ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2010, том 46, № 1, с. 92–103

СТАДНОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПРИ БАЙЕСОВСКОМ ВЫБОРЕ И ЛИНЕЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

© 2010 г. М.М. Вороновицкий

(Израиль)

В известном примере Беккера возникает парадоксальный эффект, когда выбор потребителей сосредоточивается на одном из двух одинаковых по всем характеристикам товаров (ресторанов). В данной работе исследован случай, когда выбор участников происходит последовательно и делается только один раз. Предполагаем, что для всех потребителей существует одна и та же априорная вероятность предпочтения одного из двух товаров (ресторанов) и априорная вероятность рациональности потребителя. Каждый участник знает о выборе, сделанном его предшественниками, и для выбора использует байесовскую стратегию. В работе исследован коллективный выбор при большой длине последовательности и различном числе предшественников, о выборе которых знает каждый участник. Показано, что в случае, когда участник знает о выборе только одного предшественника, эффект примера Беккера (стадное поведение) отсутствует, но если ему известен выбор всех его предшественников, может возникнуть стадное поведение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Микроэкономическая модель формирования спроса предполагает, что потребители определяют их предпочтение независимо друг от друга. На их предпочтения влияют только характеристики качества товаров и цены. Такая классическая модель оправдана, и это очень полезное приблизительное описание выбора потребителя. Но такой подход часто оказывается недостаточным для описания некоторых явлений, происходящих на современных рынках.

В экономической жизни часто наблюдается явление, когда индивид принимает решение, исходя из наблюдения поведения других участников экономического процесса. Такое поведение не всегда можно объяснить в рамках представлений о рациональном выборе. Часто подавляющая масса экономических агентов в симметрической ситуации выбора среди равнокачественных вариантов делает одинаковый выбор, т.е. ведет себя асимметрично. Такое поведение массы экономических агентов по аналогии с живой природой называют стадным. В экономике стадное поведение наблюдается как в потреблении (распространение моды и т.п.), так и при выборе новых технологий производства, в поведении вкладчиков банка, в направлении менеджерами инвестиций на рынке капитала, в поведении биржевых игроков и т.п.

Интенсивные исследования механизмов стадного поведения в экономике с использованием математических моделей начались в 1990-х годах. Особенно успешным было объяснение поведения инвесторов на рынке капитала с помощью модели, основанной на проблеме принципал – агент, которое было дано в работе Д. Шарфштейна и Дж. Штейна (Scharfsein, Stein, 1990).

Довольно простой и при этом охватывающий главные черты стадного поведения потребителей пример предложил Г. Беккер (Becker, 1991), который рассматривал два похожих по всем потребительским характеристикам ресторана с практически равными ценами. Часто один из этих ресторанов является более успешным, в том смысле, что подавляющее большинство потребителей предпочитает посещать именно этот ресторан. Г. Беккер описал это явление и исследовал зависимость спроса от цены в этих условиях. Но в отношении индивидуального выбора он ограничился лишь замечанием о том, что популярность ресторана повышает для потребителя полезность его посещения. Это свойство полезности потребителя было использовано в работе (Вороновицкий, Мейталь, 2003). Выбор ресторана потребителями моделировался простой цепью Маркова, в которой переходные вероятности зависели от числа потребителей, посетивших накануне один из ресторанов. Было показано, что финальные стационарные распределения этой цепи Маркова соответствуют наблюдению Беккера: все потребители предпочитают или первый ресторан, или второй. При математическом моделировании коллективного выбора возникает естественное определение стадного поведения. Предположим, что участники коллектива принимают решения в ходе некоторого процесса, например последовательно или в результате процесса итераций. Обозначим через $P_t(m)$ вероятность того, что m участников из N до момента времени t выбрали первую из двух альтернатив. Пусть при некотором фиксированном K оказывается, что

$$\sum_{m=N-k}^{N} P_t(m)+\sum_{m=0}^{K} P_t(m)>1-\varepsilon(t,N), \quad \varepsilon(t,N)\to 0, \quad t\to\infty, \quad N\to\infty$$

и имеет место

$$1-\rho>\sum_{m=N-k}^{N} P_t(m)>\rho, \quad 1-\rho>\sum_{m=0}^{K} P_t(m)>\rho, \quad 1>\rho>0.$$

Тогда предельное по t и N распределение вероятностей $P(m)$ соответствует стадному поведению коллектива. Можно рассматривать ρ в качестве характеристики стадного поведения. При ρ, близком к 0.5, можно говорить о выраженном амбивалентном стадном поведении, которое иногда наблюдается в экономике.

Существенную роль в процессе формирования выбора участника играет социальное взаимодействие. В работах (Banerjee, 1992; Bikhandany, Hirsheifer, Welch, 1992) исследуется случай, когда действия других партнеров влияют на выбор каждого партнера. Рассматривается некоторое число агентов, последовательно принимающих решения о выборе среди нескольких альтернатив, различающихся для агента своей полезностью. Каждый агент получает свой собственный, достоверный с некоторой вероятностью, сигнал о том, какая альтернатива обладает наибольшей полезностью, и наблюдает, какие альтернативы выбрали его предшественники в последовательности. На основании этого он принимает решение, имея целью выбрать наиболее полезную альтернативу. Авторы показали, что в этой модели финальное состояние при большом числе участников представляет собой так называемый информационный каскад, т.е. ситуацию, когда начиная с некоторого участника все последующие выбирают одну и ту же альтернативу и при этом выбор действия агентом в последовательности не зависит от получаемого им сигнала. Как нетрудно понять, информационный каскад является частным случаем стадного поведения.

Работы (Banerjee, 1992; Bikhandany, Hirsheifer, Welch, 1992) были существенным продвижением в изучении стадного поведения в экономике, модели этих работ исследовались экспериментально (Anderson, Holt, 1997) и многократно интерпретировались в приложении к экономическим явлениям и даже к развитию исторических событий. В работе (Smith, Sorensen, 2000) были рассмотрены обобщения этих моделей и показано, что в широком классе моделей последовательного принятия решений может часто возникать стадное поведение, но информационные каскады – лишь в некоторых случаях.

Пример Г. Беккера обсуждается в работах (Banerjee, 1992; Bikhandany, Hirsheifer, Welch, 1992), но сформулированные в них модели не могут быть прямо применены к этому примеру. С некоторой степенью условности можно предположить, что потребители принимают решение о выборе ресторана последовательно, т.е. они по очереди подходят к ресторанам, находящимся с двух сторон улицы, и решают, в который из них войти. При принятии решения потребитель учитывает действия своих предшественников, которые имеет возможность наблюдать. Если предположить, что потребитель делает выбор впервые, то у него отсутствует личная информация и он может использовать лишь сведения, почерпнутые из средств массовой информации и рекламы. Будет ли в этом примере возникать каскад или стадное поведение?

В попытке ответить на этот вопрос была построена простая модель выбора предпочитаемого ресторана выстроенными в очередь (как в работах (Banerjee, 1992; Bikhandany, Hir*s*heifer, Welch, 1992)) потребителями. Каждый потребитель обладает априорной информацией – вероятностью того, что данный ресторан лучше другого и что каждый предшественник идет в ресторан, который считает наилучшим (вероятность рационального поведения). Предполагаем, что потребитель рассматривает выборы своих предшественников в качестве экспериментов и формирует вероятность того, что данный ресторан является лучшим (теперь уже с его точки зрения), с помощью правила Байеса. Отметим, что похожий подход к описанию механизма выбора потребителей, последовательно принимающих решения, использован в работе (Anderson, Holt, 1997).

В разд. 2 формулируется модель, соответствующая нашим предположениям о последовательности и механизме принятия решений. Существуют различные варианты модели, различающиеся числом предшественников, действия которых учитывает каждый участник при принятии решения.

Исследуется случай, когда каждый участник знает о действиях всех своих предшественников и учитывает их при принятии решения (такое же предположение сделано в моделях работ (Banerjee, 1992; Bikhandany, Hirsheifer, Welch, 1992)). Кроме того, рассмотрен случай, когда каждый участник знает о действии только последнего из своих предшественников. Возможны промежуточные варианты моделей, когда каждый участник знает (и учитывает при принятии решения) выбор нескольких из своих предшественников в последовательности принимающих решения участников. Эти варианты моделей анализируются в разд. 3. Показано, что стадное поведение не возникает в случае, когда при принятии решения каждый участник учитывает действие только последнего из своих предшественников, а при учете действий всех предшественников стадное поведение появляется.

При помощи компьютерного моделирования исследовались модели поведения, в которых каждый участник при принятии решения учитывает действия нескольких своих предшественников. Обсуждаются причины возникновения стадного поведения в предложенной нами модели и связь этой модели с другими известными моделями примера Беккера.

2. МОДЕЛЬ

Имеется N потребителей и j – номер потребителя, делающего выбор, $j = 1,\ldots, N$. Время t дискретно, $t = 1, 2,\ldots$ Только один потребитель может делать свой выбор в один момент времени, т.е. потребитель j выбирает ресторан после потребителя $j - 1$ в момент времени $t = j$. Каждый потребитель рассматривает два состояния внешнего мира:

1) первый ресторан лучше второго;

2) второй ресторан лучше первого.

Априорная вероятность первого состояния q одна и та же для всех последовательно принимающих решения потребителей. Следовательно, априорная вероятность второго состояния $1 - q$. Еще до вступления в игру потребитель получает эту априорную информацию посредством рекламы, прессы и т.п. Предполагаем, что оба ресторана одинаковы по качеству и ценам, поэтому можно считать, что $q \geq 0.5$. Байесовские потребители принимают решения о выборе ресторана для посещения последовательно один за другим, считая реализованные решения предшественников экспериментами. При условии, что реализовалось первое состояние внешнего мира, вероятность того, что потребитель выберет первый ресторан, равна p, а вероятность того, что потребитель выберет второй ресторан, – $1 - p$. При условии, что реализовалось второе состояние внешнего мира, вероятность того, что потребитель выберет первый ресторан, равна $1 - p$, а вероятность того, что потребитель выберет второй ресторан, – p. Вероятность p также одна и та же для всех потребителей.

Вследствие симметричности ситуации достаточно ограничиться случаем $p \geq 0.5$. Считаем, что вероятность p является некоторой внутренней характеристикой степени рациональности потребителя. Так, полностью рациональный потребитель всегда (с вероятностью единица) выберет лучший ресторан, а полностью иррациональный потребитель – худший. Предполагается, что потребители одинаковы и величина p известна всем.

Итак, исследуем случай, когда потребитель j знает, в какие рестораны входили последние k потребителей, $k = 1, \ldots, j - 1$. В частном случае при $k = j - 1$ потребителю с номером j известен выбор всех предшествующих ему потребителей.

Очевидно, что первый потребитель выбирает ресторан № 1 с вероятностью $qp + (1 - q)(1 - p)$, а ресторан № 2 – с дополнительной вероятностью $q(1 - p) + p(1 - q)$. Второй байесовский потребитель рассматривает выбор первого потребителя как эксперимент и выбирает ресторан с вероятностью, вычисленной по закону Байеса:

$$B_2(1) = pq/[pq + (1-p)(1-q)], \quad B_2(0) = (1-p)q/[(1-p)q + p(1-q)],$$

или

$$B_2(m) = p^{m(1)}(1-p)^{1-m(1)}q/[p^{m(1)}(1-p)^{1-m(1)}q + p^{1-m(1)}(1-p)^{m(1)})(1-q)],$$

где $B_2(m)$ – апостериорная вероятность того, что ресторан № 1 лучше ресторана № 2 с точки зрения второго в последовательности потребителя при условии, что первый в последовательности потребитель пошел в ресторан № 1 ($m = 1$) или ресторан № 2 ($m = 0$). Более точно: $m = m(1) = 1$, если первый потребитель выбрал первый ресторан, и $m = m(1) = 0$ – если выбрал второй.

Третий потребитель рассматривает уже два последовательных эксперимента: выбор первого и выбор второго. Поэтому для него вероятность пойти в первый ресторан согласно дважды примененному закону Байеса равна

$$B_3(m) = p^{m(2)}(1-p)^{2-m(2)}q/[p^{m(2)}(1-p)^{2-m(2)}q + p^{2-m(2)}(1-p)^{m(2)})(1-q)],$$

где

$$m(2) = \begin{cases} 2, \text{если первый и второй потребитель выбрали ресторан № 1,} \\ 1, \text{если только один из предшественников выбрал ресторан № 1,} \\ 0, \text{если оба предшественника выбрали ресторан № 2.} \end{cases}$$

Отсюда видно, что $m(j)$ – это число потребителей, выбравших ресторан № 1, среди k предшественников потребителя $j + 1$. Поэтому потребитель $j + 1$ рассматривает k последовательных экспериментов и выбирает, используя закон Байеса, последовательно примененный k раз:

$$\begin{aligned} &B_{j+1}(m) = p^{m(j)}(1-p)^{j-m(j)}q/[p^{m(j)}(1-p)^{j-m(j)}q + p^{j-m(j)}(1-p)^{m(j)})(1-q)], \text{ если } j < k, \\ &B_{j+1}(m) = p^{m(j)}(1-p)^{k-m(j)}q/[p^{m(j)}(1-p)^{k-m(j)}q + p^{k-m(j)}(1-p)^{m(j)})(1-q)], \text{ если } j \ge k. \end{aligned} \tag{1a}$$

Обозначим $a = q/(1 - q)$ и $b = p/(1 - p)$ ($a \ge 1$, $b \ge 1$ для $q \ge 0.5$, $p \ge 0.5$). Упростив последнее выражение, имеем:

$$\begin{aligned} &B_{j+1}(m) = a/[a + b^{j-2m(j)}], \text{ если } j < k, \\ &B_{j+1}(m) = a/[a + b^{k-2m(j)}], \text{ если } j \ge k. \end{aligned} \tag{1}$$

Из (1) следует, что вероятность $B_j(m)$ может быть близка к нулю только при очень больших значениях $k - 2m(j)$ и близка к единице только при $2m(j)$, очень близких к k. Поэтому когда участник использует информацию о поведении фиксированного числа своих предшественников k ($k < j$), то при достаточно большом j вероятность $B_j(m)$ ограничена снизу и сверху. Если при выборе участник использует информацию о поведении всех своих предшественников (т.е. $k = j$), то из (1) следует, что с ростом j вероятность $B_j(m)$ может приближаться к единице при $m(j) > j\,(0.5 + \varepsilon)$ для сколь угодно малого, но постоянного ε.

Рассмотрим теперь четыре граничных случая.

1. Если $q = 1$, то из (1) имеем $B_j(m) = 1$ для $\forall m$, $k = 0, \ldots, j$. В этом случае априорное предпочтение не меняется и все потребители с вероятностью единица выбирают первый ресторан, и через j шагов ожидаемое число потребителей, выбравших первый ресторан, равно j при любом значении вероятности p.

2. Если $q = 0.5$, то из (1) следует, что $B_j(m) = 1/[1 + (p/(1-p))^{j-2m(j)}]$, $j \le k$, и $B_j(m) = 1/[1 + (p)$: $: (1-p))^{k-2m(j)}]$, $j > k$. Тогда $B_j(m) = 1 - B_j(j - m)$, когда $j > k$, и $B_j(m) = 1 - B_j(k - m)$ при $j \le k$. А учитывая, что априорные вероятности быть лучшим для обоих ресторанов равны ($q = 0.5$), то ничего не изменится, если в ходе процесса байесовских выборов рестораны поменять местами. Отсюда можно сделать вывод, что ожидаемое число потребителей, выбравших первый ресторан, будет $j/2$.

3. В случае $p = 0.5$ из (1) вытекает, что $B_j(m) = q$ при любых j и k. Поэтому вероятность, что после j выборов m потребителей предпочтут первый ресторан, равна $[j!/[m!(j-m)!]]q^m(1-q)^{j-m}$. Поэтому ожидаемое число потребителей, выбравших первый ресторан, равно jq, и в этом случае стадное поведение не появляется.

4. Если $p = 1$, то из (1) получим, что

$$B_j(m) = \begin{cases} 0 & \text{при } m(j) < k/2, \\ 1 & \text{при } m(j) > k/2, \\ q & \text{при } m(j) = k/2. \end{cases}$$

Но в таком случае все последующие потребители просто повторяют выбор ресторана, который сделал первый потребитель. Таким образом, при $p = 1$ ожидаемое число потребителей, выбравших первый ресторан, равно jq, а ожидаемое число потребителей, выбравших второй ресторан, – $(1-q)j$, и можно говорить о стадном поведении.

В дальнейшем будем анализировать случай $0.5 \le q < 1$, $0.5 \le p < 1$. В работах (Banerjee, 1992; Bikhandany, Hirsheifer, Welch, 1997) рассматривается такая последовательность выборов, когда начиная с некоторого участника оставшиеся участники при определении своего выбора используют только информацию о выборе, сделанном их предшественниками, и все делают одинаковый выбор. Такая последовательность выборов определяется в этих работах как каскад. В нашей модели все участники не могут сделать одинаковый выбор, поскольку выбор является случайным с вероятностями, определенными равенствами (1). Можно говорить только об определенной вероятности одинакового выбора участников.

3. АНАЛИЗ МОДЕЛИ

3.1. Случай минимальной информации. Вначале возьмем простой случай процесса последовательных выборов, т.е. $k = 1$. Здесь начиная с первого шага имеем однородную цепь Маркова. Нам известны: вероятность выбора потребителем первого ресторана при условии, что предыдущий потребитель выбрал первый ресторан, $Q_{1,1} = Q(1|1) = a/(a + b^{-1})$; вероятность выбора потребителем первого ресторана при условии, что предыдущий потребитель выбрал второй ресторан, $Q_{1,2} = Q(1|2) = a/(a + b)$ и, следовательно, условные вероятности $Q_{2,1} = Q(2|1)$, $Q_{2,2} = Q(2|2)$. При $0.5 \le q < 1$, $0.5 \le p < 1$ матрица условных вероятностей является стохастической и все ее элементы отличны от нуля. Поэтому при $N \to \infty$ и при любой вероятности r_1 выбора первым потребителем ресторана № 1 вероятность для потребителя j выбрать этот ресторан r_j будет стремиться к стационарной вероятности r, когда $j \to \infty$. Вектор $(r, 1-r)$ является собственным вектором матрицы условных вероятностей и вычисляется стандартным образом. Величина r является функцией от q и p: $r = r(p, q) = a(ab + 1)/(a^2b + b + 2a)$, при этом $1 > r > 0$.

Динамика цепи Маркова описывается равенством

$$r_t = \{a(b^2 - 1)/[(1 + ab)(a + b)]\}r_{t-1} + a/(a + b)$$

или

$$r_t = r - (r - r_1)\{a(b^2 - 1)/[(1 + ab)(a + b)]\}^{t-1}, \tag{2}$$

где r_t – вероятность того, что участник t выбирает первый ресторан, и, как сказано выше:

$$r_1 = pq + (1-p)(1-q) = (ab + 1)/(1 + a)(1 + b).$$

Очевидно, что $0.5 < r_1 < r_t < r < 1$.

Обозначим через $P_j(m)$ вероятность события, которое состоит в следующем: в момент времени j (или перед выбором потребителя $j + 1$) число потребителей, которые уже выбрали первый ресторан, равняется m; $Em_j(p, q)$ – ожидаемое число потребителей, выбравших к моменту $j + 1$ первый ресторан. Очевидно, что $Em_j(p, q) = \sum_{m=0}^{j} mP_j(m)$.

Легко увидеть, что $Em_j(p, q)/j \to r(p, q)$, когда $j \to \infty$. Таким образом, $r(p, q)$ является пределом при стремящемся к бесконечности числе потребителей ожидаемого числа потребителей, выбравших первый ресторан.

Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1. *При росте j величины $P_j(0)$ и $P_j(j)$ стремятся к нулю и существует такое j_0, что для $j > j_0$ будет $P_j(m + 1) - P_j(m) > 0$ при $m < jr_1$ и $P_j(m + 1) - P_j(m) < 0$ при $m > jr$.*

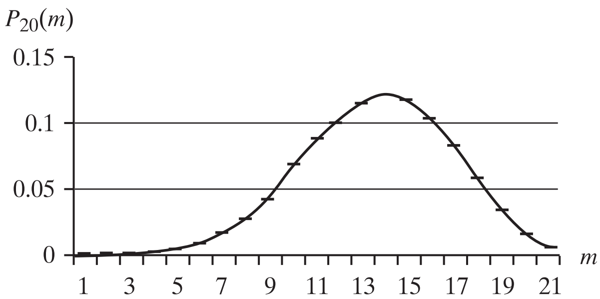

Рис. 1. $q = 0.6$, $p = 0.7$, $j = 20$, $k = 1$

Таким образом, при достаточно большом числе участников распределение $P_j(m)$ не убывает с ростом m при $m < jr_1 - 1$ и не возрастает с ростом m при $m > jr + 1$. Кроме того, $P_j(0)$ и $P_j(j)$ с увеличением j могут стать сколь угодно малыми. Очевидно, что наиболее вероятным является событие, когда ожидаемое число потребителей, выбравших первый ресторан, достаточно близко к ожидаемому числу потребителей, выбравших второй ресторан. Маловероятны ситуации, когда число потребителей, предпочитающих первый ресторан, незначительно или составляет подавляющее большинство. На рис. 1 можно увидеть зависимость $P_{20}(m)$ от m при $q = 0.6$, $p = 0.7$. Итак, при минимальной информации, используемой потребителем при выборе решения, стадное поведение отсутствует.

3.2. Случай максимальной информации. Случай, когда потребитель j, зная о действиях всех своих предшественников в очереди и рассматривая их действия как последовательность экспериментов, определяет апостериорную вероятность того, что первый ресторан лучше второго $B_j(m)$, можно считать случаем максимальной информированности потребителя. Следующие выражения описывают динамику вероятностей $P_j(m)$:

$$P_j(m) = P_{j-1}(m-1)B_j(m-1) + P_{j-1}(m)(1 - B_j(m)), \; m = 1, ..., j, \tag{3}$$

$$P_j(j+1) = P_{j-1,}(j)B_j(j), \quad P_j(0) = P_{j-1}(0)(1 - B_j(0)). \tag{4}$$

Утверждение 2. *Для $1 > p > 0.5$ и $1 > q \geq 0.5$ и любого m существуют пределы $P_j(m)$, $m = 0, ..., j$, когда $j \to \infty$, и существуют пределы $P_j(j - m)$, $m = 0, ..., j$, когда $j \to \infty$.*

Это утверждение показывает нам, что когда j больше некоторого j_0, то фактически распределение $P_j(m)$ очень медленно меняется с ростом j. Поэтому можно использовать предельные распределения $P(m)$ и $P(j - m)$ для анализа распределений $P_j(m)$ и $P_j(j - m)$ при конечном, но достаточно большом j.

Утверждение 3. *Если $1 > p > 0.5$ и $1 > q \geq 0.5$, то для любого $L = \text{const}$ вероятности $P_j(m)$ стремятся к нулю, если j и m одновременно стремятся к бесконечности и $0.5j - L < m < 0.5j + L$.*

Это утверждение дает нам некоторую характеристику распределений $P_j(m)$. Вероятность того, что число потребителей, предпочитающих первый ресторан, не более чем на L потребителей отличается от половины числа потребителей, становится сколь угодно малой с ростом номера последнего потребителя.

Это еще не означает, что появляется стадное поведение. Например, при больших j наиболее вероятным оказывается выбор одного какого-то ресторана некоторым числом потребителей, и число этих потребителей, намного меньшее половины, удовлетворяет утверждениям 2 и 3. К сожалению, нам не удалось полностью завершить аналитическое исследование модели. Следующее утверждение завершает наши аналитические результаты.

Утверждение 4. *Если $1 > p > 0.5$ и $1 > q \geq 0.5$, то для любого конечного M найдется такое $\gamma(m) > 0$, что для любого $j > j_0$ (где j_0 достаточно велико) будет $P_j(m) > \gamma(m)$ для всех $m < M$ и $m > j - M$.*

Таким образом, величины $P_j(m)$ будут сколь угодно малы при $0.5j - L < m < 0.5j + L$ и всегда больше некоторой ненулевой величины для $m < M$ и $m > j - M$ при условии, что j достаточно велико.

Для исследования случая максимальной информированности участника рассматривались численные примеры. Для численного вычисления вероятностей и ожидаемого числа потребителей, которые предпочитают первый ресторан, были использованы выражения (3), (4), описывающие динамику нашей модели, и находились пределы доли ожидаемого числа потребителей, предпочитающих первый ресторан, $(Em_j(p, q)/j)$ при $j \to \infty$. Результаты этих вычислений приводятся в таблице.

Предельные значения отношения ожидаемого числа потребителей, предпочитающих первый ресторан, к общему числу потребителей

q \ p	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	1
0.0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
0.55	0.55	0.609	0.607	0.595	0.585	0.580	0.570	565	0.560	0.554	0.55
0.6	0.6	0.709	0.707	0.686	0.667	0.652	0.640	0.629	0.619	0.609	0.6
0.65	0.65	0.790	0.792	0.769	0.745	0.725	0.708	0.692	0.672	0.664	0.65
0.7	0.7	0.884	0.885	0.848	0.816	0.793	0.773	0.754	0.736	0.712	0.7
0.75	0.75	0.900	0.916	0.899	0.877	0.855	0.833	0.813	0.793	0.772	0.75
0.8	0.8	0.932	0.951	0.942	0.926	0.907	0.888	0.868	0.848	0.826	0.8
0.85	0.85	0.955	0.972	0.971	0.962	0.950	0.935	0.918	0.908	0.878	0.85
0.9	0.9	0.973	0.989	0.987	0.984	0.979	0.971	0.960	0.940	0.928	0.9
0.95	0.95	0.988	0.993	0.995	0.995	0.994	0.993	0.989	0.983	0.973	0.95
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Как показывают данные, представленные в таблице, отношение ожидаемого числа потребителей, предпочитающих первый ресторан, к общему числу потребителей, естественно, возрастает с увеличением априорного предпочтения q и достигает максимального значения (при $q = 1$ и любом p все потребители предпочитают первый ресторан). Но с ростом вероятности рационального выбора p отношение ожидаемого числа потребителей, предпочитающих первый ресторан, к общему числу потребителей сначала увеличивается, а после некоторого значения p начинает убывать и стремиться к q. Существует “порог рациональности” $p^*(q)$, после которого влияние действий предшественника уменьшается, причем $p^*(q)$ растет с ростом q.

Но особый интерес представляют распределения $P_j(m)$ для $m = 0, \ldots, j$, которые были получены в результате расчетов. Выше было показано, что при $q = 0.5$ ожидаемое число потребителей, выбравших первый ресторан, равно qj. Численные эксперименты показали, что при большом значении j вероятности того, что подавляющее число участников очереди выберет только первый или только второй ресторан, максимальны и увеличиваются вместе с p. Например, при $p = 0.9$ и $j = 200$ можно говорить об амбивалентном стадном поведении, так как $P_{200}(0) = P_{200}(200) = 0.45$.

Из численных экспериментов видно, что в случаях, когда $q > 0.5$, распределение $P_j(m)$ асимметрично относительно $m = j/2$. Но в соответствии с утверждениями 3 и 4 результаты вычислительных экспериментов показывают, что наиболее вероятными оказываются либо малые, либо близкие к j количества потребителей, выбравших первый ресторан (рис. 2).

На рис. 2 показано, как вероятность того, что только малое число участников предпочитает первый ресторан (т.е. большинство участников предпочитает второй ресторан), убывает с ростом p, а вероятность предпочтения первого ресторана большинством участников очереди становится все больше и больше.

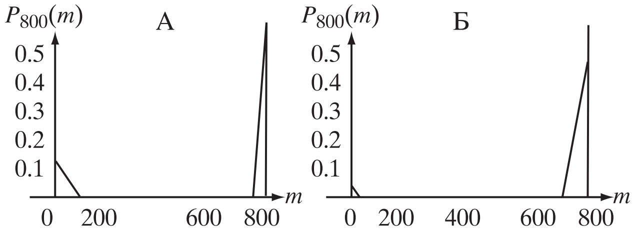

Рис. 2. А. $q = 0.8$, $p = 0.7$, $j = 800$. Б. $q = 0.8$, $p = 0.8$, $j = 800$

3.3. Случай информации о небольшом числе предшественников. Обозначим через $s(j)$ результат выбора потребителя j. Предполагаем, что $s(j) = 1$, если потребитель j предпочитает первый ресторан, и $s(j) = 0$, если – второй. Таким образом, последовательность нолей и единиц $s(0), \ldots, s(N), \ldots$ является траекторией нашей системы.

В случае когда при принятии каждого последовательно принимающегося решения потребитель использует информацию о выборе только k своих предшественников, можно рассмотреть $P_{j-1}(n, s(j-k), \ldots, s(j-1))$ – вероятность к моменту j иметь n потребителей, принявших решение до этого момента и выбравших при этом первый ресторан, тогда как выбор последних k участников представлен набором $s(j-k), \ldots, s(j-1)$. Динамику величин $P_{j-1}(n, s(j-k), \ldots, s(j-1))$ можно записать с помощью формулы

$$P_{j-1}(n+s(j), s(j-k+1), s(j-k+2), ..., s(j)) =$$

$$= \sum_{s(j)=0}^{1} [P_{j-1}(n, s(j-k), s(j-k+1), \ ..., s(j-1)) P(a^{s(j)} b^{(1-s(j))[k-2m(j)]}/(a+b^{k-2m(j)}))], \qquad (5)$$

где $m(j) = s(j-k) + \ldots + s(j-1)$, $0 \le n \le j$. Конечно, эта формула имеет место, только когда $j > k$.

Для случая $j \le k$ имеет место другая зависимость:

$$P_{j-1}(n+s(j), s(1), ..., s(j)) =$$

$$= \sum_{s(j)=0}^{1} P_{j-1}(n, s(1), \ ..., s(j-1)) [a^{s(j)} b^{(1-s(j))[j-2m(j)]}/(a+b^{j-2m(j)})], \qquad (6)$$

где $m(j) = n = s(1) + \ldots + s(j-1)$, $0 \le n \le j$.

Когда участнику очереди известно лишь о выборе последних предшественников, утверждения 3, 4 не имеют места. Поэтому вопрос о наличии элементов стадного поведения в коллективном поведении большого числа участников изучался только для численных примеров. Мы использовали уравнения динамики модели (5), (6) для нахождения вероятностей $P_j(m)$ и получения ожидаемого числа потребителей, предпочитающих первый ресторан. Приводимые ниже данные относятся к исследованным нами численным примерам со значением j, не превышающим 100.

В случае когда участник знает о действиях нескольких предшественников и $q = 0.5$, $j \le 100$, $p > 0.5$, при всех значениях k распределение $P_j(m)$ является симметричным относительно $m = 0.5j$ и для $20 \le j \le 100$ сосредоточено около $m = 0$ и $m = j$. Это означает, что вероятности того, что подавляющее число участников очереди выберет только первый или только второй ресторан, максимальны и уменьшаются с ростом p, как это видно из численных экспериментов и рис. 3.

В случаях $q > 0.5$ распределение $P_j(m)$ асимметрично относительно $m = j/2$, как это видно из численных экспериментов.

С ростом q вероятности предпочтения первого ресторана малым числом участников очереди становятся все меньше и меньше, т.е. с большей и большей вероятностью почти все предпочитают первый ресторан. На рис. 3 показаны распределения $P_j(m)$ для $k = 6$ и $k = 3$ для $p = 0.8$ и $q = 0.7$, $q = 0.8$. Отметим, что в случае использования потребителями информации о поведении конечного числа предшественни-

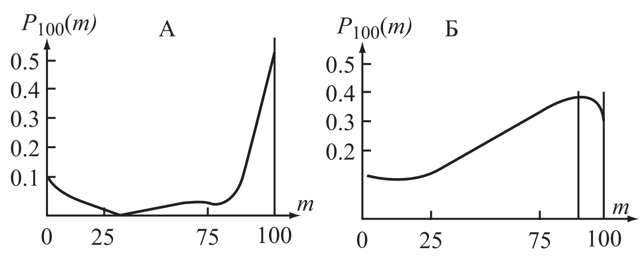

Рис. 3. А. $q = 0.7$, $p = 0.8$, $k = 6$, $j = 100$. Б. $q = 0.8$, $p = 0.8$, $k = 3$, $j = 100$

ков не возникает стадное поведение, соответствующее нашему определению. При данном k и при $j \to \infty$ $P_j(0)$ и $P_j(j)$ стремятся к нулю. Действительно:

$$P_j(j) = r_1(a/(a+b^{-1})) \ \ldots \ (a/(a+b^{-k}))^{j-k} < r_1(a/(a+b^{-1}))^{j-1},$$

$$P_j(0) = (1-r_1)(b^{-1}/(a+b^{-1})) \ \ldots \ (b^{-k}/(a+b^{-k}))^{j-k} < (1-r_1)(b^{-1}/(a+b^{-1}))^{j-1},$$

при этом $b^{-1}/(a + b^{-1}) < 1$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В экономике при изучении механизмов стадного поведения представляется наиболее важным понять, при каких условиях такое поведение возникает. При каком механизме взаимодействия между участниками коллектива и при какой информации, доступной каждому участнику в каждый момент времени, в финале процесса выбор большинства участников становится одинаковым?

В рассматривавшейся модели взаимодействие между последовательно принимающими решение участниками состояло только в наблюдении каждым участником поведения той части коллектива, которая сделала свой выбор до него. Кроме полученной из этого наблюдения информации выбор каждого участника определялся априорной информацией. В определенных случаях возникает стадное поведение. Одной из целей данной работы было сравнение поведения потребителей в нашей модели примера Беккера с поведением участников последовательности в моделях работ (Banerjee, 1992; Bikhandany, Hirsheifer, Welch, 1992). В моделях из этих работ возникает частный случай стадного поведения, который состоит в том, что начиная с некоторого участника все последующие участники принимают одинаковые решения независимо от своей собственной информации (каскад). Возникающее в наших моделях стадное поведение не является информационным каскадом, так как любой участник при определении вероятности предпочтительности одного из двух объектов использует собственную информацию (p, q).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Очевидно, что

$$P_j(0) = \prod_{t=0}^{j} (1-r_t), \quad P_j(j) = \prod_{t=0}^{j} r_t. \tag{A1}$$

Так как $r_1 < r_t < r < 1$, то из приведенных выше выражений видно, что $P_j(0)$ и $P_j(j)$ стремятся к нулю при росте j. Тогда можно записать:

$$P_j(m+1) = \sum \prod_{t=t_1}^{t_{m+1}} \left(r - \alpha^{t-1}(r-r_1) \prod_{s=s_1}^{s_{j-m-1}} (1 - r_1 + \alpha^{s-1}(r-r_1) \right),$$

где сумма берется по всем возможным перестановкам из j индексов с $m + 1$ возрастающими индексами t_i и $j - m - 1$ возрастающими индексами s_i, причем множества индексов не пересекаются. Заметим, что

$$\frac{r_1}{(1-r_1)} < \frac{r - \alpha^{t-1}(r-r_1)}{1 - r + \alpha^{t-1}(r-r_1)} < \frac{r}{1-r}. \tag{A2}$$

Из ($A1$) вытекает, что если из произведения вынести $r_1 - \alpha^{t-1}(r - r_1)$, а затем разделить и умножить на $1 - r + \alpha^{t-1}(r - r_1)$, то при любом $t = t_1, \ldots, t_{m+1}$ в сомножителе стоит слагаемое из соответствующего выражения для $P_j(m)$, умноженное на $[r - \alpha^{t-1}(r - r_1)]/[1 - r + \alpha^{t-1}(r - r_1)]$. Выделяя множитель $r - \alpha^{t-1}(r - r_1)$ с каким-то $t = t_1, \ldots$ $\ldots, t_{m+1}$ и при этом деля и одновременно умножая на $1 - r + \alpha^{t-1}(r - r_1)]$ с тем же самым t, получаем слагаемое из формулы для $P_j(m)$, умноженное на коэффициент. Кроме этого, имеем еще $j - m$

слагаемых, соответствующих $m + 1$ слагаемому в формуле для $P_j(m)$. Учитывая это и используя выражение ($A2$), приходим к

$$\frac{P_j(m)[(j-m)/(m+1)]}{r_1/(1-r_1)} > P_j(m+1) > \frac{(j-m)/(m+1)}{r/(1-r)}P_j(m).$$

Из этих неравенств нетрудно вывести следующее условие:

$$P_j(m+1) - P_j(m)\begin{cases} > 0, \text{ если } m < r_1 j; \\ < 0, \text{ если } m > r_1 j. \end{cases} \blacksquare$$

Доказательство утверждения 2. Рассмотрим кумулятивную функцию распределения $\Pi_j(m) = P_j(0) + \ldots + P_j(m)$ (вероятность того, что число потребителей, вошедших в первый ресторан до момента j, не более m) и применим формулы (3), (4) к каждому слагаемому правой части этого выражения, тогда

$$\Pi_j(m) = P_{j-1}(0)(1 - B_j(0)) + P_{j-1}(0)B_j(0) + P_{j-1}(1)(1 - B_j(1)) + \ldots$$
$$\ldots + P_{j-1}(m-1)(1 - B_j(m-1)) + P_{j-1}(m-1)B_j(m-1) + P_{j-1}(m)(1 - B_j(m)) =$$
$$= P_{j-1}(0) + P_{j-1}(1) + \ldots + P_{j-1}(m) + P_{j-1}(m)(1 - B_j(m)) = \Pi_{j-1}(m) - P_{j-1}(m)B_j(m).$$

Итак,

$$\Pi_j(m) = \Pi_{j-1}(m) - P_{j-1}(m)B_j(m),\ m = 0, \ \ldots, \ j;\ \Pi_{j-1}(j) = 1. \qquad (A3)$$

Имеем $\Pi_j(m) \le \Pi_{j-1}(m)$, потому что $P_{j-1}(m) \ge 0$, $B_j^s(m)) \ge 0$ для $m = 0, \ldots, j$ и $0 \le \Pi_j(m)$ для любого j, $m = 0, \ldots, j + 1$. Таким образом, предел $\Pi_j(m)$ при $j \to \infty$ существует для любого m, потому что $\Pi_j(m)$ – не возрастающая, ограниченная снизу последовательность. Заметим, что $P_j(m) = \Pi_j(m) - \Pi_j(m-1)$ для $m = 0, \ldots, j + 1$. Поэтому предел $P_j(m)$ при $j \to \infty$ существует для любого m.

Из (3), (4) следует, что

$$\Pi_j(j + 1 - m) = 1 - [P_j(j + 1) + P_j(j) + \ldots + P_j(j - m + 1)],$$
$$\Pi_{j-1}(j - m) = 1 - [P_{j-1}(j) + P_{j-1}(j - 1) + \ldots + P_{j-1}(j - m + 1)].$$

Применим формулы (3), (4) к каждому из слагаемых $P_j(j - s)$, $s = -1, 0, \ldots, m - 1$, которые составляют правую часть выражения, тогда

$$\Pi_j(j + 1 - m) = \Pi_{j-1}(j - m) + P_{j-1}(j - m)(1 - B_j(j - m)),\ m = 1, \ldots, j;\quad \Pi_{j-1}(1) = 1. \qquad (A4)$$

Последовательность $\Pi_j(j - m)$ не убывающая и ограниченная сверху единицей, потому при $j \to \infty$ она сходится к некоторому пределу. ■

Доказательство утверждения 3. Рассмотрим случай, когда число потребителей, предпочитающих первый ресторан, меньше половины всех потребителей, сделавших выбор до этого момента, $m \le j/2$. Из ($A3$) имеем $\Pi_j(m) - \Pi_{j-1}(m) = -P_{j-1}(m)B_j(m)$, $m = 0, \ldots, j$. Таким образом, $P_{j-1}(m)B_j^s(m) \to 0$, так как последовательность $\Pi_j(m)$ сходится при любом m. По условию L – некоторое целое число. Согласно (1) в данном случае имеем $B_j(m) = a/[a + b^{j-2m}]$. При этом $b > 1$, так как $p > 0.5$. Поэтому $B_j(m) \ge F(L) > 0$, если $q < 1$, и $j - 2m < 2L$ для любого достаточно большого j, где $F(L) = 1/[1 + b^{2L}/a]$. Следовательно, при этих условиях $P_{j-1}(m) \to 0$, когда j стремится к бесконечности.

Итак, для любого конечного, целого L имеет место следующее: $P_j(m) \to 0$, если j и m одновременно стремятся к бесконечности и $j/2 \ge m > j/2 - L$.

Теперь рассмотрим случай, когда число потребителей, которые предпочитают первый ресторан, равно $j - m$ и это число больше половины потребителей, сделавших свой выбор к моменту j, и пусть $j - m \ge j/2$. Из ($A4$) следует, что $P_{j-1}(j - m)(1 - B_j(j - m)) \to 0$.

Если $j - 2(j - m) > -2L$, тогда $1 - B_j(j - m) > 1 - F(L) > 0$ для любых j и $j/2 < j - m < j/2 + L$. Тогда для любого $L = \text{const}$ вероятность $P_j(m) \to 0$, если j, $m \to \infty$ и $j/2 - L < m < j/2 + L$. ■

Доказательство утверждения 4. Рассмотрим $P_j(m)$, где j достаточно велико и $m < M$. Для каждого такого m найдется достаточно большое число последовательностей выборов потребителей, таких, что число потребителей, пришедших до потребителя i ($2m < i < j$) и уже выбравших первый ресторан, будет равно m и с ростом числа потребителей от i до j число потребителей, выбравших первый ресторан, не увеличивается, т.е. все последующие за потребителем i идут во второй ресторан (конечно, это не все возможности, а только их часть). Поскольку согласно нашим предположениям $q > 0.5$ и $p > 0.5$, то $a > 1$ и $b > 1$. Согласно формулам (1), (3), (4) имеем

$$P_j(m) > P_i(m) \prod_{s=i+1}^{j} (1 - B_{i+s}(m)) = P_i(m) \prod_{s=i+1}^{j} (1 - a/(a + b^{s-2m})) = P_i(m)C(j, i). \qquad (A5)$$

Выберем i таким, что $\ln(1 - a/(a + b^{s-2m})) > -ca/(a + b^{s-2m})$, $s > i$, где c – некоторая константа, $c < 1$. Тогда из ($A5$), воспользовавшись неравенством $\ln(1 - x) > -x - 0.5x^2$, запишем:

$$C(j, i) = \prod_{s=i+1}^{j} \left(1 - \frac{a}{a + b^{s-2m}}\right) = \exp\left(\sum_{s=i+1}^{j} \ln\left(1 - \frac{a}{a + b^{s-2m}}\right)\right) >$$

$$> \exp\left(-\sum_{s=i+1}^{j} \frac{a}{a + b^{s-2m}} - \left[\sum_{s=i+1}^{j} \frac{a}{a + b^{s-2m}}\right]^2\right) >$$

$$> \exp\left(-\frac{a}{b^{i+1-2m}} \sum_{s=0}^{j-i-1} \frac{1}{b^s} - \left(\frac{a}{b^{i+1-2m}}\right)^2 \left[\sum_{s=0}^{j-i-1} \frac{1}{b^s}\right]^2\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{a}{b^{i+1-2m}} \times \frac{1 - 1/b^{j-i}}{1 - 1/b} - \left(\frac{a}{b^{i+1-2m}}\right)^2 \left(\frac{1 - 1/b^{j-i}}{1 - 1/b}\right)^2\right) > 0.$$

Обозначим

$$\exp\left(-\frac{a}{b^{i+1-2m}} \times \frac{1}{1 - 1/b} - \left[\frac{a}{b^{i+1-2m}}\right]^2 \left[\frac{1}{1 - 1/b}\right]^2\right) P_i(m) = \gamma(m),$$

получим утверждение 4 для $m < M$. Заметим, что $P_i(m) > 0$ и $b^{\,i-2m+1}$ конечно при конечных m и i, а также $a/(1 - 1/b) > 0$, поэтому $\gamma(m) > 0$.

В случае $m > j - M$ будет $j - m$ потребителей, предпочитающих второй ресторан, где $j - m < M$. Поэтому в этом случае доказательство будет полностью симметричным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Вороновицкий М.М., Мейталь Ш. (2003): Модель социального влияния на цены // *Экономика и мат. методы*. Т. 39. № 4.

Anderson L.R., Holt Ch.A. (1997): Information Cascades in the Laboratory // *American Econ. Rev*. December.

Banerjee A.V. (1992): A simple Model of Herd Behavior // *The Quarterly Journal of Econ.* Vol. CVII. August.

Becker G.S. (1991): A Note on Restaurant Pricing and Other Example on Social Influence on Price // *Journal of Polit. Econ*. Vol. XCIX.

Bikhandany S., Hirsheifer D., Welch I. (1992): A Theory of Fads, Fashion, Custom, and Cultural Change as Information Cascades' // *Journal of Polit. Econ.* Vol. 100. № 5.

Scharfsein D.S., Stein J.C. (1990): Herd Behavior and Investment // *American Econ. Rev.* Vol. 80 (3).

Smith L., Sorensen P. (2000): Pathological Outcomes of Observation Learning // *Econometrica*. Vol. 68 (2).

Поступила в редакцию
27.03.2008 г.

Herd Behavior in Bayesian Choice and Linear Sequence of Interaction

M.M. Voronovitsky

The interesting effect of choice appears in the Becker's known example when the choice of consumers concentrates on one of two identical under all characteristics of the goods (restaurants). The case when the choice of participants occurs consistently one after another and each choice happens only once is investigated in the given paper. We assume that for all consumers there are the same aprioristic probability of preference of one of two goods (restaurants) and aprioristic probability of rationality of the consumer. It is assumed, that the participant knows about a choices of several his predecessors or about of choices of all of them and for a choice uses Bayesian strategy. The collective choice is investigated at the large length of sequence and various numbers of predecessors which choice each participant knows about. In the case when each consumer knows about choice of one his predecessor only the effect Becker's example(herd behavior) is absent, but a herd behavior can to arise in the case when he knows about choices of all his predecessors in sequence, but consumers take into account also the own information, received by them a priori.