ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2013, том 49, № 2, с. 97–105

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

О ВЫБОРЕ НАИЛУЧШЕГО ГРАФИКА ИЗ ДВУХ СХЕМ ИНВЕСТИРОВАНИЯ ПРЕДПРИЯТИЯ

© 2013 г. **А.М. Ахтямов**

(Уфа)

С помощью безлаговой математической модели доказаны четыре теоремы о выборе наилучшего графика из двух схем инвестирования с одинаковым горизонтом планирования и объемом инвестирования. Теоремы позволяют, не решая дифференциального уравнения, только по виду графиков инвестирования определить, по какому варианту будет получен больший объем продукции в стоимостном выражении. Приведены соответствующие примеры и контрпримеры.

Ключевые слова: схема инвестирования, график инвестирования, продукция предприятия, математическое моделирование.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Распределению инвестиционного капитала среди множества альтернативных вариантов капиталовложений посвящено много работ, например (Абросимов, 2011; Астахов, 2005; Бронштейн, Черняк, 2005; Виленский, Лившиц, Смоляк, 2001; Журавлев, 2004; Методические рекомендации, 2000; Мартынов, Малков, 2011; Овчинникова, Ворохобин, 2010; Преображенская, Семенова, 2011; Протопопова, 2011).

Настоящая работа имеет несколько иную направленность. Она опирается на математическую модель инвестирования, определяемую линейным дифференциальным уравнением первого порядка (Горелик, Горелов, Кононенко, 1991, с. 177–178):

$$ay_i'(t)+ky_i(t)=u_i(t), \quad y_i(0)=y_0, \quad u_i(t)\geq 0, \quad k\geq 0, \quad a>0. \tag{1}$$

Здесь $y(t)$ – общая стоимость продукции предприятия, произведенной в момент времени t; k – постоянный неотрицательный коэффициент выбытия фондов (с течением времени происходит изнашивание оборудования и орудий труда); $u(t)$ – поток капитальных вложений, направленный на восстановление и расширение фондов (для краткости этот поток далее будем именовать инвестициями). Коэффициент $a > 0$ введен для большей общности, и, как правило, его полагают равным 1.

Пусть инвестирование предприятия (отрасли и т.п.) в течение времени $[0, T]$ производится по одной из двух схем инвестирования $u_i(t)$, $i = 1, 2$, с одинаковым объемом инвестирования U (и горизонтом инвестирования T):

$$\int_0^T u_i(t)\,dt = U, \quad i = 1, 2.$$

Задача состоит в том, чтобы найти правила, с помощью которых, не решая дифференциального уравнения (1), только по виду графиков можно было бы сразу сказать, какая из двух схем инвестирования даст больший объем продукции.

В настоящей статье найдено четыре таких правила. Каждое правило выделено в качестве теоремы. Первое правило применяется тогда, когда функции $u_i(t)$ представляются в виде $u_i(t) = a_i f(t) + b_i$, где $f(t)$ – элементарная функция, график которой нам известен. Второе правило используется для сравнения “зеркальных” схем инвестирования, третье и четвертое – связаны с понятиями механики – массы и центра масс пластины.

2. МЕТОД ЭТАЛОННОЙ ФУНКЦИИ

Пусть инвестирование предприятия (отрасли и т.п.) в течение времени $[0, T]$ производится по одной из формул инвестирования с одинаковым объемом инвестирования U (и горизонтом инвестирования T):

$$u_i(t) = a_i(t) + b_i; \quad \int_0^T u_i(t)dt = U; \quad i = 1, 2; \quad b_1 > b_2, \tag{2}$$

где $f(t)$– некоторая элементарная функция, график которой известен.

Пусть $y_i(t)$ – общая стоимость продукции предприятия, произведенной в момент времени t по схеме инвестирования $u_i(t)$. Спрашивается, что больше: $Y_1 = \int_0^T y_1(t)dt$ или $Y_2 = \int_0^T y_2(t)dt.$ То есть задача состоит в следующем: определить, по какому графику инвестирования – ($u_1(t)$ или $u_2(t)$) – будет выпущен больший объем продукции (в стоимостном выражении) за промежуток времени $[0, T]$.

Лемма. *Если функции* $u_i(t)$ *из математической модели* (1) *удовлетворяют* (2) *и* $E = \int_0^T (u_1(t) - u_2(t))\mathrm{e}^{kt/a}dt < 0,$ *то* $Y_1 > Y_2$ *(объем продукции, произведенной по первому графику инвестирования, будет больше объема продукции, произведенной по второму графику). Если* $E > 0$, то $Y_1 < Y_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Объем продукции Y_i, выпущенной по схеме i инвестирования за период времени $[0, T]$, описывается интегралом $Y_i = \int_0^T y_i(t)dt.$ Проинтегрировав уравнение (1), получаем $\int_0^T (ay_i'(t) + ky_i(t))dt = \int_0^T u_i(t)dt$, $y(0) = y_0$. Отсюда и из (1), (2) следует, что $a(y_1(T) - y_2(T)) + k(Y_1 - Y_2) = 0$. А поскольку $a(y_1(T) - y_2(T)) + k(Y_1 - Y_2) = 0$, то

$$Y_1 - Y_2 = -\frac{1}{k}\mathrm{e}^{kT/a}\int_0^T (u_1(t) - u_2(t))\mathrm{e}^{kt/a}dt. \tag{3}$$

Из (3) и неравенства $-(1/k)\mathrm{e}^{-kT/a}$ и вытекает утверждение леммы. ■

Теорема 1. *Пусть функции инвестирования* $u_i(t)$ *из математической модели* (1) *удовлетворяют* (2)*, причем для функции* $f(t)$ *выполнены следующие условия:*

1) *функция* $f(t)$ *непрерывна на отрезке* $[0, T]$;

2) *функция* $f(t)$ *строго возрастает на отрезке* $[0, T]$;

3) *функция* $f(t) > 0$ *в интервале* $(0, T)$.

Тогда $Y_1 > Y_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $k = 0$. Обозначим первообразную функции $f(t)$ через $F(t)$. Заметим, что

$$y_i(t) = \int u_i(t)dt = a_i(F(t) + C) + b_i = a_i\left(\int_0^t f(t)dt + C\right) + b_i.$$

Отсюда и из условия $y_i(0) = y_0$ имеем

$$y_i(t) = a_i\left(\int_0^t f(t)\,dt + C\right) + b_i t = a_i\int_0^t f(t)\,dt + b_i t + y_0.$$

Из формул (2) вытекает, что $a_i = (U - b_iT)/(F(T) - F(0))$, поэтому

$$Y_1 - Y_2 = \frac{1}{a}\int_0^T\int_0^t (u_i(z) - u_2(z)\,dz\,dt =$$

$$= -\frac{b_1 - b_2}{a}\int_0^T\int_0^t\left(\frac{T}{F(T) - F(0)}\,f(z) - 1\right)dz\,dt = -\frac{b_1 - b_2}{a}\,\frac{T}{F(T) - F(0)}\,I(T),$$

где $I(T) = \int_0^T (F(t) - F(0))\,dt - 0{,}5T(F(T) - F(0))$.

Из условия 3 теоремы следует, что $f(t) > 0$, поэтому $F(T) - F(0) > 0$. Кроме того, согласно условиям теоремы $b_1 - b_2 > 0$, $a > 0$, $T > 0$. Покажем, что $I(T) < 0$ при $T > 0$. Имеем

$$\frac{d}{dT}\,I(T) = F(T) - 0{,}5(F(T) - F(0)) - 0{,}5Tf(T) = 0{,}5\left(\int_0^T f(t)\,dt - \int_0^T f(T)\,dt\right).$$

Последнее выражение отрицательно, так как $f(t) < f(T)$, если $t \in (0, T)$ (согласно условию 2 теоремы функция $f(t)$ возрастает). Кроме того, $I(0) = 0$. Поэтому $I(T) < 0$, если $T > 0$, отсюда $Y_1 - Y_2 > 0$.

Пусть теперь $k > 0$. Имеем

$$E = \int_0^T (u_1(t) - u_2(t))\mathrm{e}^{kt/a}\,dt = -(b_1 - b_2)\int_0^T\left(\frac{Tf(t)}{F(T) - F(0)} - 1\right)\mathrm{e}^{kt/a}\,dt.$$

Откуда

$$E = \frac{-(b_1 - b_2)}{F(T) - F(0)}\,R(T), \tag{4}$$

где

$$R(T) = T\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{kt/a}\,dt - (F(T) - F(0))\int_0^T \mathrm{e}^{kt/a}\,dt, \quad R(T) = 0 \quad \text{при} \quad T = 0.$$

Покажем, что $R(T)$ положительно, если $T > 0$. Имеем

$$dR(T) = \int_0^T f(t)\mathrm{e}^{kt/a}\,dt + Tf(T)\mathrm{e}^{kT/a} - f(T)\int_0^T \mathrm{e}^{kt/a}\,dt -$$

$$-\mathrm{e}^{kT/a}\int_0^T f(t)\,dt = \int_0^T (f(t) - f(T))\,(\mathrm{e}^{kt/a} - \mathrm{e}^{kT/a})\,dt > 0,$$

так как $T > t$ и $f(T) > f(t)$ при $t \in (0, T)$.

Следовательно, $R(T) > 0$ при $T > 0$. Отсюда, из (4) и леммы получаем, что $Y_1 > Y_2$. ■

Из теоремы 1 вытекают следствия для случая, когда $f(t)$ проходит через начало координат, и для случая степенного инвестирования.

Следствие 1. Если даны два графика инвестирования (2), для которых выполнены условия теоремы 1, то больший объем продукции в стоимостном выражении будет получен по графику инвестирования $u_i(y)$, у которого больше начальная ордината.

Доказательство. Так как $a_i = (U - b_iT)/(F(T) - F(0))$, то

$$u_1(0) - u_2(0) = \frac{-(b_1 - b_2)f(0)T}{F(T) - F(0)} + (b_1 - b_2) = (b_1 - b_2)\left(1 - \frac{f(0)T}{F(T) - F(0)}\right) =$$

$$= (b_1 - b_2)\left(1 - \int_0^T f(0)dt / \int_0^T f(t)dt\right).$$

Из возрастания функции $f(t)$ следует неравенство $\int_0^T f(0)dt < \int_0^T f(t)dt$ при $t > 0$. Поэтому из неравенства $u_1(0) > u_2(0)$ и последнего равенства следует, что $b_1 > b_2$. Отсюда и из теоремы 1 получаем, что $Y_1 > Y_2$. ■

Степенная функция $f(t) = t^n$, $n > 0$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Поэтому получаем следствие.

Следствие 2. Пусть $f(t) = t^n$, $n > 0$ и функции инвестирования $u_i(t)$ из математической модели (1) удовлетворяют (4). Тогда $Y_1 > Y_2$.

Замечание 1. Следствие 2 обобщает результаты работ (Ахтямов, 2004, 2006), полученные для $f(t) = t$. Случай $n = 0$ при степенном инвестировании мало интересен, так как $u_1(t) \equiv u_2(t) = b_1 = b_2$ и выбирать не из чего. При $n < 0$ интегралы $\int_0^T u_i(t)dt$ являются несобственными, поэтому поставленная задача становится лишенной экономического смысла, так как из постановки задачи вытекает, что предприятие получает бесконечную сумму денег либо в начальный момент времени (случай $-1 < n < 0$), либо за период $(0, T]$ (случай $n \le -1$).

Возникает вопрос, можно ли обобщить теорему 1 на произвольные функции $f(t)$, не обязательно удовлетворяющие условиям 1–3. Покажем, что это не так и условия теоремы 1 существенны. При невыполнении хотя бы одного условия теоремы утверждение теоремы уже не будет выполнено.

Контрпример 1 (существенность условия 1). Пусть $T = 10$, $y_0 = 5$, $a = 1$, $k = 0$,

$$f(t) = \begin{cases} t/10 & \text{при} \quad 0 \le t \le 1; \\ t^2/20 + 10 & \text{при} \quad 1 \le t \le 10, \end{cases}$$

$a_1 = 10$, $a_2 = 1000/95$, $b_1 = 10$, $b_2 = 5$, $U = 1050$, $T = 10$. Тогда

$$Y_1 - Y_2 = \frac{1}{a}\int_0^T \int_0^t (u_1(z) - u_2(z))dz\,dt = \int_0^{10} \int_0^t \left(-\frac{50}{95} f(z) + 5\right) dz\,dt = -1100/57 < 0,$$

т.е. $Y_2 > Y_1$.

Контрпример 2 (существенность условия 2). Пусть $T = 1$, $y_0 = 0$, $a = 1$, $k = 0$, $a_1 = -2$, $a_2 = -1$, $b_1 = 3$, $b_2 = 2$, $U = 1$, $f(t) = 1$. Тогда $Y_1 - Y_2 = \frac{1}{a}\int_0^T \int_0^t (u_1(z) - u_2(z)dz\,dt = \int_0^1 \int_0^t 0dz\,dt = 0$,

т.е. $Y_1 = Y_2$.

Контрпример 3 (существенность условия 3). Пусть $T = 1$, $a = 1$, $k = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $b_1 = 0$, $b_2 = -1$, $U = -0{,}5$, $f(t) = t - 1$. Тогда

$$Y_1 - Y_2 = \frac{1}{a}\int\limits_0^T\int\limits_0^t (u_1(z) - u_2(z))dz\,dt = \int\limits_0^1 (2t-1)dz\,dt = -1/6 < 0,$$

т.е. $Y_2 > Y_1$.

3. МЕТОД ЗЕРКАЛЬНОГО ИНВЕСТИРОВАНИЯ

Пусть $y_1(t)$ и $y_2(t)$ – стоимости продукции предприятия, произведенные в момент времени t по следующим симметричным относительно прямой $x = T/2$ схемам инвестирования:

$$u_1(t) = u(t), \quad u_2(t) = u(T-t), \quad \int\limits_0^T u_i(t)dt = U. \tag{5}$$

Через Y_1 и Y_2 обозначим объемы продукции, выпущенной за время $[0, T]$ при инвестировании по схемам (5). Спрашивается, что больше: $Y_1 = \int\limits_0^T y_1(t)dt$ или $Y_2 = \int\limits_0^T y_2(t)dt$. По какому из графиков инвестирования – $u_1(t)$ или $u_2(t)$ – будет выпущен больший объем продукции (в стоимостном выражении) за промежуток времени $[0, T]$? Ниже приводится теорема, не зависящая от условий теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть функции инвестирования* $u_i(t)$ *удовлетворяют* (5) *и равенству* $\int\limits_0^T u_1(t)dt = \int\limits_0^T u_2(t)dt = U$, $u(t)$ *– строго убывающая и непрерывная на* $[0, T]$ *функция, а* $y_1(0) = y_2(0) = y_0$. *Тогда* $Y_1 > Y_2$.

Доказательство. Обозначим через $F(t)$ первообразную функции $u(t)$, а через $G(t)$ – первообразную функции $F(t)$. Пусть $k = 0$. Тогда

$$Y_1 = \int\limits_0^T\int\limits_0^t u(z)dz\,dt = \int\limits_0^T (F(t) - F(0))dt = G(T) - G(0) - F(0)T,$$

$$Y_2 = \int\limits_0^T\int\limits_0^t u(T-z)dz\,dt = \int\limits_0^T\int\limits_{T-t}^T u(x)dx\,dt = \int\limits_0^T (F(T) - F(T-t))dt = F(T)T + G(0) - G(T).$$

Покажем, что разность $R(T) = Y_1 - Y_2 = 2(G(T) - G(0)) - (F(0) + F(T))T$ положительна:

$$\frac{d}{dT}R(T) = 2F(T) - (F(0) + F(T)) - u(T)T = F(T) - F(0) - u(T)T = \int\limits_0^T u(t)dt - u(T)T.$$

Так как $u(t)$ убывает, то $\int\limits_0^T u(t)dt > \int\limits_0^T u(T)dt = u(T)T$ для $t < T$. Следовательно, $\frac{d}{dt}R(T) > 0$ и $R(T)$ возрастает на $[0, T]$. Кроме того, $R(T) = 0$ при $T = 0$. Поэтому $R(T) > 0$. Пусть $k > 0$. Тогда

$$E = \int\limits_0^T (u_1(t) - u_2(t))e^{kt/a}dt = \int\limits_0^T (u(t) - u(T-t))e^{kt/a}dt = \int\limits_0^T u(t)[e^{kt/a} - e^{k(T-t)/a}]dt.$$

Покажем, что $E < 0$.

Имеем $E(T) = 0$ при $T = 0$. Кроме того,

$$\frac{d}{dt}E(T) = \frac{d}{dr}\left(\int_0^T u(t)\mathrm{e}^{kt/a}dt - \exp(kT/a)\int_0^T u(t)\mathrm{e}^{-kt/a}dt\right) = u(T)\mathrm{e}^{kT/a} - k\mathrm{e}^{kT/a}\int_0^T u(t)\mathrm{e}^{-kt/a}dt - \mathrm{e}^{kt/a}u(T)\mathrm{e}^{-kT/a}.$$

Поскольку $u(t)$ строго убывает, то $u(t) > u(T)$ при $t \in (0, T)$. Поэтому

$$\frac{d}{dT}E(T) < u(T)\mathrm{e}^{kT/a}\left[1 - k/a\int_0^T \mathrm{e}^{-kt/a}dt - \mathrm{e}^{-kT/a}\right] = 0$$

и $E(T) < 0$ при $T > 0$. Отсюда и из леммы следует, что $Y_1 > Y_2$. ■

Условие теоремы 2 о строгом убывании функции на $[0, T]$ является существенным. Приведем соответствующий контрпример.

Контрпример 4 (существенность условия убывания $u(t)$). Рассмотрим на отрезке $[0, 2\pi]$ периодическую функцию $u(t) = u_1(t) = 1 - \sin t$ и функцию $u_2(t) = 1 - \sin(\pi - t) = 1 + \sin(t)$, симметричную ей относительно оси $t = \pi$. Для этих функций как при $k = 0$, так и при $k > 0$ все условия теоремы 2, кроме условия строгого убывания, выполнены. Однако утверждение теоремы 2 для них не выполнено: $Y_1 = Y_2$.

4. МЕТОД ЦЕНТРА МАСС

Пример. Пусть $a = 1$. Рассмотрим две схемы инвестирования предприятия, имеющие одинаковый объем инвестирования U с горизонтом планирования T:

$$u_1(t) = b_1 \quad \text{при} \quad 0 \le t < T \quad \text{и} \quad u_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \le t < T/4; \\ b_2 & \text{при} \quad T/4 \le t < 3T/4; \\ 0 & \text{при} \quad 3T/4 \le t < T. \end{cases}$$

На рисунке изображены схемы инвестирования предприятия, соответствующие случаям $b_1 = b$ и $b_2 = 2b$. Так как $U = \int_0^T b_1\,dt = b_1 T, U = \int_{T/4}^{3T/4} b_2\,dt = 0{,}5 b_2 T,$ то $b_1 = U/T$, $b_2 = U/T$. Далее

$$y_1 = \int_0^t b_1\,dt + C_1 = b_1 t + y_0 = Ut/T + y_0,$$

$$y_2(t) = \begin{cases} y_0 & \text{при} \quad 0 \le t < T/4; \\ 2Ut/T - U/2 + y_0 & \text{при} \quad T/4 \le t < 3T/4; \\ U + y_0 & \text{при} \quad 3T/4 \le t < T, \end{cases}$$

$$Y_1 = \int_0^T y_1\,dt = \int_0^T (Ut/T + y_0)\,dt = 0{,}5UT + y_0 T,$$

$$Y_2 = \int_0^{T/4} y_0\,dt + \int_{T/4}^{3T/4} (2Ut/T - U/2 + y_0)\,dt + \int_{3t/4}^{T} (U + y_0)\,dt = 0{,}5UT + y_0 T.$$

Решив дифференциальное уравнение, мы получили, что рассматриваемые схемы инвестирования дают одинаковый объем продукции. Заметим, что теоремы 1 и 2 неприменимы для данного примера. Теорему 1 невозможно использовать, так как функция $u_2(t)$ является разрывной, теорема 2 предполагает строгое убывание $u(t)$, а в примере эта функция является кусочно-постоянной. Ниже приводится теорема, применимая для данного случая и позволяющая по графикам, не решая дифференциального уравнения, определить, что обе схемы инвестирования дадут одинаковый объем производства.

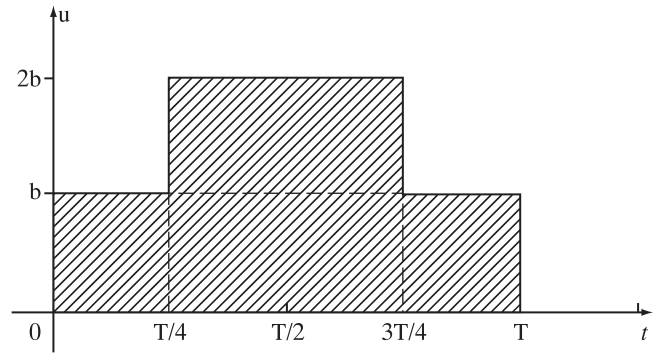

Рисунок. Графики инвестирования при $b_1 = b$ и $b_2 = 2b$

Определение 1. Пусть инвестирование предприятия (отрасли и т.п.) в течение времени $[0, T]$ производится по схеме инвестирования, задаваемого графиком функции $u = u(t) \geq 0$. Коэффициент выбытия фондов равен нулю. Назовем *пластиной инвестиций* $D(u)$ однородную пластину, ограниченную линиями $t = 0$, $t = T$, $u = 0$ и $u = u(t)$. Центр масс этой пластины будем называть *центром масс пластины инвестирования*. Абсцисса центра масс, как известно (Выгодский, 2005), находится по формуле

$$t_{ic} = \iint\limits_{D(u_i)} t du dt / \iint\limits_{D(u_i)} du dt = \int\limits_0^T \int\limits_0^{u_i(t)} t du dt / \int\limits_0^T \int\limits_0^{u_i(t)} 1 du dt.$$

Отсюда $t_{ic} = \int\limits_0^T t u_i(t) dt / \int\limits_0^T u_i(t) dt = \frac{1}{U} \int\limits_0^T t u_i(t) dt.$

Теорема 3. *Если коэффициент выбытия фондов равен нулю, то наилучшей из двух схем инвестирования является та, у которой центр масс соответствующей пластины инвестирования находится левее. Если же* $k = 0$ *и центры масс пластин совпадают, то обе схемы инвестирования дадут одинаковый объем продукции.*

Другими словами: пусть функции инвестирования $u_i(t)$ *из математической модели* (1) *удовлетворяют* (2), *причем* $k = 0$. *Если* $t_{1c} < t_{2c}$, *то* $Y_1 > Y_2$. *Если* $t_{1c} > t_{2c}$, *то* $Y_1 < Y_2$. *Если* $t_{1c} = t_{2c}$, *то* $Y_1 = Y_2$.

Доказательство. Абсцисса центра масс пластины инвестирования $D_i = D(u)$, как было замечено выше, находится по формуле $t_{ic} = \int\limits_0^T t u_i(t) dt / \int\limits_0^T u_i(t) dt = \frac{1}{U} \int\limits_0^T t u_i(t) dt.$ Обозначим статический момент $\int\limits_0^T t u_i(t) dt$ пластины D_i через M_i. Из уравнения $a y_i'(t) = u_i(t)$ следует, что $\int\limits_0^t u_i(x) dx = a(y_i(t) - y_i(0))$. Проинтегрировав $M_i = \int\limits_0^T t u_i(t) dt$ по частям, получим

$$M_i = \int\limits_0^T t u_i(t) dt = \left[t \int\limits_0^t u_i(x) dx \right]_{t=0}^{t=T} - \int\limits_0^T \int\limits_0^t u_i(x) dx dt = TU - a \int\limits_0^T (y_i(t) - y_i(0)) dt = TU - aY_i + a y_0 T.$$

Откуда и вытекает утверждение теоремы. ■

Вернемся к примеру. У прямоугольников, изображенных на рисунке центры масс находятся на одной вертикальной прямой $t = T/2$, следовательно, у этих центров масс одинаковая абсцисса t_c. Отсюда и из доказанной теоремы 3 следует, что обе схемы инвестирования с горизонтом планирования T, соответствующие этим прямоугольникам, дадут одинаковый объем продукции.

Контрпример 5 (существенность условия k = 0). Рассмотрим на отрезке [0, T] функции $u_1(t) = 1$ и

$$u_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \le t < \varepsilon; \\ T(T - \varepsilon) & \text{при} \quad \varepsilon \le t < T. \end{cases}$$

Для $a = 1$, $k = 0{,}01$, $\varepsilon = 0{,}01$, $T = 10$, $y(0) = 1$ получаем $Y_1 - Y_2 = -0{,}047$, т.е. несмотря на то что центр масс пластины для функции $u_1(t) = 1$ находится левее, имеем $Y_1 < Y_2$.

5. МЕТОД МАСС

Определение 2. Пусть инвестирование предприятия (отрасли и т.п.) в течение времени [0, T] производится по схеме инвестирования, задаваемого графиком функции $u_i = u_i(t) \ge 0$. Коэффициент выбытия фондов $k > 0$. Назовем *пластиной выбытия фондов* K_i неоднородную пластину, ограниченную в координатной системе $t0v$ линиями $t = 0$, $t = T$, $v = 0$, $v = \exp(kt/a)$, и имеющую переменную плотность $\rho_i(t) = u_i(t)$. Масса такой пластины, как известно (Выгодский, 2005), находится по формуле $m_i = \iint\limits_{K_i} u_i(t)\,du dt$. Отсюда

$$m_i = \int\limits_0^T \int\limits_0^{\exp(kt/a)} u_i(t)\,du dt = \int\limits_0^T u_i(t)\,\mathrm{e}^{kt/a}\,dt.$$

Теорема 4. *Пусть функции инвестирования $u_i(t)$ из математической модели* (1) *удовлетворяют* (2) *и* $m_1 < m_2$, *тогда* $Y_1 > Y_2$. *То есть чем меньше масса пластины выбытия фондов, тем больший объем продукции будет выпущен по соответствующей схеме инвестирования.*

Доказательство. Из условия теоремы $m_1 < m_2$ и определения 2 имеем

$$E = \int\limits_0^T (u_i(t) - u_2(t))\,\mathrm{e}^{kt}\,dt = m_1 - m_2 < 0.$$

Отсюда и из леммы получаем $Y_1 > Y_2$.■

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, если выпуск продукции предприятия происходит согласно математической модели (1), то с помощью четырех теорем, доказанных в статье, не решая дифференциального уравнения (1), можно мгновенно оценить, какая из схем инвестирования даст больший объем продукции.

Как и всякая математическая модель, модель (1) обладает определенной идеализацией. В частности, она не учитывает временной лаг. Однако идеализация, принятая в математической модели инвестирования, часто не только не мешает, но и способствует прояснению некоторых ситуаций. Так, например, теорема 2 показывает, что при нисходящем непрерывном графике инвестирования за время [0, T] производится продукции больше, чем при последующем симметричном ему восходящем графике инвестирования за время [T, 2T]. Этот вывод сделан на основе модели (1), а поэтому верен в случае, когда отсутствуют и инфляция, и рисковые ситуации, а также не происходит запаздывания момента реализации продукции от момента ее выпуска. Последнее, в свою очередь, позволяет понять, что причины длительности выхода из кризиса связаны не только с временным лагом, но еще и с другими, более общими закономерностями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Абросимов А.А. (2011). Финансово-бюджетные потоки, оценка и повышение результативности бюджетного контроля // *Экономика и управление*. № 7.

Астахов А.С. (2005). О преодолении разрыва между теорией и практикой моделирования инвестиционных решений // *Экономика и мат. методы*. Т. 41. № 3.

Ахтямов А.М. (2004). Математика для социологов и экономистов. М.: Физматлит.

Ахтямов А.М. (2006). Инерция падения объемов выпуска продукции при росте инвестиций // *Экономика и управление: научно-практический журнал*. № 1.

Бронштейн Е.М., Черняк Д.А. (2005). Сравнительный анализ показателей эффективности инвестиционных проектов // *Экономика и мат. методы*. Т. 41. № 2.

Виленский П.Л., Лившиц В.Н., Смоляк С.А. (2001). Оценка эффективности инвестиционных проектов: теория и практика. М.: Дело.

Выгодский М. Я. (2005). Справочник по высшей математике. М.: Астрель, АСТ.

Горелик А.А., Горелов М.А., Кононенко А.Ф. (1991). Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. М.: Радио и связь.

Журавлев Ю.В. (2004). Проблемы инвестирования промышленного бизнеса // *Экономика и производство*. № 2.

Методические рекомендации (2000). Методические рекомендации по оценке эффективности инвестиционных проектов. М.: Экономика.

Мартынов Г.В., Малков У.Х. (2011). Развитие межотраслевой модели воспроизводственной и инвестиционной динамики // *Экономика и мат. методы*. Т. 47. № 2.

Овчинникова Т.И., Ворохобин Д.А. (2010). Динамика и факторы развития региона // *Современная экономика: проблемы и решения.* Т. 11. № 11.

Преображенская Н.В., Семенова А.А. (2011). Оценка экономической эффективности инновационно-инвестиционных проектов // *Микроэкономика*. № 3.

Протопопова А.А. (2011). Особенности инвестиционных вложений в информационно-техническую инфраструктуру с точки зрения проектного анализа // *Микроэкономика*. № 3.

Поступила в редакцию
10.11.2011 г.

Terms of Choosing Best Schedule of Two Investment Schemes

A.M. Akhtyamov

By mathematical modeling four theorems about choosing best investment schedule of the two investment schemes with the same planning horizon and the amount of investment are proved. They can quickly determine which of them will do a larger volume of production in value terms without solving a differential equation. Examples and counterexamples are considered.

Keywords: investment schemes, investment graph, the company production, mathematical modeling.