forall a \in R_+^n \Rightarrow g \geq M.$$

Учитывая, что $g(h) = 1$, и привлекая лемму 3, заключаем, что $g = M$.

Комментарий. Приведенная левая траектория, на которой достигается равенство $g(a) = M(a)$, исходит из (минус) бесконечно удаленной точки $\xi^- = M(a)h$ и остается в этой стационарной точке $\xi^* := \xi^-$ вплоть до завершающего момента $t = 0$, перед которым траектория терпит разрыв – скачок вниз в конечную точку $a \leq \xi^*$ (см. замечание 2). Отметим, что конечная точка a находится на верхней слабой границе Парето множества $\tilde{\omega}(\xi^*)$, поэтому финальный вектор (приведенной) скорости с компонентами

$$u_j = \begin{cases} 0, & \text{если } j \in \text{supp}(a); \\ -\infty & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

является оптимальным с точки зрения ЯГБ-уравнения (25): на нем достигается максимум скалярного произведения pu на множестве $u \in \tilde{\omega}(\xi^*)$ при ковекторе p , принадлежащем субдифференциалу функции M в точке a (этот ковектор имеет нулевые координаты с индексами $j \notin \text{supp}(a)$) (см. (Беленький, 2006, п. 2.1, замечание 4)).

Замечание 7. Необходимость условия свободного расходования автор осознал только в процессе доработки первоначальной версии статьи в ответ на замечания рецензента. Оказывается, в рассматриваемом примере без этого условия попасть из точки ξ^* в точку $a < \xi^*$ невозможно. Действительно, при “снижении” из точки ξ^* в точку a постепенно (через промежуточные состояния) равенство $a_j = \xi_j^*$, $j \notin \text{supp}(a)$, не может поддерживаться (в предположении, что матрица B строго положительна). Это означает, что в данном примере без условия свободного расходования функции затрат не существует.

Итак, получена полная характеристика модели: равновесие задается формулами (41), бюджетными функциями являются $G = \Pi$, $g = M$. Отметим, что построенное решение не зависит от нижних границ γ множества скоростей (40).

5.2. Модель с монопродуктовой производственной функцией. В этой модели технология задается в виде:

$$\omega(x) = \{v \in \dot{R}^n \mid v = sF(x) - \Gamma x, \quad s \in \sigma\}, \quad x \in R_+^n; \tag{46}$$

здесь σ – единичный симплекс в пространстве R_+^n :

$$\sigma := \{s \in R_+^n \mid es \leq 1\}, \quad e := (1, \dots, 1) \in R_+^{n*}$$

(e – единичный ковектор); $F: R_+^n \rightarrow R_+$ – производственная функция, значение которой $Y = F(x)$ интерпретируется как интенсивность выпуска монопродукта Y ; Γ – диагональная матрица коэффициентов выбытия ресурсов, вектор этих неотрицательных коэффициентов обозначается $\gamma = (\gamma_i)$. Таким образом, модель задается парой (F, γ) ; предполагается, что $F \in \tilde{W}$ (см. п. 1.6). Интерпретация модели: производимый продукт в долях (s_i) распределяется на развитие производства. Отметим, что траектории технологии (46) никогда не выходят из пространства R_+^n , так как если $x_i = 0$, то $v_i \geq 0$.

Равновесие в этой модели находится как решение задачи

$$\alpha x = sF(x) - \Gamma x, \quad \alpha \rightarrow \max_{x \in R_+^n, s \in \sigma} . \tag{47}$$

Умножая равенство (47) на ковектор e и учитывая, что максимум достигается при условии $es = 1$, получаем

$$\alpha = \max_{x \in R_+^n} \frac{F(x) - \gamma x}{ex}. \tag{48}$$

Максимизирующий правую часть неймановский луч \mathbf{l} находится из условия экстремума (градиент обращается в нулевой ковектор). Это условие дает

$$\mathbf{l}: \frac{\text{grad} F(x) - \gamma}{F(x) - \gamma x} = \frac{e}{ex}$$

или с учетом равенства (48)

$$\mathbf{l}: \text{grad} F(x) = \gamma + \alpha e. \quad (49)$$

Для единственности решения этого уравнения (относительно x) достаточно, чтобы функция F была строго выпуклой. В качестве вектора h можно взять любую точку на луче \mathbf{l} , например такую, что $F(h) = 1$.

Условием продуктивности модели $\alpha > 0$ является существование вектора x , такого, что $F(x) > \gamma x$. Экономически это означает: производимый продукт превосходит суммарное выбытие ресурсов.

Покажем теперь, что ковектор e является третьей компонентой равновесия (см. определение 3), $\pi = e$. Из (48) имеем

$$F(x) \leq (\gamma + \alpha e)x \quad \forall x \in R_+^n;$$

поэтому из (46) получаем

$$ev \leq F(x) - \gamma x \leq \alpha ex \quad \forall (x \in R_+^n, v \in \omega(x)), \quad (50)$$

что и требуется по условию (36). Единственность ковектора π (нормированного условием, что его максимальная компонента равна единице), следует из того, что в точке $x = h$ правое неравенство в (50) обращается в равенство (и поэтому при $\pi \leq e$ это неравенство выполняться не может).

Итак, равновесие технологии (46) найдено: α определено в (48), луч \mathbf{l} – в (49), $\pi = e$.

Выписать бюджетные функции G, g в общем случае сложно. В двумерной модели ($n = 2$) потенциальная функция G может быть построена аналогично методу (Кетова, 2008); это сделано в работе (Малышев, 2009).

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Доказательство теорем 1, 1' (кроме утверждения 7). Проведем доказательство в форме последовательности заключений.

C1. Из условия (36) следует, что определенная в (4) функция Π убывает (не возрастает) на приведенных траекториях. Поэтому функция $\Pi_T := B_T \Pi$, где оператор B_T определен формулой (19), убывает по T , причем $\Pi_T(h) = 1 \quad \forall T$. Следовательно, существует отличная от тождественного нуля предельная (в поточечном смысле) функция

$$f := \lim_{T \rightarrow \infty} \Pi_T. \quad (51)$$

Устремляя в соотношении (20) s к бесконечности, получаем

$$Bf = f \quad \forall t, \quad f(h) = 1. \quad (52)$$

Ясно также, что $f \in \widehat{W}$ (следует из включения $\Pi \in \widehat{W}$ и того, что все операторы B_T – автоморфизмы над \widehat{W}) и $f \leq \Pi$. Таким образом, доказано, что функция f удовлетворяет соотношению (21).

C2. Пусть теперь $\xi \in \text{Tr}(a)$ – некоторая приведенная траектория; функция времени $\Pi(\xi_t)$ убывает по t , следовательно, существует предел $c(\xi) := \lim_{t \rightarrow \infty} \Pi(\xi_t)$. Кроме того, имеем

$$\Pi_t(a) := \max_{y \in \Omega^t(a)} \pi y \geq \pi \xi_t \quad \forall t;$$

отсюда $c(\xi) \leq f(a)$.

Далее, так как $\pi \xi_t \rightarrow c(\xi)$, траектория ξ блуждает (при больших t) в окрестности симплекса $\pi x = \text{const} = c(\xi)$. Поскольку этот симплекс ограничен ($\pi > \mathbf{0}$), траектория ξ имеет хотя бы одну точку накопления ξ^* на этом симплексе; более того, существует предельная траектория $\xi^*(t)$. На этой

предельной траектории выполняется соотношение $\pi^{\xi^*}(t) \equiv 0$. Это означает, что траектория $\xi^*(t)$ принадлежит неймановской грани (см. соотношение (14б)); поэтому из условия регулярности (см. определение 4, п. 1.4) следует, что $\xi^*(t) \rightarrow c(\xi)h$ (и поскольку $\xi^*(t)$ – предельная траектория, то на самом деле $\xi^*(t) \equiv c(\xi)h$).

Таким образом, каждая приведенная траектория ξ сходится к предельной точке на луче **I** с координатой $c(\xi)$, не превосходящей $f(a)$. Если $c(\xi) < f(a)$, то такая траектория неэффективна, поскольку точка $c(\xi)h$ не находится на границе Парето множеств $\tilde{Q}^t(a)$ при всех достаточно больших t (ибо она мажорируется точкой $f(a)h$, достижимой из точки a).

С3. Итак, если функция f удовлетворяет соотношению (уравнению) (52), то $f(a)$ – это максимальная координата точки на луче **I**, достижимой из точки a . Отсюда следует, что решение уравнения (52) единственно. При этом значение $f(a)$ достигается только на эффективной бесконечной траектории $\xi(a)$, на которой должно выполняться равенство $f(\xi_t) = f(a) \quad \forall t$. Это означает, что траектория $\xi(a)$ движется по линии уровня функции f , следовательно, генерируется функцией f и поэтому единственна.

Все сказанное означает, что функция f , определенная формулой (51), является потенциальной функцией G (см. (9)) и при этом доказаны утверждения 1, 2, 4–6 теорем 1, 1'.

С4. Введем инфинитезимальный оператор

$$\mathbf{I} := \lim_{t \rightarrow +0} \frac{B_t - E}{t}. \tag{53}$$

Он действует на функцию $\Phi \in W$ по формуле

$$\mathbf{I}\Phi(x) = \lim_{t \rightarrow +0} \max_{u \in \tilde{\omega}(x)} \frac{\Phi(x + udt) - \Phi(x)}{dt} = \max_{u \in \tilde{\omega}(x)} [\text{grad } \Phi(x), u].$$

Из (52) следует $\mathbf{I}f = 0$; это означает, что функция f является решением ЯГБ-уравнения (15).

Доказано утверждение 3 теоремы 1. Недоказанным осталось пока утверждение 7 теоремы 1'.

2. Доказательство теорем 2, 2' (кроме утверждения 7). Доказательство “симметрично” предыдущему.

С1. Функция $\Pi'_T := B'_T \Pi$, $T > 0$ возрастает по T , причем $\Pi'_T(h) = 1 \quad \forall T$. Следовательно, существует отличная от бесконечности предельная функция

$$f^l := \lim_{T \rightarrow \infty} \Pi'_T. \tag{54}$$

Устремляя в соотношении (20) (в применении к семейству \mathcal{B}^l) s к бесконечности, получаем

$$B_t f^l = f^l \quad \forall t, \quad f^l(h) = 1; \tag{55}$$

ясно также, что $f^l \in \tilde{W}$ и $f^l \geq \Pi$. Таким образом, доказано, что функция f^l удовлетворяет соотношению (30).

Остальные заключения С2–С4 проводятся так же, как в предыдущем пункте. Таким образом, f^l есть функция затрат g .

3. Доказательство теоремы 3.

С1. Выберем некоторый терминальный функционал $\Psi \in \tilde{W}$, зафиксируем начальную точку $a \in X$ и рассмотрим оптимизационную задачу 1 (п. 2.1). Ясно, что оптимальная траектория проходит по границам Парето областей достижимости: $\xi_t \in \tilde{\Pi}^t(a) \quad \forall t \in [0, T]$. Пусть горизонт планирования большой, $T \gg 1$. В доказательстве теоремы 1 (приложение, п. 1, заключение С2) показано, что для того, чтобы длительное время находиться на границе Парето, траектория $\xi \in \mathbf{Tr}(a)$ должна сходиться к предельной точке на неймановском луче с максимальной координатой $c(\xi) = f(a) = G(a)$. Таким образом, при большом горизонте планирования в задаче 1 оптимальная траектория $\xi = \mathbf{Tr}(a)$ должна длительное время находиться в окрестности точки $\xi^* := G(a)h \in \mathbf{I}$, которая, следовательно, является промежуточным стационарным состоянием, не зависящим от функционала Ψ . Более того, отсюда вытекает, что первый этап оптимальной траектории (выход в стационарное состояние ξ^* – предположим, что это происходит в периоде $t \in [0, T_1]$) строится по формуле (16).

С2. В силу С1 при больших T область достижимости $\tilde{\Omega}^T(a)$ совпадает с областью достижимости $\tilde{\Omega}^{(T-T)}(\xi^*)$. Используя обращенную формулировку, данную в замечании к утверждению 2 теоремы 1 (уже доказанному в п. 1), что для данной точки $a \in X$ существует предельная область достижимости $\hat{\Omega}(a) = \hat{\Omega}(\xi^*)$ и она имеет вид (38а). Таким образом, формула (38а) доказана, а (38б) доказывается симметрично через рассмотрение ретрооптимизационной задачи 2 с применением “обращенной” формулировки утверждения 2 теоремы 1. ■

4. Доказательство утверждений 7 теорем 1', 2'. Используя (38б), имеем из (18) при $T \rightarrow \infty$:

$$(B_T \Psi)(a) = V_T(a) = \max_{y \in \tilde{\Omega}^T(a)} \Psi(y) \rightarrow \max_{y \in \hat{\Omega}(a)} \Psi(y) = \gamma G(a),$$

где

$$\gamma := \gamma(\Psi) := \max_{g(y) \leq 1} \Psi(y).$$

Формула (22) доказана, (32) доказывается симметрично.

5. Доказательство теоремы 4. Фактически теорема уже доказана в п. 3 приложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Беленький В.З.** (1981): Стационарные модели экономической динамики. М.: ЦЭМИ АН СССР (препринт).
- Беленький В.З.** (1990): Экономическая динамика: обобщающая “бюджетная” факторизация гейловской технологии // *Экономика и мат. методы*. Т. 26. Вып. 1.
- Беленький В.З.** (2006): Операция ratio-сопряжения и ее применение в линейно-однородных моделях экономики // *Экономика и мат. методы*. Т. 42. № 2.
- Беленький В.З.** (2007): Оптимизационные модели экономической динамики. М.: Наука.
- Дюкалов А.Н., Илютович А.Е.** (1973): Асимптотические свойства оптимальных траекторий экономической динамики // *Автоматика и телемеханика*. № 3.
- Дюкалов А.Н., Илютович А.Е.** (1974): Магистральные свойства оптимальных траекторий динамической модели межотраслевого баланса в непрерывном времени // *Автоматика и телемеханика*. № 12.
- Карлин С.** (1964): Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир.
- Кетова К.В.** (2008): Разработка методов исследования и оптимизация стратегии развития экономической системы региона: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Ижевск: ИжГТУ.
- Кларк Ф.** (1988): Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука.
- Макаров В.Л.** (1969): Модели оптимального роста экономики // *Экономика и мат. методы*. Т. 5. Вып. 4.
- Макаров В.Л., Рубинов А.М.** (1973): Математическая теория экономической динамики и равновесия. М.: Наука.
- Мальшев Н.Е.** (2009): Построение потенциальной функции в непрерывной модели Неймана–Гейла с многофакторной производственной функцией. В сб.: “*Анализ и моделирование экономических процессов*”. Вып. 6. М.: ЦЭМИ РАН.
- Яковенко С.Ю.** (1986): О моделях Неймана–Гейла, функционирующих в непрерывном времени // *ДАН СССР*. Т. 291. № 4.
- Яковенко С.Ю.** (1987): Асимптотика оптимальных траекторий в гейловских моделях, функционирующих в непрерывном времени // *Автоматика и телемеханика*. № 8.
- Яковенко С.Ю.** (1989): Неподвижные точки полугруппы операторов Беллмана и инвариантные многообразия гамильтоновых субдифференциальных уравнений // *Автоматика и телемеханика*. № 6.
- Rockafellar R.T.** (1970): Conjugate Convex Functions in Optimal Control and the Calculus of Variations // *Journal Math. Anal. Appl.* Vol. 32. № 1.
- Rockafellar R.T.** (1971): Existence and Duality Theory for Convex Problems of Bolza // *Trans. Amer. Math. Soc.* № 159.

Поступила в редакцию
10.11.2008 г.

Budget Characterization of Neumann–Gale Model in Continuous Time

V.Z. Belenky

A version of Neumann–Gale model in continuous time is formulated and it is given its description by term of “budget” functions – *potential function* G and *cost function* g . These functions are the solutions of direct and inverse Bellman’s equations, and they determine as the whole limits attainable domain $\hat{\omega}(x)$ for discounted trajectories issuing from arbitrary initial point x in phase space. Results of the article expand to continuous version well known properties of NG-model in discrete time.