ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2009, том 46, № 1, с. 137–143

ЗАМЕТКИ И ПИСЬМА

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МОДИФИЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ РАМСЕЯ–СОЛОУ, УЧИТЫВАЮЩЕЙ ЗАПАЗДЫВАНИЕ ПРИ ВВОДЕ ФОНДОВ

© 2009 г. **В.Л. Хацкевич**

(Воронеж)

Нелинейная динамическая односекторная модель макроэкономики, введенная П. Рамсеем и Р. Солоу, изучалась многими авторами в связи с важностью приложений (см., например, исследования (Ашманов, 1984; Колемаев, 2002; Жак, 2003)). Рассмотрим модификацию модели Солоу с учетом запаздывания при вводе фондов (Колемаев, 2002):

$$\begin{cases} X = I + C, \\ X = F(K, L), \quad I = \rho X, \\ dK/dt = -\mu K + V, \quad K(0) = K_0, \\ dV/dt = \alpha I - \alpha V, \\ L = L_0 e^{\beta t}. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь X – валовой внутренний продукт (ВВП); C – фонд непроизводственного потребления; I – инвестиции; L – число занятых; K – фонды; F – производственная функция; $V(t)$ характеризует ввод фондов в момент времени t; μ – доля выбывших за год основных фондов; α – показатель распределения ввода инвестиций; β – годовой темп прироста числа занятых; ρ – норма накопления (доля валовых инвестиций в валовом внутреннем продукте). При этом $0 < \mu < 1$, $0 < \beta < 1$, $0 < \rho < 1$, $0 < \alpha$.

Первое уравнение в (1) – баланс распределения ВВП на инвестиции и непроизводственное потребление; второе – производственная функция валового внутреннего продукта в зависимости от ресурсов; третье – динамика фондов в зависимости от износа и ввода фондов; четвертое – динамика фондов с учетом инвестиций и запаздывания во вводе фондов; пятое уравнение – динамика трудовых ресурсов. Отметим, что при $\alpha \to \infty$ система (1) превращается в стандартную модель Солоу.

Будем считать, что производственная функция F является линейно-однородной. Тогда для удельных показателей $i = I/L$, $k = K/L$, $c = C/L$, $f = F/L$, $v = V/L$ система уравнений (1) может быть представлена в виде

$$c = (1 - \rho)f(k),$$

причем переменные k и v удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} dk/dt = -\lambda k + v, \ \lambda = \mu + \beta, \\ dv/dt = -\upsilon v + + \alpha\rho f(k), \quad \upsilon = \alpha + \lambda. \end{cases} \tag{2}$$

Целью настоящей работы является обоснование устойчивости модели (2), что обеспечивает сбалансированный рост макропеременных модели (1) с одинаковым темпом β, равным темпу прироста числа занятых (в случае $\beta = 0$ устойчивость обеспечивает стабильность соответствующей экономической системы). Ниже будем предполагать, что для функции f выполнены неоклассические условия:

$$f(k) > 0, \ f'(k) > 0, \ f''(k) < 0, \ \forall k > 0, \ f(0) = 0, f'(0) = \infty. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены неоклассические условия* (3) *для функции f, тогда каждому начальному распределению*

$$k(0) = k_0, \quad v(0) = v_0 \tag{4}$$

соответствует решение системы (2)*, причем единственное. Это решение определено для всех* $t > 0$.

Этот факт вытекает из липшицевости правой части системы (2), обеспечиваемой неоклассическими условиями для функции f.

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *каждому неотрицательному начальному распределению* $k_0 \ge 0$, $v_0 \ge 0$ *соответствует неотрицательное решение задачи* (2), (4), *определенное при всех* $t > 0$.

Действительно, обозначим правые части системы (2) через

$$g_1(k, v) = -\lambda k + v, \;\; g_2(k, v) = -\upsilon v + \alpha\rho f(k),$$

они обладают свойством относительной "положительности" (Красносельский, 1966, с. 62):

$$g_1(0, v) = v \ge 0, \quad g_2(k,0) = \alpha\rho f(k) \ge 0 \quad \forall v \ge 0, \quad \forall k \ge 0.$$

Поэтому результат теоремы 2 следует из рассуждений, близких к (Красносельский, 1966, с. 62).

Теорема 3. *Если в условиях теоремы* 2 *выполняется* $\tilde{k}_0 \ge k_0 \ge 0$ *и* $\tilde{v}_0 \ge v_0 \ge 0$, *то и при всех* $t > 0$ *для соответствующих решений* $\tilde{k}(t)$, $\tilde{v}(t)$ *и* $k(t)$, $v(t)$ *задачи* (2), (4) *будут выполнены соотношения* $\tilde{k}(t) \ge k(t)$ *и* $\tilde{v}(t) \ge v(t)$.

Это следует из внедиагональной монотонности правой части системы (2):

$$g_1(k, v_1) = -\lambda k + v_1 \le g_1(k, v_2) = -\lambda k + v_2, \quad \text{если } v_1 \le v_2;$$

$$g_2(k_1, v) = -\upsilon v + \alpha\rho f(k_1) \le -\upsilon v + \alpha\rho f(k_2) = g(k_2, v), \quad \text{если } k_1 \le k_2,$$

и результата о монотонности оператора сдвига, полученного в (Красносельский, 1966, с. 228).

Стационарная точка дифференциальных уравнений (2) задается уравнениями

$$\begin{cases} -\lambda k^0 + v^0 = 0, \\ -\upsilon v^0 + \alpha\rho f(k^0) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Разрешив эту систему относительно v^0, получим уравнение для k^0:

$$-\lambda\upsilon k^0 + \alpha\rho f(k^0) = 0. \tag{6}$$

Если для функции f выполнены неоклассические условия (3), то (6) имеет единственное решение (исключая тривиальное $k^0 = 0$), причем положительное.

Теорема 4. *Пусть для функции f выполнены неоклассические условия* (3). *Тогда стационарное решение* k^0, v^0 *системы* (2) (*т.е. решение системы* (5)) *асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Действительно, рассмотрим линеаризованную систему, соответствующую (2) в точке k^0, v^0:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ \alpha\rho f'(k^0) & -(\alpha+\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Собственные значения z матрицы A системы (7) удовлетворяют уравнению

$$z^2 + z(\alpha + 2\lambda) + \lambda(\alpha + \lambda) - \alpha\rho f'(k^0) = 0.$$

Его дискриминант $D = \alpha^2 + 4\alpha\rho f'(k^0) > 0$ в силу условия $f' > 0$. Тогда корни уравнения вещественны и отрицательны в силу условия $\alpha + 2\lambda > \sqrt{D}$. Последнее соотношение справедливо, так как предположение противного с учетом неоклассических условий (3) на f приводит к неравенству (Ашманов, 1984, с. 244):

$$\alpha\lambda + \lambda^2 < \alpha\rho f'(k^0) < \alpha\rho f(k^0)/k^0.$$

А это противоречит равенству (6) для k^0.

Таким образом, оба собственных значения матрицы A вещественны и отрицательны. Поэтому результат теоремы 4 следует из теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению (Демидович, 1967).

Замечание 1. Если начальные значения $k(0) > k^0$, $v(0) > v^0$, то результат теоремы 4 допускает усиление. А именно, в этом случае имеет место равномерная асимптотическая устойчивость в области (k^0, ∞), (v^0, ∞).

Действительно, положим $x_1 = k - k^0$, $x_2 = v - v^0$. Тогда с учетом (5) система (2) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -\lambda x_1 + x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -(\alpha+\lambda)x_2 + \alpha\rho\big(f(k^0+x_1) - f(k^0)\big). \end{cases} \tag{8}$$

При этом

$$f(k^0+x_1) - f(k^0) = f'(k^0)x_1 + 0.5f''(k^0+\theta x_1)x_1^2 < f'(k^0)x_1$$

для некоторого $\theta \in (0, 1)$. Тогда указанный результат вытекает из того, что вследствие положительности и неубывания по внедиагональным переменным системы (8) решения этой системы не превосходят положительных решений линейной мажорантной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -\lambda x_1 + x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -(\alpha+\lambda)x_2 + \alpha\rho f'(k^0)x_1 \end{cases}$$

в силу доказанного в (Красносельский, 1966, с. 68). А решения этой системы допускают экспоненциальную оценку с отрицательным показателем, поскольку (как показано при доказательстве теоремы 4) характеристические числа этой системы отрицательны.

Рассмотрим более подробно вопрос о равномерной устойчивости стационарного решения k^0, v^0. Положим $\phi(\sigma) := \rho\alpha\big(f(k^0+\sigma) - f(k^0)\big)$.

Лемма 1. *В условиях теоремы* 4 *справедливо соотношение*

$$0 < \phi(\sigma)/\sigma < \lambda(\alpha+\lambda) \quad \forall\sigma \in (-k^0, \infty).$$

Действительно, согласно условию $f' > 0$ функция ϕ монотонно возрастает, поэтому $\phi(\sigma)/\sigma > 0$. Рассмотрим

$$\big(\phi(\sigma)/\sigma\big)' = \Big[\rho\alpha f'(k^0+\sigma)\sigma - \rho\alpha\big(f(k^0+\sigma) - f(k^0)\big)\Big]/\sigma^2.$$

По формуле конечных приращений Лагранжа $f(k^0+\sigma) - f(k^0) = f'(k^0+\theta\sigma)\sigma$, $\theta \in (0,1)$, тогда $\big(\phi(\sigma)/\sigma\big)' = (\rho\alpha/\sigma)\big(f'(k^0+\sigma) - f'(k^0+\theta\sigma)\big)$.

Если $\sigma > 0$, то в силу условия $f'' < 0$ имеем $\big(\phi(\sigma)/\sigma\big)' > 0$. Поэтому

$$\sup_{\sigma>0}\big(\phi(\sigma)/\sigma\big) = \lim_{\sigma\to 0}\big(\phi(\sigma)/\sigma\big) = \lim_{\sigma\to 0}\phi'(\sigma) = \rho\alpha f'(k^0).$$

Поскольку $f'(k^0) < f(k^0)/k^0$, а k^0 удовлетворяет (6), то отсюда вытекает требуемая оценка.

Если $\sigma \in [-k^0, 0)$, то по-прежнему $\big(\phi(\sigma)/\sigma\big)' < 0$, поэтому

$$\sup_{\sigma\in[-k^0,0)}\big(\phi(\sigma)/\sigma\big) = \phi(-k^0)/(-k^0) = \rho\alpha f(k^0)/k^0.$$

Аналогично предыдущему отсюда получим требуемый результат.

Теорема 5. *В условиях теоремы* 4 *стационарное решение* k^0, v^0 *системы* (2) *равномерно асимптотически устойчиво по Ляпунову в конусе положительных векторов в* R^2.

Действительно, рассмотрим вопрос об устойчивости нулевого решения системы (8). Пусть $\overline{x}$ – вектор из R^2 с компонентами x_1, x_2 функции $f_1(x_1, x_2)$ и $f_2(x_1, x_2)$ определяются соответствующими правыми частями системы (8), а F – векторная функция в R^2 с компонентами f_1, f_2. Тогда система (8) приобретает вид

$$d\overline{x}/dt = F(\overline{x}). \qquad (8')$$

Пусть U – оператор в R^2, задаваемый матрицей

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix}, \quad \xi = \frac{1}{\lambda(\alpha+\lambda)}.$$

Рассмотрим функцию Ляпунова вида $V(\overline{x}) = (U\overline{x}, \overline{x})$, где скобки обозначают скалярное произведение в R^2. Ее производная в силу системы (8) имеет вид

$$0.5dV/dt = \left(F(\overline{x}),\, U\overline{x}\right) = -\lambda x_1^2 - \xi(\alpha+\lambda)x_2^2 + \left(1 + \xi\phi(x_1)/x_1\right)x_1 x_2 .$$

Отсюда, используя определение числа ξ и лемму 1, получим

$$0.5dV/dt < -\lambda x_1^2 - x_2^2/\lambda + 2x_1 x_2 < 0.$$

Тогда теорема Барбашина–Красовского (Демидович, 1967, с. 248) обеспечивает равномерную асимптотическую устойчивость в целом нулевого решения системы (8) на множестве $x_1 \in (-k^0, \infty)$, $x_2 \in (-v^0, \infty)$, а следовательно, выполняется утверждение теоремы.

Следствие 1. В условиях теоремы 4 любое положительное решение системы (2) при $t \to +\infty$ стремится к состоянию равновесия k^0, v^0.

Следствие 2. Если начальное условие $k(0) \geq \varepsilon > 0$, то решение системы (2) стремится к стационарному решению экспоненциально с показателем, зависящим от ε.

Действительно, несколько модифицируя рассуждения теоремы 5 с учетом леммы 1, можно получить оценку

$$dV/dt \leq -\delta(\varepsilon)V, \qquad \delta(\varepsilon) > 0.$$

Откуда и следует утверждение следствия 2.

Задача выбора наиболее рациональной нормы накопления ρ, как обосновано в (Колемаев, 2002), сводится к задаче максимизации удельного потребления $\max(1 - \rho)f(k^0)$ при условии (6). Выражая ρ из (6) и подставляя его в функцию цели, а затем максимизируя полученное выражение, найдем, что оптимальная фондовооруженность k^* удовлетворяет соотношению

$$f'(k^*) = \lambda\upsilon/\alpha, \qquad (9)$$

и, следовательно, оптимальная норма накопления имеет вид

$$\rho^* = \lambda\upsilon k^*/[\alpha f(k^*)]. \qquad (10)$$

Если отказаться от условия постоянства нормы накопления ρ и при произвольной начальной фондовооруженности k_0 действовать согласно “золотому” правилу накопления (9), (10), то система (2) принимает вид

$$\begin{cases} dk/dt = -\lambda k + v, \\ dv/dt = -(\alpha+\lambda)v + \alpha k f'(k). \end{cases} \qquad (11)$$

Теорема 6. *Пусть для функции f выполнены неоклассические условия* (3). *Тогда стационарное решение* k^*, v^* *системы* (11), *определяемое формулами* (9) *и* $v^* = \lambda k^*$, *асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Действительно, линеаризованная система, соответствующая (11) в точке k^*, v^*, имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ \alpha f'(k^*) + \alpha k^* f''(k^*) & -(\alpha+\lambda) \end{pmatrix}.$$

Учитывая (9) и условие $f''(k^*) < 0$, можно записать $\lambda(\alpha+\lambda) = \alpha f'(k^*) > \alpha f'(k^*) + \alpha k^* f''(k^*)$. Тогда правило Гурвица (Демидович, 1967, с. 92) гарантирует отрицательность вещественных частей собственных значений матрицы линеаризованной системы, а значит (в соответствии с теоремой Ляпунова об устойчивости по первому приближению), и высказанное утверждение.

Рассмотрим случай заданной переменной нормы накопления $\rho(t)$. Априорный выбор функции $\rho(t)$ может быть обусловлен соображениями, связанными, например, с оптимальностью или цикличностью процессов. Будем считать $\rho(t)$ непрерывной (кусочно-непрерывной) ограниченной функцией, причем

$$0 < \rho(t) < 1. \tag{12}$$

В этой ситуации справедливы теоремы 1–3. Кроме того, имеет место следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть для функции* f *выполнены неоклассические условия* (3), *а функция* $\rho(t)$ *удовлетворяет* (12). *Тогда система* (2) *с переменной* (*и, в частности, с постоянной* $\rho(t)$) *диссипативна, т.е. каждое решение* k, v *системы* (2) *с возрастанием времени попадает в некоторый шар пространства* R^2 *и не выходит из него.*

Действительно, пусть векторная функция $\overline{g}$ имеет компоненты g_1, g_2, определенные в теореме 2; $\overline{x}$ – вектор с компонентами k, v; U – оператор, определяемый матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix},$$

где $\xi > 0$ число, которое подберем позже.

Рассмотрим скалярное произведение в R^2 вектора $\overline{g}$ на вектор $U\overline{x}$:

$$\left(\overline{g}(\overline{x}),\, U\overline{x}\right) = (-\lambda k + v)k + \xi\left(-(\alpha+\lambda)v + \alpha\rho f(k)\right)v = -\lambda k^2 - \xi(\alpha+\lambda)v^2 + \left(1 + \xi\alpha\rho f(k)/k\right)kv.$$

Как отмечено в (Ашманов, 1984, с. 243), функция $f(k)/k$ монотонно убывает от ∞ до 0. Пусть при $k > k_0 > 0$ имеем $f(k)/k < C_0$, тогда с учетом (12)

$$\left(\overline{g}(\overline{x}),\, U\overline{x}\right) < -\lambda k^2 - \xi(\alpha+\lambda)v^2 + (1 + \xi\alpha c_0)kv \quad \forall k > k_0.$$

Отсюда, используя неравенство $kv \le 0.5(\gamma k^2 + v^2/\gamma) \quad \forall \gamma > 0$, можем записать

$$\left(\overline{g}(\overline{x}),\, U\overline{x}\right) < -[\lambda - 0.5\gamma(1+\xi\alpha c_0)]k^2 - [\xi(\alpha+\lambda) - (1+\xi\alpha c_0)/2\gamma]v^2 \quad \forall k > k_0.$$

Подберем положительные параметры γ, ξ, c_0 так, чтобы выражения в квадратных скобках были неотрицательны, т.е.

$$\gamma \le 2\lambda/(1+\xi\alpha c_0), \quad \gamma \ge (1+\xi\alpha c_0)/\left(2\xi(\alpha+\lambda)\right).$$

Для того чтобы нашлось значение γ, удовлетворяющее этой системе неравенств, достаточно, чтобы выполнялось соотношение $4\lambda\xi(\alpha+\lambda) > (1+\xi\alpha C_0)^2$. А это неравенство можно удовлетворить, выбирая, например, ξ из условия $4\lambda\xi(\alpha+\lambda) > 1$, а затем подбирая k_0 так, чтобы выполнялось $\xi\alpha C_0 < 1$. Таким образом, при указанных ξ и k_0 будет выполнено соотношение

$$\left(\overline{g}(\overline{x}),\, U\overline{x}\right) < 0 \quad \forall k > k_0. \tag{13}$$

А это неравенство в силу известного результата (Демидович, 1967, с. 290) влечет высказанное утверждение.

Следствие 3. В условиях теоремы 7 точка ∞ является отталкивающей для оператора сдвига по траектории системы (2).

Действительно, согласно (Красносельский, 1966, с. 71, 73) это утверждение следует из (13) с учетом свойства положительности (см. теорему 2) правой части системы (2). Этот же факт можно установить и с помощью следующего утверждения.

Лемма 2. *Система* (2) *при выполнении условий* (3) *на функцию f является асимптотически линейной при* $x > 0$. *А именно эволюционный оператор линейной системы*

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -\lambda x_1 + x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -\upsilon x_2 \end{cases} \tag{14}$$

является производной на бесконечности эволюционного оператора системы (2) (Красносельский, 1966, с. 38, 51).

Это следует с учетом (12) из соотношения $\lim\limits_{x\to+\infty}\bigl(f(x)/x\bigr) = 0$, обеспечиваемого условиями (3) (Ашманов, 1984, с. 243). Для линейной системы (14) характеристические числа $-\lambda$ и $-\upsilon$ отрицательны, поэтому спектр ее оператора сдвига лежит внутри единичного круга для всякого $t > 0$. Тогда согласно (Красносельский, 1966, с. 74) точка ∞ будет отталкивающей для оператора сдвига по траектории системы (2).

Рассмотрим теперь случай T-периодической функции $\rho(t)$. Пусть θ – нуль пространства R^2.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия теоремы* 7, *причем функция* $\rho(t)$ – *T-периодична. Тогда система* (2) *имеет (кроме нулевого) хотя бы одно положительное T-периодическое решение.*

Действительно, согласно следствию 3 и результату из (Красносельский, 1966, с. 80) достаточно показать, что точка θ является отталкивающей для оператора сдвига по траекториям системы (2). Это обеспечивает существование ненулевого, неотрицательного, а следовательно (в силу единственности решения задачи Коши), положительного решения.

Проверим, что точка θ является отталкивающей для оператора сдвига по траекториям системы (2). Для этого запишем систему (2) с учетом условия $f(0) = 0$ в форме

$$\begin{cases} dk/dt = -\lambda k + v, \\ dv/dt = \alpha\rho(t) f'(\theta k)k - (\lambda + \alpha)v, \end{cases} \tag{15}$$

где $\theta \in (0, 1)$.

Пусть $\rho_0 = \min\limits_{t\in[0,T]} \rho(t) > 0$. Выберем число настолько большим, чтобы хоть одно из характеристических чисел матрицы

$$B = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ \alpha\rho_0\eta & -(\alpha+\lambda) \end{pmatrix}$$

было положительным. Этого можно добиться при выполнении условия $\eta > (\lambda/\alpha\rho_0)(\alpha+\lambda)$.

Поскольку $\lim\limits_{s\to 0+0} f'(s) = +\infty$, то найдется $r_0 > 0$, такое, что при $0 < k \le r_0$ будет выполнено соотношение $f'(k) > \eta$ и в силу монотонного убывания f', тем более $f'(\theta k) > \eta$. Тогда система (15) является мажорантной для системы с матрицей B.

Поэтому и согласно доказанному в (Красносельский, 1966, с. 79) (а также с учетом (Красносельский, 1966, с. 61)) точка θ является отталкивающей для системы (15). В силу предыдущего это завершает доказательство.

Теорема 9. *Пусть выполнены условия теоремы* 8. *Тогда положительное T-периодическое решение системы* (2) *единственно. Это решение равномерно асимптотически устойчиво по Ляпунову. Все решения с неотрицательными (ненулевыми) начальными условиями сходятся к этому решению.*

Приведем схему доказательства. В силу теорем 2, 3 и на основании (Красносельский, 1966, с. 29) оператор сдвига $U(T)$ по траекториям системы (2) за период сильно положителен и монотонен в конусе R_+^2 векторов с неотрицательными компонентами. Кроме того, $U(T)$ сильно вогнут. Это следует из (Красносельский, 1966, теорема 10.3), поскольку для f выполнены неоклассические условия (3). Таким образом, утверждение теоремы 9 следует из (Демидович, 1967, § 10).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Ашманов С.А. (1984): Введение в математическую экономику. М.: Наука.

Демидович Б.П. (1967): Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука.

Жак С.В. (2003): Управление или саморегулирование // *Вестник ВГУ. Сер. "Экономика и управление"*. № 1.

Колемаев В.А. (2002): Математическая экономика. М.: ЮНИТИ.

Красносельский М.А. (1966): Оператор сдвига по траекториям решений дифференциальных уравнений. М.: Наука.

Поступила в редакцию
17.01.2008 г.