
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

**ПРОСТАЯ МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ КОЛЛЕКТИВА
ПРИ БИНАРНОМ ВЫБОРЕ И ВЛИЯНИИ НА ВЫБОР ОБЩЕЙ
И ГРУППОВОЙ ИНФОРМАЦИИ
(МОДЕЛЬ СОЦИАЛЬНЫХ ПРОТЕСТОВ)***

© 2013 г. М.М. Вороновицкий

(Москва)

Рассматривается поведение коллектива, состоящего из большого числа одинаковых участников при бинарном выборе каждого. На выбор участника влияют как информация, получаемая от других членов коллектива при парных встречах, так и общая информация о числе участников, выбравших каждую из альтернатив. Построена динамическая модель коллективного поведения, базирующаяся на аппарате цепей Маркова. Исследованы варианты поведения группы при различной степени восприимчивости участника к общей информации. Доказано, что при достаточно большой величине этой восприимчивости через определенное время в группе возникает стадное поведение. Показано, что в случае искажения общей информации поведение коллектива изменяется в зависимости от направленности ее искажения общей.

Ключевые слова: стадное поведение, цепи Маркова, коллектив.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из видов коллективного поведения является стадное поведение участников рынка, привлекающее в последнее время внимание экономической науки. Под стадным поведением обычно подразумевается ситуация, когда подавляющее число участников коллектива¹ предпочитают в течение определенного времени одно и то же решение из некоторого множества имеющихся альтернатив, причем на предпочтение участника влияет в основном информация о выборе других участников, – т.е. он почти не учитывает собственной информации об альтернативах.

Простой и при этом охватывающий главные черты стадного поведения потребителей пример предложил Г. Беккер (Becker, 1991), который рассматривал два похожих по всем потребительским характеристикам ресторана с практически равными ценами. Часто один из этих ресторанов был более успешным (в том смысле, что подавляющее большинство потребителей предпочитали посещать именно его). Г. Беккер описал это явление и исследовал зависимость спроса от цены в этих условиях. Нам представляется важным, что он рассматривал выбор с двумя альтернативами (бинарный выбор), что позволяет на первых этапах значительно упростить задачу исследования, но при этом сохранить важнейшие черты явления стадного поведения. Существенным представляется также замечание Г. Беккера о том, что при индивидуальном выборе популярность ресторана повышает для потребителя полезность его посещения. Этим он указал на важную роль общей для всех посетителей информации. Но не меньшую роль в формировании выбора участника играет социальное взаимодействие. В работах (Banerjee, 1992; Bikhchandani, Hirschleifer, Welch,

* Работа выполнена в Институте проблем рынка и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11-06-00500).

¹ Рынок так же можно рассматривать как взаимодействие коллектива продавцов и коллектива покупателей (что и было мною сделано в работах, печатавшихся в журнале “Экономика и математические методы” в 1970-х годах), кроме того, далее речь идет о социальных явлениях, а в социологии есть понятие коллектива и коллективного поведения, хотя все, что сделано в статье, применимо к случаю поведения коллектива потребителей одного товара. Участники коллектива взаимодействуют между собой, как минимум, обмениваются информацией. Наконец, понятие коллективного поведения и модели коллективного поведения введено в кибернетике, во всяком случае в работах И.М. Гельфанда и М.Л. Цетлина, а может быть, раньше. Термин “участник” у меня подразумевает, что коллектив не является формально обозначенным и строго ограниченным, поэтому я редко употребляю слова “члены коллектива”.

1992) исследуется случай, когда на каждый выбор партнера влияют действия других партнеров, причем в отличие от модели Беккера выбор участников не является бинарным, т.е. участник рассматривает несколько альтернатив. Рассматривается некоторое число агентов, последовательно принимающих решения о выборе среди нескольких альтернатив, различающихся для агента своей полезностью. Каждый агент получает свой, достоверный с некоторой вероятностью, сигнал о том, какая альтернатива обладает наибольшей полезностью, и наблюдает, какие альтернативы выбрали его предшественники в последовательности. На основании этого он принимает решение с целью выбрать наиболее полезную альтернативу. Авторы показали, что в этой модели финальное состояние при большом числе участников представляет собой так называемый информационный каскад, т.е. ситуацию, когда, начиная с некоторого участника, все последующие выбирают одну и ту же альтернативу, и при этом выбор действия в последовательности не зависит от получаемого агентом сигнала. Авторы доказали существование равновесия системы (в смысле теории игр нескольких лиц), которое характеризуется стадным поведением.

Нетрудно убедиться, что информационный каскад является частным случаем стадного поведения с особым видом взаимодействия – последовательным принятием решения агентами в порядке очереди так, что решение каждого зависит от решений его предшественников в очереди.

Работы (Banerjee, 1992; Bikchandani, Hirshleifer, Welch, 1992) были существенным продвижением в изучении стадного поведения в экономике и многократно использовались в дальнейшем для объяснения стадного поведения в экономической жизни.

Но явления, которые можно описать как стадное поведение, наблюдаются и в социальной жизни. Это в большей мере относится к тому виду коллектива, который Х. Бламер (Blumer, 1951) называл “массой”. Важным в этом случае становится воздействие на такой коллектив средств массовой информации, к которым теперь, кроме печатных средств, относятся телевидение и Интернет. Немаловажным фактором, влияющим на поведение массы, является обсуждение возможных решений участниками коллектива, причем это обсуждение серьезно влияет на выбор решения каждым индивидом и, следовательно, – всей массы участников коллектива. При этом если прежде обсуждение проходило внутри малых групп, в которые входил индивид, то теперь в каждом обсуждении посредством Интернета (социальных сетей) задействовано большое число участников. В течение 2011 г. можно было наблюдать несколько волн социальных протестов, в расширении которых большую роль сыграла социальная сеть facebook. Наблюдение за развитием одного из таких движений явилось стимулом для разработки и анализа предлагаемой в этой статье модели.

Мы представляем социальный протест с помощью следующей схемы. Для простоты рассматривается только случай бинарного выбора участников. Предполагается, что каждый участник в начальном (нулевом) такте выбирает одно из двух альтернативных решений: участвовать или не участвовать в социальном протесте (например, в митинге). Результаты этих решений тем или иным способом демонстрируются (например, посредством митингов, демонстраций и палаточных городков протеста) и становятся известными средствами массовой информации (СМИ). В следующий такт СМИ сообщают, сколько человек участвовало в протесте накануне. На основе этой информации и согласно предпочтениям, выработанным группами, каждый член коллектива в течение этого же такта выбирает одно из возможных решений. Затем на третьем такте СМИ публикуют информацию о числе тех, кто выбрал протест на новом первом такте, и т.д. Заметим также, что нас интересуют коллективы с большим числом участников (в реальных случаях порядка нескольких сотен тысяч).

Математическая модель содержит точный алгоритм предпочтения участниками одного из двух возможных решений в зависимости от отношения группы к этим альтернативам и сообщенного средствами массовой информации числа участников, выбравших участие в социальном процессе накануне. Параметры модели при этом описывают алгоритм формирования групп, принятия решения в группах и отношение участников к сообщениям СМИ, а также, возможно, искажение средствами массовой информации реального числа принявших решение участвовать в протесте. Нам потребуются некоторые дополнительные определения.

Предположим, что коллектив состоит из N участников, и каждый из них выбирает одну из двух альтернатив. Обозначим через $r^{(N)}(m)$ вероятность того, что m участников выбрали первую

альтернативу. Тогда $P^{(N)}(k)$ – вероятность того, что не более чем k участников выбрали первую альтернативу, $Q^{(N)}(n)$ – вероятность того, что не менее чем $N - n$ человек выбрали первую альтернативу, где

$$P^{(N)}(k) = \sum_{i=0}^k r^{(N)}(i), Q^{(N)}(n) = \sum_{i=N-n}^N r^{(N)}(i). \quad (1)$$

Если $N \geq k + n$, то $P^{(N)}(k) + Q^{(N)}(n)$ – вероятность того, что в момент t либо не более k участников с вероятностью $P^{(N)}(k)$ выбирают первую альтернативу, либо не менее $N - n$ участников с вероятностью $Q^{(N)}(n)$ выбирают первую альтернативу. Предположим, что для заданного $0 \leq \varepsilon(N) < c/N$ существуют такие пары k, n , что:

$$1 - P^{(N)}(k) - Q^{(N)}(n) < \varepsilon(N). \quad (2)$$

Обозначим через $s_0^{(N)}, \sigma_0^{(N)}$ одну из пар k, n , для которых значение $N - n - k$ – максимальное из всех пар k, n , удовлетворяющих (2) при данных N и $\varepsilon(N)$. Пусть $P^{(N)}(s_0^{(N)}) = P_0^{(N)}$.

Мы можем говорить, что состояние коллектива из N участников соответствует поведению с показателями выбора коллектива $P_0^{(N)}, s_0^{(N)}, \sigma_0^{(N)}, \varepsilon(N)$.

Если коллектив из N участников характеризуется показателями $P_0^{(N)}, s_0^{(N)}, \sigma_0^{(N)}, \varepsilon(N)$, означает, что с вероятностью $P_0^{(N)}$ не более $s_0^{(N)}$ участников выбирают первую альтернативу (эквивалентно – не менее $N - s_0^{(N)}$ участников выбирают вторую альтернативу) и с вероятностью $1 - P_0^{(N)} - \varepsilon(N)$ не менее $N - \sigma_0^{(N)}$ участников выбирают первую альтернативу (эквивалентно – не более $\sigma_0^{(N)}$ участников выбирают вторую альтернативу).

При $s_0^{(N)} + \sigma_0^{(N)}$ близком к 0 и достаточно малом $\varepsilon(N)$ можно говорить о том, что все участники с вероятностью, близкой к $P_0^{(N)}$, выбирают вторую альтернативу и с вероятностью, близкой к дополнительной, выбирают первую. В этом случае имеет место стадное поведение с показателями $P_0^{(N)}, s_0^{(N)}, \sigma_0^{(N)}, \varepsilon(N)$. В случае $s_0^{(N)} + \sigma_0^{(N)} + \varepsilon(N) = 0$ будем говорить о стадном поведении в сильной форме.

Показатели выбора $P_0^{(N)}, s_0^{(N)}, \sigma_0^{(N)}, \varepsilon(N)$ являются характеристиками состояния коллектива (распределения вероятностей выбора первой альтернативы в этом состоянии).

Формулировка математической модели требует серьезных допущений. Предположим, что отношение коллектива к двум возможным альтернативам (участвовать или не участвовать в социальном движении) распространяется среди участников коллектива посредством обмена мнениями. Предположим также, что СМИ влияют на решения каждого участника только после учета им других мнений. В некоторый момент времени внутри коллектива образуются группы, обсуждающие правильность предстоящего выбора – непосредственно или через социальные сети. Реально в группе может быть одновременно два, три или более участников, кроме того, существует вероятность того, что в любой момент времени правильность выбора обсуждается в нескольких группах. Учет этих фактов сделает модель сложной для анализа и добавит в нее эффекты формирования предпочтений в больших группах. Но мы надеемся, что разобраться во влиянии способа распространения информации на поведение коллектива можно с помощью простых формальных зависимостей. Поэтому в нашей модели предполагается, что результаты обсуждения в группах формируются из результатов парных обсуждений и предпочтений.

Если в момент t образовалось τ пар участников, обсуждающих возможные решения, выявленные из результатов решений, принятых в предыдущий момент $t - 1$, то без нарушения общности можно считать, что имеется τt моментов времени, в каждый из которых только одна пара обсуждает возможное решение и устанавливает общее для пары предпочтение. Для удобства изложения не будем делить момент времени на τ тактов, а будем считать каждый такт отдельным моментом времени.

Таким образом, взаимодействия внутри коллектива представляются равновероятными встречами двух участников и выработкой общего отношения к альтернативам. В момент встречи каждый участник узнает, какую альтернативу выбрал его партнер в предыдущий момент, и может сравнивать предпочтение партнера со своим – в предыдущий момент. Он же формирует свое новое предпочтение, используя информацию об этих двух предпочтениях. Его партнер делает то же самое. Два участника, встречающиеся в этот момент, обсуждают альтернативы и принимают

общее решение. Поэтому после встречи у обоих участников оказываются одинаковые предпочтения.

При этом мы вынуждены сделать еще одно очень сильное предположение, а именно: договориться о том, что сообщение средств массовой информации о числе участников, принявших каждое решение в предыдущий момент, поступает к участникам при каждом парном обсуждении, хотя в действительности оно поступает к ним один раз – до начала каждого цикла парных обсуждений.

В разд. 2 сформулирована модель поведения коллектива, состоящего из N участников. Сначала формально определены вероятности выбора участником первой альтернативы в данный момент времени t . Вероятности различаются в зависимости от того, какие альтернативы реализовали в предшествующий момент времени встретившиеся участники. Кроме того, вероятность выбора участником первой альтернативы в данный момент времени t зависит от числа участников, выбравших накануне первую альтернативу, которое сообщают ему СМИ. Наконец, в определение этих вероятностей входит постоянный и одинаковый для всех параметр, определяющий восприимчивость (доверие) членов группы по отношению к сообщениям СМИ. Основными переменными модели являются вероятности того, что в данный момент t данное число участников m выбрали первую альтернативу $r_i(m)$. Показано, что изменение этих вероятностей с течением времени описывается цепью Маркова, и при определенных условиях с течением времени величины $r_i(m)$ стремятся к не зависящим от времени значениям $r^{(N)}(m)$. Поэтому при заданном $\varepsilon(N)$ существуют показатели $s_0^{(N)}$, $\sigma_0^{(N)}$, $P^{(N)}$. Рассматривается случай, когда при выборе решения каждый участник учитывает информацию только о числе участников, выбравших в предшествующий момент первую альтернативу, и не учитывает результат обсуждения с другим участником. Такая ситуация имеет место при определенном значении параметра, определяющего доверие коллектива к средствам массовой информации. Доказано, что в этом случае с течением времени показатели $s_0^{(N)}$, $\sigma_0^{(N)}$ стремятся к нулям, т.е. в коллективе возникает стадное поведение. Похожий случай, но для несколько отличающейся от предлагаемой модели, рассматривался прежде (Вороновицкий, Мейтал, 2003).

В разд. 3 исследуется случай, когда обе альтернативы априори равноценны для каждого участника. Это означает, что выбор каждого участника определяется только тем, какой выбор сделали в предшествующий момент он и его партнер по обсуждению, а также числом участников, выбравших первую альтернативу в предыдущий момент, о котором ему сообщили СМИ. Точное определение априорной равноценности дано в разд. 3. В этом случае предельные вероятности того, что k участников выбрали первую альтернативу (когда такие существуют), равны предельным вероятностям того, что k выбрали вторую альтернативу. Зависимость этих вероятностей от числа участников (k) симметрично относительно $0,5N$. Показатели поведения равны $s_0^{(n)} = \sigma_0^{(N)}$, но мы рассматриваем только один из них $s_0^{(N)}$. Частный случай, когда группа совсем не учитывает при выборе данные о том, сколько участников выбрало в предыдущий момент первую альтернативу, исследовался ранее (Вороновицкий, 2008). В этой работе для случая, когда $r_i(m)$ симметрично, было показано, что при данных условиях с ростом времени не только не возникает стадного поведения, но показатель $s_0^{(N)}$ равен одной второй. Когда сообщения СМИ совсем не учитываются коллективом, то наиболее вероятным является выбор половиной участников первой альтернативы. С ростом показателя восприимчивости участников по отношению к общей для всех информации эта вероятность падает, и после некоторой величины показателя степени учета общей информации возникают два симметричных значения числа участников (k_0 и $N - k_0$), для которых вероятность выбора первой альтернативы максимальная и одинаковая.

С ростом степени учета общей информации эти критические числа участников уменьшаются, а вероятность почти одинакового распределения участников между альтернативами падает. Поведение группы при этом приближается к стадному (и стадным поведением в сильной форме становится только в том случае, когда учет общей информации становится максимально возможным), и при выборе решения участники учитывают только общую информацию. Поскольку нас интересует поведение коллектива при большом числе участников, показано, что с ростом числа участников при всех характеристиках выбора решения участники устанавливают предельные значения $s_0^{(N)}/N$, $P_0^{(N)}/N$, т.е. s_0 , P_0 .

В разд. 4 рассматривается случай, когда СМИ публикуют искаженные данные. Предполагается, что они сообщают увеличенное/уменьшенное число участников, реально выбравших в предшествующий момент первую альтернативу. Однако наше исследование пока ограничивается случаем равноценности обеих альтернатив. В этом подразделе выводы сделаны на основе компьютерных расчетов большого количества численных примеров. Показано, что завышение или занижение средствами массовой информации числа участников, выбравших накануне первую альтернативу, приводит к желаемому сдвигу предпочтений, но возможности роста этого сдвига с ростом величины искажения информации ограничены и, вообще говоря, это не приводит к стандартному поведению в чистом виде.

В заключении обсуждаются результаты исследования этой модели. Отмечены ограниченные возможности ее практического применения и возможные перспективы ее модификации. Часть высказанных в работе утверждений представляют собой гипотезы, истинность которых аргументируется многими численными примерами. В большинстве случаев нам не удалось строго математически доказать эти утверждения, но это не означает, что их доказательства невозможны в дальнейшем.

2. МОДЕЛЬ

Пусть имеется N участников, и в каждый момент времени t (время дискретно $t = 0, 1, \dots$) каждый участник выбирает одну из двух альтернатив, где $k(t)$ – число участников, которые выбрали первую альтернативу в момент времени t .

Вначале рассмотрим случай, когда участник не обладает общей информацией, а постоянно взаимодействует с другими участниками посредством парных столкновений (встреч). В момент встречи он узнает предпочтение партнера на этот момент. Он может сравнивать свой выбор и выбор партнера, сделанный им в предшествующий момент. Он формирует свое новое предпочтение, используя информацию об этих двух выборах. Его партнер делает то же самое. Предполагается, что два участника, которые встречаются в этот момент, обсуждают возможные предпочтения и принимают общее решение, поэтому после встречи у них одинаковые предпочтения. В нашей модели парные взаимодействия можно рассматривать как своего рода модель обсуждения в малых группах, представленную как результат парных обсуждений, что, конечно, является серьезным упрощением.

Предположим, что в каждый момент $t + 1$ встречаются два участника. Если оба выбрали в момент t перед встречей вторую альтернативу, то в момент $t + 1$ вероятность выбрать первую альтернативу равна q_0 для каждого из них.

Если оба участника выбрали в момент t перед столкновением первую альтернативу, то в момент $t + 1$ вероятность выбрать первую альтернативу равна q_2 для каждого.

Если перед столкновением один участник в момент t выбрал первую альтернативу, а другой – вторую, то вероятность выбрать в момент $t + 1$ первую альтернативу для них обоих равна q_1 . Очевидно, что $q_0 < q_1 < q_2$. При этом строгие неравенства означают, что вероятность q обязательно зависит от выбора, сделанного каждым участником в предыдущий момент.

Для того чтобы оба варианта поведения были априори равноценными, q_i должны удовлетворять к следующим условиям симметрии:

$$q_0 = 1 - q_2, q_1 = 1 - q_1, q_1 = 0,5. \quad (3)$$

Теперь рассмотрим более сложную ситуацию. Каждый участник в момент $t + 1$ кроме информации, полученной в результате встречи с другим участником, получает информацию о том, сколько человек выбрали в предшествующий момент t первую альтернативу (а, следовательно, – сколько выбрали вторую). Обозначим $g(q_0, n)$ вероятность того, что каждый из встретившихся участников выберет в момент $t + 1$ первую альтернативу, если в момент t оба участника выбрали вторую альтернативу и им обоим сообщили, что в момент t первую альтернативу выбрали n участников.

Обозначим $g(q_1, n)$ вероятность того, что каждый из встретившихся участников выберет в момент $t + 1$ первую альтернативу, если один из встретившихся в момент $t + 1$ участников выбрали

первую альтернативу, а другой – вторую, и им обоим сообщили, что в момент t первую альтернативу выбрали n участников. При этом предполагаем, что

$$\begin{aligned} g(q_i, n+1) &\geq g(q_i, n), \\ g(q_0, n) &< g(q_1, n) < g(q_2, n), \\ n &= 0, \dots, N-1 < i = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Обозначим $g(q_2, n)$ вероятностью того, что каждый из встретившихся участников выберет в момент $t+1$ первую альтернативу, если в момент t оба участника выбрали первую альтернативу и им обоим сообщили, что в момент t первую альтернативу выбрали n участников.

Величина $g(q_i, n)$, $i = 0, 1, 2$ является вероятностью. Поменяв нумерацию альтернатив, получим в качестве аналогичной вероятности $g(1 - q_i, N - n)$ вероятность того, что после встречи участник, которому сообщили, что $N - n$ участников накануне выбрали вторую альтернативу и для которого вероятности q_i заменены на дополнительные вероятности $1 - q_i$, выбрал вторую альтернативу, имеем $g(1 - q_i, N - n) = 1 - g(q_i, n)$. Естественно предположить также, что $g(q_i, N/2) = q_i$.

Для упрощения будем в дальнейшем предполагать, что $g(q_i, n)$ кусочно-линейная функция. Из двух предшествующих равенств вытекает, что $g(q_i, n)$ имеет вид:

$$g(q_i, n) = \begin{cases} (1 - \beta)q_i, & \text{если } 0 \leq n \leq 0,5N(1 - q_i); \\ q_i + \beta(2n/N - 1), & \text{если } 0,5N(1 - q_i) < n < 0,5N(2 - q_i); \\ \beta + (1 - \beta)q_i, & \text{если } 0,5N(2 - q_i) \leq n \leq N. \end{cases} \quad (4)$$

При этом $g(q_i, n)$ является фактически функцией от n/N . Графически функция $g(q_i, n)$ имеет вид, который показан на рис. 1.

При $\beta = 0$ имеем $g(q_i, n) = q_i$ при $n = 0, \dots, N$.

При $\beta = 1$ имеем $g(q_i, n) = 0$ при $0 \leq n \leq 0,5N(1 - q_i)$ и $g(q_i, n) = 1$ при $0,5N(2 - q_i) \leq n \leq N$ (в частности $g(q_i, 0) = 0$, $g(q_i, N) = 1$).

Величина β является в нашем случае единственным внешним параметром, поэтому интерпретация этого параметра представляет особый интерес.

Из вида функции $g(q_i, n)$ следует, что:

- 1) при $\beta \leq 0$ участники не учитывают при выборе сообщаемую им информацию о величине n , реализовавшейся в предыдущий момент;
- 2) при $\beta = 1$ участники коллектива в наибольшей степени используют получаемую ими информацию о величине n , реализовавшейся в предыдущий момент;
- 3) при $1 > \beta > 0$ информация о величине n тем больше влияет на выбор участника, чем больше β .

Действительно, при $\beta = 1$ для $0,5N(2 - q_i) \leq n \leq N$ имеем $g(q_i, n) = 1$, при $0,5N(1 - q_i) < n < 0,5N(2 - q_i)$ будет $g(q_i, n) = q_i + (2n/N - 1)$ и при $n \leq 0,5N(1 - q_i)$ функция $g(q_i, n)$ равна нулю. При $\beta = 0$ для всех значений n будет $g(q_i, n) = q_i$. Таким образом, величину β можно рассматривать как показатель влияния на выбор участников величины n , которую им сообщают СМИ. Будем называть β -восприимчивостью участника по отношению к общей информации.

Обозначим через $r_i(k)$ вероятность того, что в момент t первый вариант действия выбирают (и, конечно осуществляют) k участников:

$$\sum_{k=0}^{k=N} r_i(k) = 1. \quad (5)$$

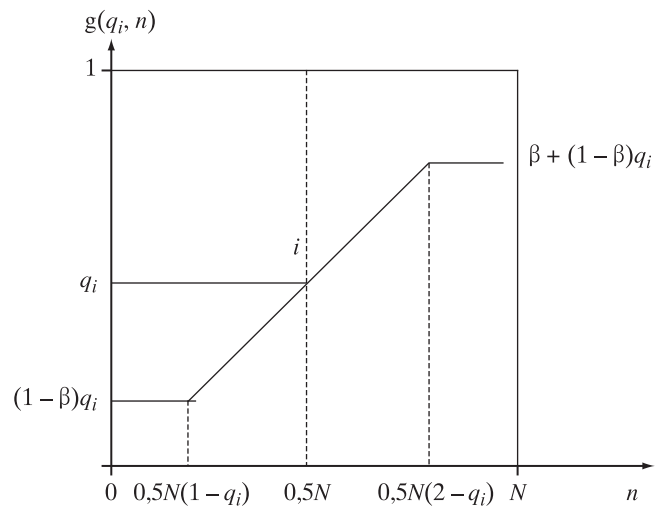


Рис. 1. Вид функции $g(q_i, n)$

Пусть k участников выбирают в момент t первую альтернативу. Вероятность встречи в момент $t + 1$ двух участников, которые оба выбрали в момент t первую альтернативу, равна $k(k - 1)/[N(N - 1)]$. Вероятность встречи в момент $t + 1$ двух участников, которые выбрали в момент t вторую альтернативу, равна $(N - k)(N - k - 1)/[N(N - 1)]$. Вероятность встречи в момент $t + 1$ двух участников, из которых в момент t один выбрал первую альтернативу, а другой – вторую, равна $2k(N - k)/[N(N - 1)]$.

Обозначим через $a_{k,m}$ условную вероятность того, что в момент t после встречи двух участников число участников, выбравших в момент $t + 1$ первую альтернативу, станет равным k при условии, что до этого их было m . Таким образом, мы имеем:

$$\begin{aligned} a_{k-2,k} &= \frac{(N - k + 2)(N - k + 1)g^2(q_2, k - 2)}{N(N - 1)}, \\ a_{k-1,k} &= \frac{2(k - 1)(N - k + 1)g^2(q_1, k - 1)}{N(N - 1)} + \frac{2(N - k + 1)(N - k)g(q_0, k - 1)(1 - g(q_0, k - 1))}{N(N - 1)} \\ a_{k,k} &= \frac{k(k - 1)g^2(q_2, k)}{N(N - 1)} + \frac{4k(N - k)g(q_1, k)(1 - g(q_1, k))}{N(N - 1)} + \frac{(N - k)(N - k - 1)(1 - g(q_0, k))^2}{N(N - 1)} \quad (6) \\ a_{k+1,k} &= \frac{2(k + 1)kg(q_2, k + 1)(1 - g(q_2, k + 1))}{N(N + 1)} + \frac{2(k + 1)(N - k - 1)(1 - g(q_1, k + 1))^2}{N(N - 1)}, \\ a_{k+2,k} &= \frac{(k + 2)(k + 1)(1 - g(q_2, k + 2))^2}{N(N - 1)}, \\ a_{m,k} &= 0, \quad m < k - 2, \quad m > k + 2. \end{aligned}$$

Очевидно, что $\sum_{k=0}^N a_{m,k} = 1$, $m = 0, \dots, N$, т.е. матрица $A = \|a_{m,k}\|$ стохастическая. Динамика модели описывается цепью Маркова:

$$r_{t+1}(k) = \sum_{m=0}^{m=N} a_{m,k} r_t(m). \quad (7)$$

Если $1 > \beta > 0$ и $0 < q_i < 1$, $i = 0, 1, 2$, то все компоненты стохастической матрицы A^n положительны, по крайней мере, если $n > N - 2$, и распределение r_t при бесконечном росте t сходится к стационарному распределению $r^{(N)}$, которое удовлетворяет условию:

$$r^{(N)}(k) = \sum_{m=0}^{m=N} a_{m,k} r^{(N)}(m). \quad (8)$$

Заметим, что если $(1 - g(q_0, k)) > 0$ для всех k (для этого необходимо, чтобы $\beta < 1$), то из (6) имеем

$$\begin{aligned} r^{(N)}(0) &= \left\{ \left[\frac{2(1 - g(q_1, 1))^2 r^{(N)}(1)}{N} \right] r^{(N)}(1) + \left[\frac{2(1 - g(q_2, 2))^2}{N(N - 1)} \right] r^{(N)}(2) \right\} / (1 - g(q_0, 0))^2 < \\ &< \frac{1}{N} \left[\frac{2(1 - g(q_1, 1))^2 + 2(1 - g(q_2, 2))^2}{N(N - 1)} \right] / (1 - g(q_0, 0))^2, \end{aligned}$$

т.е. $r_0^{(N)} = \text{const}/N$ при $\beta < 1$.

Сходимость нашего процесса к стационарному распределению $r^{(N)}(k)$ говорит о существовании при каждом N показателей поведения коллектива $s_0^{(N)}$, $\sigma_0^{(N)}$, $P^{(N)}$, $\varepsilon(N)$. Заметим, что $a_{0,0} = (1 - g(q_0, 0))^2$, $a_{N,N} = g(q_2, N)^2$.

Рассмотрим крайние случаи. Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. Если

$$g(q_0, 0) = 0 \text{ и } g(q_2, N) = 1, \text{ то } r_t(o) \rightarrow r_o \text{ и } r_t(N) \rightarrow r_N \text{ при } t \rightarrow \infty \text{ и } r_o + r_N = 1. \quad (9)$$

Доказательство леммы см. в Приложении.

Рассмотрим случай, когда $\beta = 1$, в этом случае из (4) мы имеем $g(q_i, 0) = 0$, $g(q_i, N) = 1$ и поэтому справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. При $\beta = 1$ и любых $0 \leq q_0 < q_1 < q_2 \leq 1$ будет:

$$r_t(0) \rightarrow r_o \text{ и } r_t(N) \rightarrow r_N \text{ при } t \rightarrow \infty \text{ причем } r_o + r_N = 1, (s_0^{(N)} = 0, \sigma_0^{(N)} = 0, P_0^{(N)} = r_o). \quad (10)$$

Утверждение 1 показывает, что при $\beta = 1$ в рассматриваемом коллективе с течением времени возникает стадное поведение с показателями $s_0^{(N)} = \sigma_0^{(N)} = 0$, $P_0^{(N)} = r_o$, $\varepsilon(N) = 0$ (сильная форма стадного поведения). Таким образом, при $\beta = 1$ при больших t с вероятностью, близкой к r_N , все участники выбирают первую альтернативу и с дополнительной вероятностью $1 - r_N$ – вторую.

Заметим, что если $\beta < 1$, то при $q_0 = 0$ $q_2 < 1$ мы из (4) имеем $g(q_0, 0) = 0$, $g(q_2, N) < 1$, а при $q_0 > 0$, $q_2 = 1$ из (4) имеем $g(q_0, 0) > 0$, $g(q_2, N) = 1$. Используя те же рассуждения, что и в доказательстве леммы, можно доказать следующий факт.

Утверждение 2. Пусть $\beta < 1$, тогда в случае $q_0 = 0$, $q_2 < 1$ будет $r_t(0) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$, а в случае $q_0 > 0$, $q_2 = 1$ будет $r_t(N) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$.

Доказательство утверждения см. в Приложении.

В случае $q_0 = 0$ при больших значениях t почти все участники с вероятностью, близкой к единице, выбирают вторую альтернативу ($s_0^{(N)} = 0$, $\sigma_0^{(N)} = 0$, $P_0^{(N)} = 0$), что тоже соответствует сильной форме стадного поведения. В случае $q_2 = 1$ при больших значениях t почти все участники с вероятностью, близкой к единице, выбирают первую альтернативу ($s_0^{(N)} = 0$, $\sigma_0^{(N)} = 0$, $P_0^{(N)} = 1$), что также соответствует сильной форме стадного поведения.

3. СЛУЧАЙ, КОГДА ДЛЯ КАЖДОГО УЧАСТНИКА АЛЬТЕРНАТИВЫ РАВНОЦЕННЫ

При равноценности альтернатив для каждого участника, когда выполняются условия (3), матрица перехода цепи Маркова симметрична, т.е. $a_{m,k} = a_{N-m,N-k}$. И, следовательно, стационарное распределение вероятностей $r^{(N)}(k)$ симметрично, т.е. $r^{(N)}(k) = r^{(N)}(N - k)$, $k = 0, \dots, N$. Потому оба показателя поведения коллектива $s_0^{(N)}$ и $\sigma_0^{(N)}$ равны. Это делает возможным рассмотрение в этом разделе стационарного поведения с тремя показателями $s_0^{(N)}$, $P_0^{(N)}$, $\varepsilon(N)$.

Частный случай, когда выполняются условия (3) и при этом $\beta = 0$, можно найти в (Вороновицкий, 2008). Там были доказаны следующие факты.

Характер стационарного распределения зависит от величины $q_0(1 - q_0)$. Если $q_0(1 - q_0) > 1/4N$, стационарная функция распределения имеет максимум при $k = N/2$, возрастает с ростом k при $k < N/2$ и убывает с ростом k при $k > N/2$. Заметим, что в рассматриваемом случае $q_0 \leq 0,5$. Таким образом, при q_0 , достаточно далеких от нуля, и достаточно большом N (когда $q_0(1 - q_0) > 1/4N$) отсутствует поведение с показателями $s_0^{(N)}$ и $P_0^{(N)}$ меньше $1/2$. Сказанное, в частности, означает отсутствие в этом случае стадного поведения.

Таким образом, в случае равнозначности обеих альтернатив для участников при $\beta = 0$, $q_0 > 0$, начиная с некоторого $N(q_0)$ поведение коллектива никогда не становится стадным.

В случае $\beta = 1$ имеет место утверждение 1, и вследствие симметрии имеем $r_t(0) \rightarrow 0,5$; $r_t(N) \rightarrow 0,5$ ($s_0^{(N)} \rightarrow 0$, $P_0^{(N)} \rightarrow 0,5$, $\varepsilon(N) \rightarrow 0$), когда $t \rightarrow \infty$.

Доказано следующее утверждение.

Утверждение 3. Для некоторого N_0 , при $N > N_0$ для $1 \leq k < N/2$ существует такое $\beta(k)$, что для всех $\beta \geq \beta(k)$ будет $r^{(N)}(k + 1) \leq r^{(N)}(k) \leq r^{(N)}(k - 1)$, кроме того, $\beta(k) > \beta(l)$, если $l > k$ и для всех $N/2 > m > k$ будет $r^{(N)}(m + 1) < r^{(N)}(m)$.

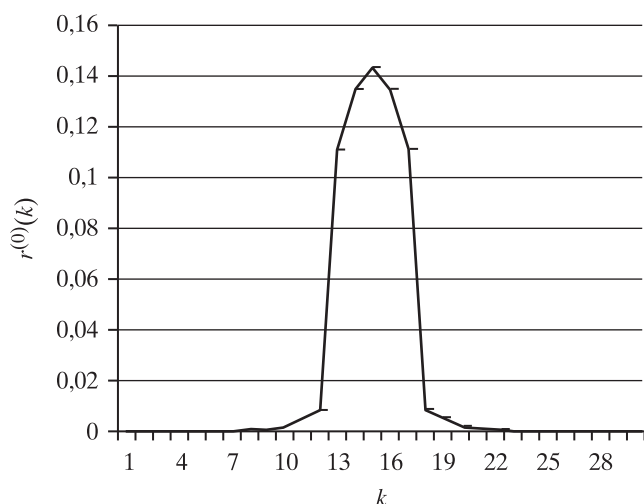


Рис. 2. Стационарное распределение при $r^{(0)}(k)$ при $N = 30$, $\beta = 0,05$ и $q_0 = 0,4$, $q_2 = 0,6$, $q_1 = 0,5$

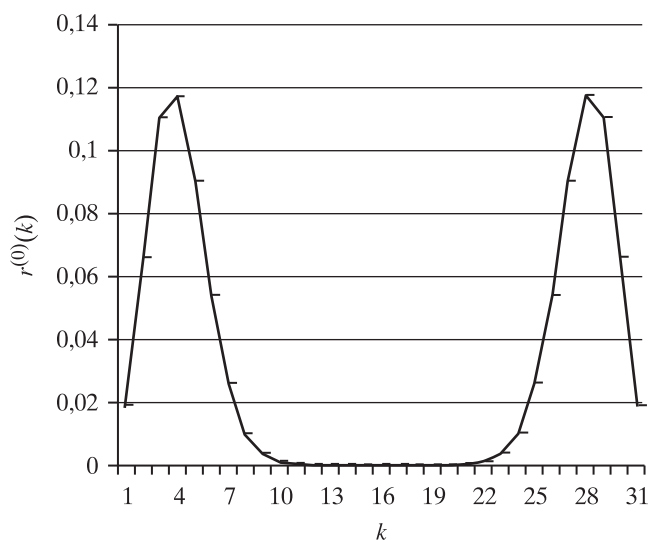


Рис. 3. Стационарное распределение при $r^{(0)}(k)$ при $N = 30$, $\beta = 0,3$ и $q_0 = 0,3$, $q_2 = 0,7$, $q_1 = 0,5$

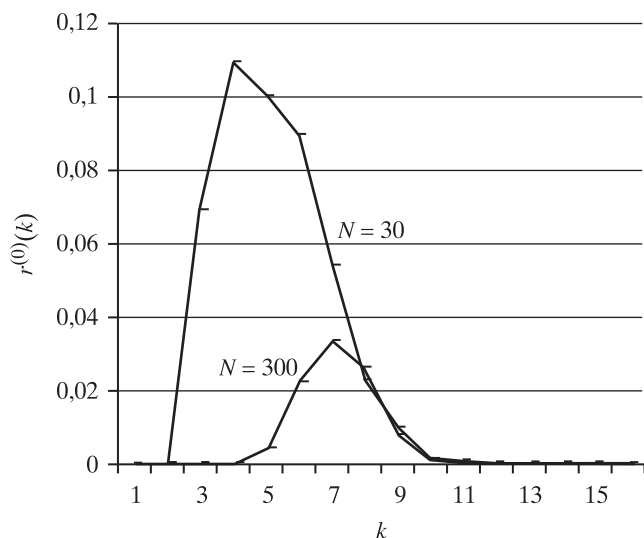


Рис. 4. Распределения $r^{(0)}(k)$ при $N = 300$ и $N = 30$ для $q_0 = 0,3$, $q_1 = 0,5$, $q_2 = 0,7$ для $0 < k < 16$

Доказательство утверждения см. в Приложении.

Расчеты показывают, что при каждом наборе $q_0, q_1 = 1/2, q_2 = 1 - q_0$ существует такое $\beta_0(q_0, N)$, что при $\beta < \beta_0(q_0, N)$ распределение $r^{(0)}(k)$ достигает единственного минимального значения при $k = N/2$, возрастает с ростом при $k < N/2$ и убывает с ростом k при $k > N/2$ (рис. 2).

При значениях β , больших некоторого порогового значения $\beta_0(q_0, N)$, распределение $r^{(N)}(k)$ достигает максимального значения в двух симметричных точках, которые приближаются соответственно к нулю и единице с уменьшением q_0 или ростом β . При этом возникает участок, симметричный относительно $k = N/2$, на котором значения $r^{(N)}(k)$ приближаются к нулю с уменьшением q_0 или ростом β . Этот участок расширяется с уменьшением q_0 или ростом β (рис. 3).

При равноценности для участников обеих альтернатив и $1 > \beta > 0$ дальнейшее исследование модели проводилось посредством компьютерного моделирования. Расчеты проводились с помощью формулы (7) до достижения стационарного распределения $r^{(N)}(k)$ ($k = 0, \dots, N$) для значений $q_0 = \{0,4; 0,3; 0,2; 0,1; 0\}$; $q_1 = 1/2$, $q_2 = 1 - q_0$ и при каждом наборе вероятностей q при $\beta = \{0; 0,1; \dots; 0,9\}$.

Расчеты позволяют предполагать, что величина $\beta_0(q_0, N)$ растет с увеличением N , но при этом стремится к некоторому пределу $\beta_2(q_0)$, при этом $\beta(q_0, N) < 1$.

При одних и тех же величинах β и q_0 , q_1, q_2 максимальное значение для $r^{(0)}(k)$ при $N = 30$ достигается при $k = 3$, при $N = 300$ – при $k = 7$.

Пусть χ таково, что $r^{(N)}(\chi)$ равно максимальному значению $r^{(N)}(k)$. Возникает предположение, что величина χ растет с увеличением N (рис. 4). В табл. 1 показаны значения $s_0^{(N)}$ и координаты k_N максимума $r_i(k)$ на отрезке $0 \leq k \leq N/2$ для $q_0 = 0,2$, $\alpha = 0,4$ и различных значений N .

В табл. 2 приводятся полученные из компьютерных расчетов при $N = 1000$ значения показателя $s_0^{(N)}$ для стационарного распределения $r^{(N)}(k)$ при различных значениях q_0 ($q_1 = 1/2, q_2 = 1 - q_0$) и β . Стоит заметить, что из этой таблицы видно, как с увеличением q_0 при неизменном β показатель $s_0^{(N)}$ меняется в сторону, обратную стабильному поведению.

Таблица 1. Пример сходимости $s_0^{(N)}/N$ и k_N/N для $q_0 = 0,2$; $\beta = 0,4$; $\varepsilon(N) = 1/N^{10,5}$

N	10	300	500	700	900	1100	1300	1500
$s_0^{(N)}/N$	0,1	0,15	0,14	0,14	0,13	0,13	0,13	0,13
χ	0,1	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10
k_N	4	5	4	5	5	5	5	5

Таблица 2. Значения показателя $s_0^{(N)}/N$ при $N = 1000$ и для стационарного распределения $r^{(N)}(k)$, $\varepsilon(N) = 1/N^{10,5}$

$\beta \backslash q_0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0,5(0,45)	0,5(0,5)	0,5(0,5)	0,5(0,5)	0,5(0,5)
0,1	0,5(0,45)	0,5(0,5)	0,5(0,5)	0,5(0,5)	0,5(0,5)
0,2	0,29(0,23)	0,5(0,5)	0,5(0,5)	0,5(0,5)	0,5(0,5)
0,3	0,20(0,17)	0,32(0,25)	0,5(0,50)	0,5(0,5)	0,5(0,5)
0,4	0,15(0,12)	0,23(0,19)	0,3(0,24)	0,5(0,3)	0,5(0,5)
0,5	0,11(0,08)	0,18(0,14)	0,23(0,19)	0,27(0,22)	0,5(0,25)
0,6	0,08(0,06)	0,13(0,10)	0,18(0,14)	0,21(0,17)	0,24(0,2)
0,7	0,06(0,04)	0,10(0,07)	0,13(0,10)	0,16(0,13)	0,18(0,15)
0,8	0,04(0,02)	0,06(0,04)	0,09(0,06)	0,11(0,08)	0,09(0,1)
0,9	0,02(0,01)	0,03(0,02)	0,05(0,03)	0,06(0,04)	0,07(0,05)

Примечание. В скобках рядом с показателем s_0 указаны значения χ , при котором в точке χN достигается единственный максимум для $r^{(N)}(k)$ при $N/2 > k \geq 0$.

4. СЛУЧАЙ ИСКАЖЕНИЯ СМИ ИСТИННОГО ЧИСЛА УЧАСТНИКОВ

Средства массовой информации могут также исказить (уменьшать или увеличивать) истинную величину k – числа участников, выбравших накануне первую альтернативу. Конечно, такое поведение средств массовой информации не является обязательным. Но, если принять во внимание, что СМИ могут находиться под влиянием каких-то групп внутри коллектива, заинтересованных в управлении поведением этого коллектива, это вполне возможно. Целью таких искажений может быть как стремление избежать стадного или близкого к нему поведения участников, так и стремление направить массовый выбор на одну из альтернатив. Как и прежде, ограничимся случаем априорной равноценности альтернатив для участников. Мы рассмотрим одну из возможных формализаций этих действий, понимая при этом, что возможны и другие подходы к описанию такого механизма.

Пусть L целое число. Предположим, что при искажении информации участникам вместо истинного значения k сообщается число на L единиц больше или меньше истинного значения. Тогда участник при определении вероятности выбора первой альтернативы $g(q_i, k)$ в случае завышения истинного значения использует $g(q_i, k^*)$, где k^* – сообщаемое ему средствами массовой информации число, подразумевающее число участников, выбравших в предшествующий момент первую альтернативу вместо истинного их числа k . При этом k^* в случае завышения истинного числа k средствами массовой информации определяется по формуле

$$k^* = \begin{cases} k+L, & \text{если } k+L < N; \\ N, & \text{если } k+L \geq N, \end{cases}$$

а в случае занижения истинного значения k –

$$k^* = \begin{cases} k - L, & \text{если } k - L > 0; \\ 0, & \text{если } k - L \leq 0. \end{cases}$$

Таким образом, вместо $g(q_i, k)$ вероятность участника выбрать первую альтернативу будет $g(q_i, k^*)$. Это означает, что функция от k , изображенная на рис. 1, сдвигается вправо или влево.

Как нетрудно убедиться, процесс изменения вероятностей того, что k участников выбирают в момент t первую альтернативу $r_i(k)$, в рассматриваемом случае также описывается цепью Маркова с матрицей перехода $A^* = ||a_{m,k}^*||$. Заметим, что в данном случае в отличие от случая, рассмотренного в разд. 3, используются вероятности $g(q_i, k^*)$, зависящие от k^* , тогда как вероятности встречи двух участников по-прежнему зависят от k . Вместо матрицы A мы имеем матрицу A^* , которая, как нетрудно проверить, остается стохастической и при $1 > \beta > 0$ и $1 > q_i > 0$ ($i = 0, 1, 2$). Все компоненты стохастической матрицы $(A^*)^n$ положительны, по крайней мере, если $n > N - 2$ и распределение r_i при бесконечном росте t сходится к стационарному распределению $r^{(N)}$, которое удовлетворяет условию:

$$r^{(N)}(k) = \sum_{m=0}^{m=N} a_{m,k}^* r^{(N)}(m). \quad (11)$$

Важно отметить, что в отличие от матрицы A при $\beta > 0$ матрица A^* не удовлетворяет условию $a_{m,k}^* \neq a_{N-m, N-k}^*$, поэтому стационарное распределение, вообще говоря, не является симметрическим $r^{(N)}(k) \neq r^{(N)}(N - k)$. Поэтому поведение группы мы должны описывать всеми четырьмя показателями – $s_0^{(N)}$, $\sigma_0^{(N)}$, $P_0^{(N)}$, $\varepsilon(N)$.

Сначала рассмотрим случаи крайних значений восприимчивости β .

При $\beta = 0$ согласно (4) вероятность выбрать первую альтернативу $g(q_i, k)$ не зависит от числа участников, выбравших первую альтернативу накануне. Поэтому искажение (увеличение или уменьшение реальной величины k) никак не влияет на выбор участников. При любых L при $\beta = 0$ имеем $s_0^{(N)} = 10,5$, $\sigma_0^{(N)} = 10,5$, и стадного поведения никогда не возникает.

При $\beta = 1$, когда участники реагируют только на полученную ими информацию о числе участников, выбравших накануне первую альтернативу, справедливо утверждение 1. Здесь мы имеем сильную форму стадного поведения. При завышении информации о числе участников ($k^* > k$) возможны два случая. В случае, когда $L \leq 0,5N(1 - q_0)$, будет $g(q_0, 0) = 0$, $g(q_2, N) = 1$ и $r_0 + r_N = 1$ ($s_0^{(N)} = 0$, $\sigma_0^{(N)} = 0$, $P_0^{(N)} \geq 0$). Когда $L > 0,5N(1 - q_0)$, то из утверждения 2 следует $r_N = 1$ ($s_0^{(N)} = 0$, $\sigma_0^{(N)} = 0$, $P_0^{(N)} = 0$).

Аналогичным образом при уменьшении значения k ($k^* < k$) также возможны два случая. Когда $L \leq 0,5Nq_2$, то $g(q_0, 0) = 0$, $g(q_2, N) = 1$, и согласно утверждению 1 будет $r_0 + r_N = 1$ ($s_0^{(N)} = 0$, $\sigma_0^{(N)} = 0$, $1 \geq P_0^{(N)} > 0$). Когда $L > 0,5Nq_2$, будет $g(q_0, 0) = 0$, $g(q_2, N) = 1$. Точно так же, согласно утверждению 2, получаем, $r_0 = 1$ ($s_0^{(N)} = 0$, $\sigma_0^{(N)} = 10,5$, $P_0^{(N)} = 1$).

Таким образом, если участники реагируют только на сообщаемое им количество выбравших накануне первую альтернативу, то выбор всех участников одинаков. В случае, когда $L/N < 0,5(1 - q_0)$ и $k^* > k$ или $L/N \leq 0,5q_2$ и $k^* < k$, они все с вероятностью r_0 выбирают первую альтернативу и с дополнительной вероятностью выбирают вторую, в остальных случаях с вероятностью единица все участники выбирают одну и ту же альтернативу.

Теперь рассмотрим случай $0 < \beta < 1$. Естественно полагать, что завышение k^* относительного реального числа участников, выбравших накануне первую альтернативу, ведет к увеличению для каждого участника вероятности выбрать ($g(q_i, k^*) > g(q_i, k)$) первую альтернативу вероятности, а занижение ведет к ее уменьшению ($g(q_i, k^*) < g(q_i, k)$). Поэтому в случае завышения k уменьшается $\sigma_0^{(N)}$ и возрастает $s_0^{(N)}$, а в случае занижения k уменьшается $s_0^{(N)}$ и возрастает $\sigma_0^{(N)}$.

Можно рассмотреть два крайних случая. Средства массовой информации могут максимально завышать число участников, выбравших накануне первую альтернативу, в частности, выбрать L таким, что $k^* = N$ для $k = 0, \dots, N$. Тогда вероятность для участника выбрать первую альтернативу будет $g(q_i, k^*) = \beta + (1 - \beta)q_i$ для всех k . Это соответствует выбору, который не зависит от со-

общений средств массовой информации, но характеризуется отличными от их первоначальных значений вероятностями q_i^* (большими). Причем только при $\beta = 0$ эти вероятности отвечают условиям равноценности для участников двух альтернатив (3).

Если $1 > q_i > 0$, то $g(q_0, k^*)$ и $g(q_2, k^*)$ при всех k . Поэтому, как нетрудно убедиться, в этом случае в стационарном состоянии невозможно явное стадное поведение ($r^{(N)}(0) + r^{(N)}(N) = 1$) (рис. 5, 6).

Другой случай, когда средства массовой информации могут максимально занижать число участников, выбравших накануне первую альтернативу, в частности, выбирают L таким, что $k^* = 0$ для $k = 0, \dots, N$. Тогда вероятность для участника выбрать первую альтернативу будет $g(q_0, k^*) = (1 - \beta)q_i$ для всех k . Это соответствует выбору, который не зависит от сообщений средств массовой информации, но характеризуется отличными от изначальных вероятностями q_i^* (меньшими). Причем только при $\beta = 0$ эти вероятности отвечают условиям равноценности для участников двух альтернатив (3). Если $1 > q_i > 0$, то $g(q_0, k^*) > 0$ и $g(q_2, k^*) < 1$ при всех k . Поэтому, как нетрудно убедиться, в этом случае в стационарном состоянии невозможно стадное поведение в сильной форме ($r^{(N)}(0) + r^{(N)}(N) = 1$).

В случае, когда показатель доверия β таков, что без искажения функция $(r^{(N)}(k))$ имеет два локальных максимума, при крайних искажениях информации соответствующая функция распределения обладает единственным максимальным значением (рис. 6).

Вообще говоря, искажая реальную ситуацию, СМИ не могут добиться ситуации однозначного выбора всеми участниками какой-то одной альтернативы. Но, конечно, они могут за какое-то время добиться сдвига поведения коллектива в ту или иную сторону. При этом сдвиг информации L в ту или иную сторону, необходимый для желаемого существенного изменения предпочтений в коллективе, зависит от величины восприимчивости участника к сообщениям СМИ β . Эти возможности можно наблюдать на рис. 7–8, где видно различие между $r^{(N)}(k^*)$ и $r^{(N)}(k)$ при $L = -10$ и $L = 10$ при двух значениях β .

При величинах β , при которых имеется одно максимальное значение $r^{(N)}(k)$ при сдвиге информации о k вправо ($L > 0$), распределение $r^{(N)}(k^*)$ также сохраняет одно максимальное значение, которое сдвигается также вправо и возрастает. Аналогично при сдвиге информации о k влево ($L < 0$) распределение $r^{(N)}(k^*)$ также сохраняет одно максимальное значение, которое сдвигается также влево и возрастает. При величинах β , при которых имеется два максимальных значения $r^{(N)}(k)$, численные примеры показывают, что при сдвиге информации о k вправо ($L > 0$) при достаточно большом L ($L > 0,05N$) распределение $r^{(N)}(k^*)$ уже имеет одно максимальное

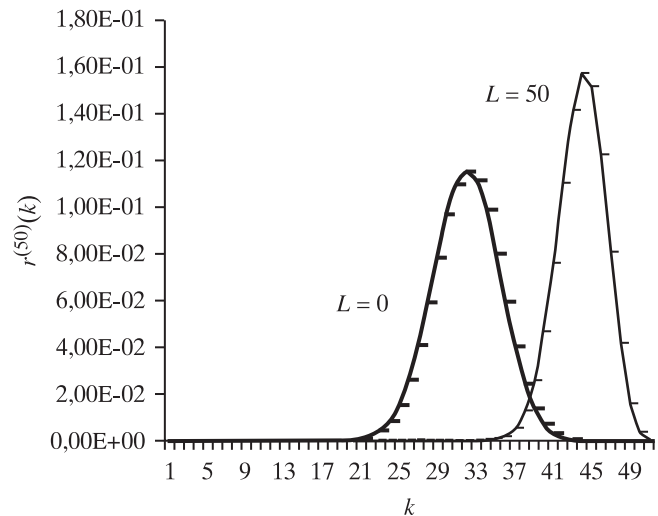


Рис. 5. Стационарное распределение при $N = 50$, $q_0 = 0,2$, $\beta = 0,5$ в случае точной информации и при максимальном возможном завышении величины k

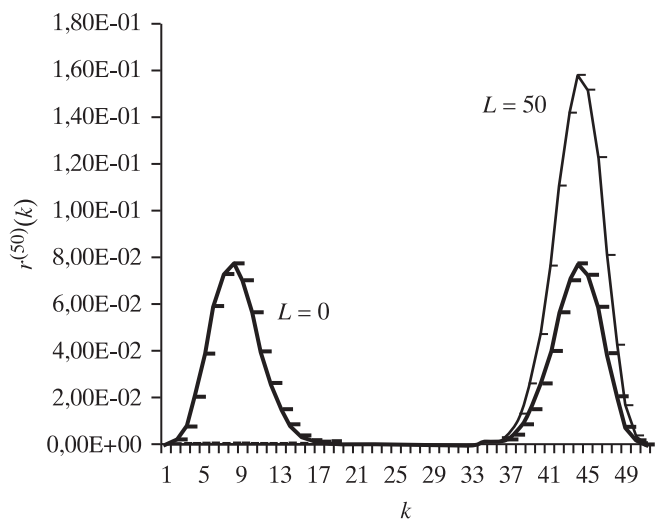


Рис. 6. Стационарное распределение при $N = 50$, $q_0 = 0,2$, $\beta = 0,2$ в случае точной информации и при максимальном возможном завышении величины k

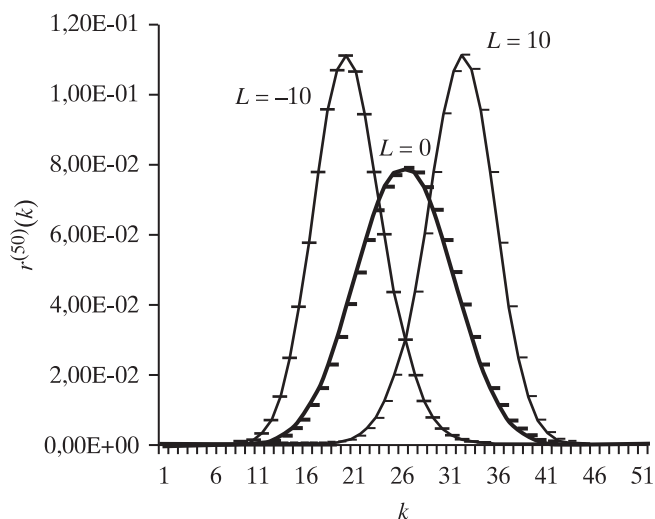


Рис. 7. Стационарное распределение при $N = 50$, $q_0 = 0,4$, $\beta = 0,2$ в случае точной информации и при занижении и завышении величины k на 10

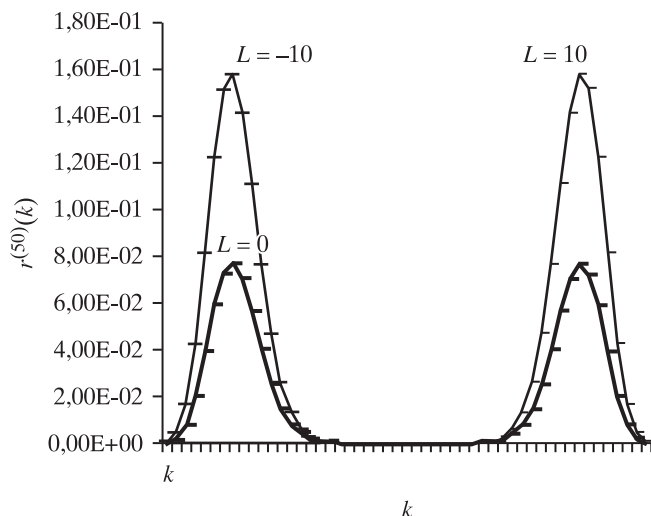


Рис. 8. Стационарное распределение при $N = 50$, $q_0 = 0,2$, $\beta = 0,5$ в случае точной информации и при занижении и завышении величины k на 10

приводит к стадному поведению в сильной форме. При близких к 1, но не равных 1 значениях β и больших значениях L стационарное распределение соответствует поведению, близкому к стадному. Рассмотренные численные примеры относились к сравнительно небольшим величинам N , хотя в реальности мы имеем дело с очень большим числом участников. При большом числе

значение, которое сдвигается также вправо и возрастает в сравнении с максимальным значением $r^{(N)}(k)$. Точно так же при сдвиге информации о k влево ($L < 0$) и при достаточно большом L ($L > 0,05N$) распределение $r^{(N)}(k^*)$ уже имеет одно максимальное значение, которое сдвигается также влево и возрастает в сравнении с максимальным значением $r^{(N)}(k)$. При малом сдвиге вправо или влево информации о k распределение $r^{(N)}(k^*)$ сохраняет два максимальных значения, но в отличие от $r^{(N)}(k)$ перестает быть симметричным, искажаясь в сторону изменения k^* по сравнению с k .

Данные в табл. 3–4 показывают, как меняются величины $\frac{s_0}{N}$, $\frac{\sigma_0}{N}$, P_0 при искажении средствами массовой информации

данных о числе участников, выбравших накануне первую альтернативу. Здесь тоже выделены случаи одного максимального значения стационарного распределения $r^{(N)}(k)$ ($\beta = 0,1$) и двух симметричных максимальных значений стационарного распределения $r^{(N)}(k)$ ($\beta = 0,9$). В обоих случаях, начиная с достаточно большого абсолютного значения L , показатели стационарного поведения коллектива не меняются и соответствуют ситуации, когда подавляющее большинство участников (но не все) выбирает одну и ту же альтернативу. Также из таблиц видно стабильное изменение предпочтений участников коллектива в сторону сдвига информации.

Таким образом, можно сделать вывод, что завышение или занижение средствами массовой информации числа участников, выбравших накануне первую альтернативу, дает желаемый результат, но только в ограниченных пределах, и, вообще говоря, не

Таблица 3. Изменения показателей поведения коллектива, вызванные искажением общей информации при $\beta = 0,1$, $q_0 = 0,3$, $N = 500$, $\varepsilon(N) = 1/N^{10,5}$

L	0	50	100	150	200	500	-50	-100	-150	-200	-500
s_0/N	0,498	0,498	0	0	0	0	0,498	0,488	0,482	0,482	0,482
σ_0/N	0,5	0,5	0,492	0,484	0,482	0,482	0,5	0,5	0,484	0	0,0
P_0	0,485	0,04	0	0	0	0	0,959	0,994	0,995	0,996	0,996

Таблица 4. Изменения показателей поведения коллектива, вызванные искажением общей информации при $\beta = 0,9$, $q_0 = 0,3$, $N = 500$, $\varepsilon(N) = 1/N^{10,5}$

L	0	50	100	150	200	500	-50	-100	-150	-200	-500
s_0/N	0,052	0,05	0,048	0,102	0	0	0,052	0,052	0,166	0,054	0,054
σ_0/N	0,054	0,066	0,058	0,494	0,54	0,54	0,056	0,06	0,494	0	0
P_0	0,497	0,347	0,193	0,01	0	0	0,645	0,794	0,983	0,997	0,997

участников выводы о поведении коллектива имеют такое же значение, если наша гипотеза о существовании пределов последовательностей $s_0^{(N)}/N$, $\sigma_0^{(N)}/N$ и $P_0^{(N)}/N$ при бесконечно растущем N окажется верной не только в случае равноценности альтернатив (разд. 3), но и в несимметричном случае.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе был исследован нередко встречающийся частный вид коллективного поведения – бинарный выбор, на который влияет информация о числе участников, выбравших одну из двух альтернатив накануне, и мнение других участников. Стохастическое описание реализованного выбора участников дало возможность выделить три характеристики этого выбора, адекватные динамике рассматриваемого поведения коллектива, и сформулировать простую математическую модель.

Использование аппарата цепей Маркова при анализе модели позволяет свести изучение поведения коллектива к анализу его стационарного поведения. Динамика модели и ее стационарное поведение (стационарное распределение вероятностей $r^{(N)}(k)$, $k = 1, \dots, N$) определяют в общем случае четыре параметра: восприимчивость β и три вероятности – q_0 , q_1 , q_2 , причем в случае равноценности обеих альтернатив для участников стационарное поведение определяют только β и q_0 . В работе исследована зависимость стационарного поведения коллектива от этих параметров. Кроме того, изучено влияние искажения информации, внесенного средствами массовой информации, о числе участников, выбравших накануне первую альтернативу, – на финальное стационарное поведение (массовый выбор) коллектива.

При изучении примеров стадного поведения полагают, что величина восприимчивости к общей информации растет с числом участников, выбравших одну из двух альтернатив. Предполагается некая подражательность при выборе участников: чем больше половины число участников, выбравших данную альтернативу, тем больше коэффициент при доле участников, выбравших эту альтернативу в формуле для вероятности предпочесть данную альтернативу для каждого участника. В данной работе рассмотрена наиболее простая кусочно-линейная форма зависимости вероятности от числа участников, выбравших накануне первую альтернативу. Вероятно, имеет смысл исследовать в дальнейшем случай, в котором β является функцией от k/N , достигающей минимума при $k/N = 0,5$ и возрастающей с приближением k/N к нулю или единице.

В основу нашего рассмотрения был положен механизм, основанный на парном взаимодействии участников. Хотя в действительности взаимодействие участников в процессе выбора решения происходит в малых группах, состоящих из более чем двух членов, а в настоящее время обсуждение будущего решения происходит в довольно больших группах в Интернете, например в Facebook. Упрощенный вариант такого механизма стоит рассмотреть в последующих исследованиях. Мы надеемся, что предлагаемая модель может дать новое направление как эмпирическим, так и лабораторным, исследованиям рассматривавшегося нами явления, включая оценку в конкретных случаях реальных значений параметров модели β , q_0 , q_1 , q_2 и параметра искажения общей информации L .

1. Доказательство леммы 1. Из определения $g(q_i, k)$ (4) имеем:

- 1) $(1 - \beta) q_i \leq g(q_i, k) \leq q_i$ при $k < N/2$,
- 2) $q_i < q_i \leq g(q_i, k) \leq \beta + (1 - \beta)q_i$ при $k > N/2$,
- 3) $g(q_i, k) = q_i$ при $k = N/2$.

Используя выражения для компонент матрицы перехода (6) и естественное условие $0 \leq q_0 < q_1 < q_2 \leq 1$, получаем

$$a_{k+1,k} \geq \frac{2(k+1)(N-k-1)(1-q_1)^2}{N(N-1)} > 0, \quad a_{k,k} \geq \frac{(N-k)(N-k-1)(1-q_0)^2}{N(N-1)} > 0, \quad k < N/2, \quad (12)$$

$$a_{k-1,k} \geq \frac{2(k+1)(N-k+1)q_1^2}{N(N-1)} > 0, \quad a_{k,k} \geq \frac{k(k-1)q_2^2}{N(N-1)} > 0, \quad k < N/2. \quad (13)$$

Из динамики величин (см. (7)) следует

$$r_{t+1}(0) = r_t(0) + a_{1,0}r_t(1) + a_{2,0}r_t(2)r_{t+1}(0), \quad (14)$$

т.е. $r_{t+1}(0) \geq r_t(0)$, и вместе с $r_t(k)$ это означает сходимость $r_t(0)$ при неограниченно растущем t (ограниченная и неубывающая последовательность чисел). Обозначим предел $r_t(0)$ через r_0 .

Но поскольку из (12) мы имеем $a_{1,0} > 0$, то из сходимости $r_t(0)$ и (14) имеем, что $r_t(0) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Теперь, запишем (7) в виде

$$r_{t+1}(k) = a_{k-2,k}r_t(k-2) + a_{k-1,k}r_t(k-1) + a_{k,k}r_t(k) + a_{k+1,k}r_t(k+1) + a_{k+2,k}r_t(k+2). \quad (15)$$

Из (13) мы видим, что $a_{k,k} > 0$ и $a_{k-1,k} > 0$ для $k < 0,5N$. Поэтому, используя формулу (15) при $k = 1$ и $r_t(1) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, получаем, что $r_t(2) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Аналогичный процесс имеет место $k = N/2 - 1$ (для упрощения рассуждений полагаем N четным), поэтому будет $r_t(N/2) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Также из динамики величин $r_t(k)$ (см. (7)) вытекает:

$$r_{t+1}(N) = r_t(N) + a_{N-1,N}r_t(N-1) + a_{N-2,N}r_t(N-2), \quad (16)$$

т.е. $r_{t+1}(N) \geq r_t(N)$, и вместе с $r_t(k) \leq 1$ эти два неравенства означают сходимость $r_t(N)$ при неограниченно растущем t (ограниченная и неубывающая последовательность чисел). Обозначим предел $r_t(N)$ через r_N .

Но поскольку из (13) следует $a_{N-1,N} > 0$, то из сходимости $r_t(N)$ и (16) вытекает, что $r_t(N-1) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Из (14) мы видим, что $a_{k,k} > 0$ и $a_{k-1,k} > 0$ для $k > N/2$. Поэтому, из (16) при $k = N-1$ и $r_t(N-1) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, заключаем, что $r_t(N-2) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Аналогичные рассуждения мы проводим до $k = N/2 + 1$ включительно (для упрощения мы полагаем N четным) и находим, что $r_t(0,5N) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Итак, мы находим, что $r_t(k)$ при $t \rightarrow \infty$ для $k = 1, \dots, N-1$. Отсюда, учитывая (5), мы получаем $r_0 + r_N = 1$. ■

2. Доказательство утверждения 2. Рассмотрим сначала случай, когда $q_0 = 0$, $q_2 < 1$. Таким образом, в отличие от леммы 1 будет $0 = q_0 < q_1 < q_2 < 1$ и $\beta < 1$. Как и при доказательстве леммы 1, мы получаем неравенства (12), (13). Но теперь, поскольку $(1 - \beta)q_1 > 0$, $(1 - \beta)q_2 > 0$, $1 - \beta - (1 - \beta)q_i < 1$, $i = 0, 1, 2$, мы можем добавить к ним неравенства:

$$a_{k+2,k} \geq \frac{(k+1)(k+2)(1-q_2)^2}{N(N-1)} > 0, \quad a_{k+1,k} \geq \frac{2(k+1)(N-k-1)(1-q_1)^2}{N(N-1)}, \quad k < N/2, \quad (17)$$

$$a_{k+2,k} > \frac{(k+2)(k+1)(1-g(q_2, k+2))^2}{N(N-1)} > 0,$$

$$\begin{aligned}
a_{k+1,k} &> \frac{2(k+1)(N-k-1)q_1^2}{N(N-1)} > 0, \\
a_{k,k} &> \frac{k(k-1)g^2(q_2, k)}{N(N-1)} + \frac{(N-k)(N-k-1)(1-g(q_0, k))^2}{N(N-1)} > 0, \quad k > N/2. \\
a_{k-1,k} &> \frac{2(k-1)(N-k+1)g^2(q_1, k-1)}{N(N-1)} > 0, \\
a_{k-2,k} &> \frac{(N-k+2)(N-k+1)g^2(q_0, k-2)}{N(N-1)} \geq 0,
\end{aligned} \tag{18}$$

То, что существует предел при бесконечно растущем t и что $r_t(k) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для $k = 1, \dots, N/2$, устанавливается точно так же, как и в доказательстве леммы 1. Используем равенство (16) при $k = N/2$. Из $r_t(k) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для $k = N/2 - 2, k = N/2 - 1, k = N/2$ и (18) мы имеем $r_t(N/2 + 1) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Затем с помощью (15) для $k = N/2 + 1$ и из $r_t(N/2 + 1) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ находим, что $r_t(0, 5N + 2) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Продолжая этот процесс далее, окончательно получим $r_t(k) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для $k = 1, \dots, N$; а из (5) – имеем $r_t(0) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$.

Доказательство того, что $r_t(N) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$, если $q_0 > 0, q_1 = 1$, отличается от предыдущего только тем, что оно проводится в обратном порядке – от $k = N$ до $k = 0$. ■

3. Доказательство утверждения 3. Из обратимости нашей симметричной модели следует, что

$$\frac{r^{(N)}(k+1)}{r^{(N)}(k)} = \frac{a_{k,k+1}}{a_{k+1,k}}. \tag{19}$$

Из (4) имеем

$$\begin{aligned}
a_{k,k+1} - a_{k+1,k} &= \frac{2}{N(N-1)} [k(N-k)g^2(q_1, k) + (N-k)(N-k-1)g(q_0, k)(1-g(q_0, k)) - \\
&\quad - k(k+1)g(1-q_0, k+1)(1-g(1-q_0, k+1)) - (k+1)(N-k-1)(1-g(q_1, k))^2].
\end{aligned} \tag{20}$$

Из (6) и (20) вытекает, что $r^{(N)}(0) < r^{(N)}(1)$.

В дальнейшем будем обозначать $m = k/N$, тогда мы можем представить величину $a_{k,k+1} - a_{k+1,k}$ в виде $a_{k,k+1} - a_{k+1,k} = G(m, \beta) + F(m, \beta)$ где $F(m, \beta) < C/N$, а C – не зависящая от N константа. Учитывая (20) и (4), имеем:

$$\begin{aligned}
G(m, \beta) &= (1-m)m g^2(0,5, m) + (1-m)^2 g(q_0, m)(1-g(q_0, m)) - m^2 g(1-q_0, m)(1-g(1-q_0, m)) - \\
&\quad - m(1-m)(1-g(0,5, m))^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(M, \beta) &= -(1-m)m(1-2g(0,5, m)) + (1-m)^2 g(q_0, m)(1-g(q_0, m)) - \\
&\quad - m^2 g(1-q_0, m)(1-g(1-q_0, m)).
\end{aligned}$$

В соответствии с (4) величину $G(m, \beta)$ можно записать четырьмя различными способами:

$$\begin{aligned}
G(m, \beta) &= -(1-m)m\beta + (1-m)^2[(1-\beta)q_0 - (1-\beta)^2 q_0^2] - m^2[(1-\beta)(1-q_0) - \\
&\quad - (1-\beta)^2(1-q_0)^2], \quad m \leq 0,5 q_0, m \leq 0,5 q;
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
G(m, \beta) &= -(1-m)m\beta + (1-m)^2[(1-\beta)q_0 - (1-\beta)^2 q_0^2] - m^2[(1-q_0)q_0 - \beta^2(1-2m)^2 - \\
&\quad - \beta(1-2m)(1-2q_0)], \quad 0,5 q_0 \leq m \leq 0,25;
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
G(m, \beta) &= -2(1-m)m(1-2m)\beta + (1-m)^2[(1-\beta)q_0 - (1-\beta)^2 q_0^2] - m^2[(1-q_0)q_0 - \\
&\quad - \beta^2(1-2m)^2 - \beta(1-2m)(1-2q_0)], \quad \frac{1}{4} \leq m \leq \frac{1-q_0}{2};
\end{aligned} \tag{23}$$

$$G(m, \beta) = -2(1-m)m(2-m)\beta + ((1-m)^2 - m^2)((1-q_0)q_0 - (1-2m)^2\beta^2) + \\ + ((1-m)^2 + m^2(1-2m)(1-2q_0)\beta, \quad 0,5(1-q_0) \leq m \leq 0,5. \quad (24)$$

Из выражений (21)–(24) можно видеть, что для $0 < m < 0,5$ величина $\frac{dG(m, \beta)}{dm}$ отрицательная, и поэтому для этих m величина $G(m, \beta)$ убывает с ростом m . Кроме того, для каждого m при условии $0 < m < 0,5$ будет $G(m, 0) < 0$, $G(m, 1) > 0$. Таким образом, для каждого $m < 0,5$ найдется такое $\beta(m)$, что $G(m, \beta(m)) = 0$. При этом $r^{(N)}(mN - 1) \leq r^{(N)}(mN) \geq r^{(N)}(mN + 1)$.

Вследствие того, что на рассматриваемом интервале функция $G(m, \beta)$ убывает с ростом m , для $m < n$ будет $\beta(m) > \beta(n)$.

Вследствие убывания $G(m, \beta)$ по m имеем: если $n > m$, то $G(m, \beta(m)) = 0 > G(n, \beta(m))$. Поэтому для всех $0,5 > n > m$

$$r^{(N)}(nN + 1) < r^{(N)}(nN)r^{(N)}(nN + 1) < r^{(N)}(nN). \blacksquare$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Вороновицкий М.М.** (2008). Модель стадного поведения при формировании спроса // *Экономика и мат. методы*. Т. 39. Вып. 4.
- Вороновицкий М.М., Мейтал Ш.** (2003). Модель социального влияния на цены // *Экономика и мат. методы*. Т. 39. Вып. 4.
- Banerjee A.** (1992). A Simple Model of Herd Behavior // *The Quarterly J. of Econ.* Vol. CVII. August.
- Beker G.S.** (1991). A Note on Restaurant Pricing and Other Example on Social Influence on Price // *J. of Political Econ.* Vol. XCIX (№ 5).
- Bikhchandany S., Hirschleifer D., Welch I.** (1992). A Theory of Fads, Fashion, Custom, and Cultural Change as Information Cascades // *J. of Political Econ.* Vol. 100. No. 5.
- Blumer H.** (1951). Collective Behavior. In: *"Principles of Sociology"* / Lee A.M. (ed.). N.Y.: Barnes & Noble.

Поступила в редакцию
02.04.2012 г.

The Simple Model of Behavior with Binary Choice and Influence of Total and Grouped Information (the Model of Social Protests)

M.M. Voronovitsky

The behavior of a group consisting of big number of identical participants in the case of a personal binary choice is considered. The information received from other members of a group at pair meetings and a general information on number of the participants who have chosen each alternatives before define the choice of each partner. The dynamic model of collective behavior based on Markov chain is constructed. Investigated the variants of behavior of a group at various level of susceptibility of the particular participant to the common information received through mass media. It is proved, that at a considerable susceptibility through certain time herd behavior arises. It is shown that in case of distortion of the common information the behavior of the group is changing in the direction of distortion of the general information.

Keywords: herd behavior, herding, Markov chains, group.