ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2013, том 49, № 2, с. 106–111

ЗАМЕТКИ И ПИСЬМА

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ТЕОРИИ ГРАФОВ ПРИ АНАЛИЗЕ ИННОВАЦИЙ НА ПРЕДПРИЯТИИ*

© 2013 г. **А.И. Вересков**

(Москва)

1. ЗАДАЧА СОГЛАСОВАНИЯ ИННОВАЦИОННЫХ РЕШЕНИЙ

Приведем формальную постановку задачи, возникающей при оценке реализуемости инновационных проектов на предприятии. Рассмотрим прямоугольную таблицу T размера $M \times N$, в каждой ее ячейке с координатами (m, n) имеется $K_{mn} \geq 1$ элементов (вершин графа). Обозначим их (m, n, k), число $k \in \{1,\ldots, K_{mn}\}$ соответствует номеру вершины внутри ячейки. В каждой строке и каждом столбце таблицы T между вершинами из разных ячеек задано бинарное отношение S, означающее взаимную допустимость элементов и определяющее систему ребер неориентированного графа (T, S)[1]. Так, условие $(1, 2, 5)S(1, 4, 2)$ означает, что элемент 5 ячейки (1, 2) и элемент 2 ячейки (1, 4) совместимы и ребро $[(1, 2, 5), (1, 4, 2)] \in S$ (вершины из одной ячейки несовместимы по определению). Понятие совместимости, а вместе с ним и отношение S, не распространяется на ячейки, не входящие в одну горизонталь или вертикаль (ячейки (1, 1) и (2, 3)). Отношение S симметрично, но не транзитивно: условия $(1, 2, 5)S(1, 4, 2)$ и $(1, 4, 2)S(1, 6, 3)$ не означают, что $(1, 2, 5)S(1, 6, 3)$.

Если в каждой ячейке (m, n) выбрать по одному элементу $k_{mn} \geq 1$ или не выбрать ни одного $k_{mn} = 0$, то в результате образуется числовая матрица τ размера $M \times N$:

$$\tau = ||k_{mn}||, \quad k_{mn} \in \{0,\ldots, K_{mn}\}. \tag{1}$$

Имеет место взаимно-однозначное соответствие между всевозможными матрицами (1) и подмножествами R вершин из T, такими что в R входит не более одной вершины из каждой ячейки (m, n); смысл обозначений $\tau(R)$ и $R(\tau)$ очевиден.

Назовем τ вида (1) *S-матрицей* (согласованной), если условия S выполнены для всех выбранных элементов в каждой строке $m = 1,\ldots, M$:

$$(m, n, k_{mn})S(m, q, k_{mq}) \quad \forall k_{mn}, \;\; k_{mq} \geq 1, \;\; q \neq n, \tag{2}$$

и в каждом столбце $n = 1,\ldots, N$:

$$(m, n, k_{mn})S(p, n, k_{pn}) \quad \forall k_{mn}, \;\; k_{pn} \geq 1, \;\; p \neq m. \tag{3}$$

Существование хотя бы одной S-матрицы, в которой заполнены все MN ячеек ($\forall k_{mn} \geq 1$), свидетельствует о том, что инновационный проект удовлетворительно согласуется с наличной структурой предприятия (изменения, необходимые для осуществления проекта, могут быть реализованы) (Вересков, Зотов, Пономарева и др., 2012, с. 3–14). Если из таблицы T не удается извлечь такой матрицы, то для анализа ситуации окажутся полезны S-матрицы с небольшим числом нулей, указывающих экспертам на “узкие места” в системе “предприятие – инновация”.

Пусть матрица $\tau^2 = ||k^2_{mn}||$ получена из произвольной $\tau^1 = ||k^1_{mn}||$ заменой некоторых $k^1_{mn} \geq 1$ нулями (обозначим ее $\tau^2 \prec \tau^1$), тогда

$$k^2_{mn} \geq 1 \Rightarrow k^2_{mn} = k^1_{mn}; \quad \exists (m, n){:}\; k^1_{mn} \geq 1, \;\; k^2_{mn} = 0. \tag{4}$$

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (проект 12-02-00325А).

[1] Символ T (название таблицы) используется также и для обозначения множества вершин графа; аналогично, S – бинарное отношение и порождаемое им множество ребер.

Если τ^1 – это S-матрица и $\tau^2 \prec \tau^1$, очевидно, что τ^2 также принадлежит классу S, но представляет меньший интерес, чем τ^1, для содержательного анализа, нацеленного на корректировку инновационного проекта (Views Вересков, Зотов, Пономарева и др., 2012). Поэтому сузим класс (2), (3), назвав *М-матрицами* (максимальными) те S-матрицы τ, которые удовлетворяют дополнительному условию:

$$\nexists\ S\text{-матрицы } \tau' \text{ такой, что } \tau \prec \tau'. \qquad (5)$$

Принятые определения имеют параллели в общепринятой терминологии теории графов. *Кликой* называют максимальный полный подграф неориентированного графа, т.е. такой подграф, в котором все вершины попарно связаны ребрами (определение полноты) и который не является частью другого полного подграфа. Существуют алгоритмы, позволяющие отыскать все клики произвольного графа. Покажем, как их можно использовать для построения всех M-матриц τ.

Расширим граф (T, S) до (T, S'), дополнив множество S ребрами

$$[(m, n, k), (t, s, l)] \in S' \backslash S \Leftrightarrow m \neq t, \quad n \neq s, \;\; k = 1, \ldots, K_{mn}; \;\; l = 1, \ldots, K_{ts}. \qquad (6)$$

Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1. *Если τ – это S-матрица, то $R(\tau)$ порождает полный подграф в (T, S'). Верно и обратное утверждение: полному подграфу R соответствует S-матрица $\tau(R)$. Если τ – это M-матрица, то $R(\tau)$ порождает клику в (T, S'); верно и обратное утверждение.*

Первая половина утверждения следует из (2), (3), (6). Вторая – из первой, если заметить, что в силу (4) выражение $\tau \prec \tau'$ эквивалентно включению $R(\tau) \subset R(\tau')$.

Таким образом, построив все клики графа (T, S'), мы получаем описание множества M-матриц таблицы T. Известно, что задача отыскания клик в неориентированном графе может быть сведена к построению максимальных независимых множеств (МНМ) в дополнительном графе.

2. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ МНМ

2.1. Нужный нам алгоритм приведен в (Кристофидес, 1978), однако в его описании и обосновании имеются неточности, которые необходимо исправить[2]. Упростим обозначения, принятые в (Кристофидес, 1978), отождествив вершины неориентированного графа $G(X, \Gamma)$ с их номерами $X = \{1,\ldots,N\}$. Вершины $x \in X$, выбираемые для расширения S_k и обозначенные в тексте алгоритма как x_{i_k}, будем записывать в виде x_k.

Остановимся на определении МНМ (Кристофидес, 1978, с. 44, формулы (3.1), (3.2)). Применительно к графам с петлями эти определения не эквивалентны. Приведем то, которого мы будем придерживаться. Независимым множеством (НМ) называется $S \subseteq X$, если в S не содержится пара вершин, соединенных ребром. МНМ – это такое НМ, которое не является подмножеством другого НМ. В силу этого определения граф $G(X, \Gamma)$ с петлей $X = \{1,2\}$, $\Gamma(x_1) = \{x_2\}$, $\Gamma(x_2) = \{x_1, x_2\}$ содержит два МНМ: $\{1\}$ и $\{2\}$. Рассматриваемый алгоритм вырабатывает именно эти множества. Наличие петель не влияет на ход алгоритма: если из графа удалить петли, то совокупность МНМ от этого не изменится.

Алгоритм построения МНМ (Кристофидес, 1978).

Шаг 1. Положим $S_0 = Q_0^- = \varnothing$, $\quad Q_0^+ = X$, $\;\; k = 0$.

Шаг 2 (шаг расширения). Выбираем x_k, следуя одному из двух правил (два варианта алгоритма): $AL1$ – выделяем произвольную вершину $x_k \in Q_k^+$; $AL2$ – находим $x^* \in Q_k^-$ с минимальным значением показателя $|\Gamma(x) \cap Q_k^+|$ и выбираем $x_k \in \Gamma(x^*) \cap Q_k^+$. Формируем S_{k+1}, Q_{k+1}^-, Q_{k+1}^+, оставляя Q_k^-, Q_k^+ нетронутыми:

$$S_{k+1} = S_k \cup \{x_k\}, \;\; Q_{k+1}^- = Q_k^- \backslash \Gamma(x_k), \;\; Q_{k+1}^+ = Q_k^+ \backslash (\{x_k\} \cup \Gamma(x_k)).$$

Положим $k = k + 1$.

[2] Считая, что читатель знаком с исходным текстом, мы цитируем его лишь по мере надобности. Отметим прежде всего очевидные опечатки. В начале разд. 2.3.1 формулу $S_k \cap Q_k = \varnothing$ следует читать как $(S_k \cup \Gamma(S_k)) \cap Q_k = \varnothing$, в конце раздела вместо $Q_k^- = \varnothing$ должно быть $Q_0^- = \varnothing$.

Шаг 3 (проверка 1). Если удовлетворяется условие

$$\exists x \in Q_k^-: \Gamma(x) \cap Q_k^+ = \varnothing, \tag{7}$$

то переходим к шагу 5, иначе – к шагу 4.

Шаг 4 (проверка 2). Если $Q_k^+ = Q_k^- = \varphi$, то S_k – МНМ; переходим к шагу 5.

Если $Q_k^+ = \varnothing,\ Q_k^- \neq \varnothing$, то также переходим к шагу 5, иначе – к шагу 2.

Шаг 5 (возвращение). Положим $k = k - 1$. Удалим x_k из S_{k+1}, чтобы получить S_k. Исправим Q_k^- и Q_k^+, удалив x_k из Q_k^+ и добавим ее к Q_k^-. Если $k = 0$ и $Q_k^+ = \varnothing$, то алгоритм прекращает работу (т.е. к этому моменту все МНМ построены), иначе переходим на шаг 3.

Вариант $AL2$ (частный случай по отношению к $AL1$) нацелен на уменьшение числа итераций, необходимых для завершения работы алгоритма.

Пример 1. Приведем протокол работы $AL2$ в графе с $X = \{1, \ldots, 5\}$, $\Gamma = \{(i, i+1), i = 1, \ldots, 4\}$:

$$\begin{gathered}
S_0 = Q_0^- = \varnothing,\ \ Q_0^+ = \{1, \ldots, 5\},\ \ k = 0;\\
x_0 = 3,\ \ S_1 = \{3\},\ \ Q_1^- = \varnothing,\ \ Q_1^+ = \{1, 5\},\ k = 1;\\
x_1 = 5,\ \ S_2 = \{3, 5\},\ \ Q_2^- = \varnothing,\ \ Q_2^+ = \{1\},\ k = 2;\\
x_2 = 1,\ \ S_3 = \{3, 5, 1\} \text{ – МНМ},\ \ Q_3^- = Q_3^+ = \varnothing,\ k = 3;\\
k = 2,\ \ S_2 = \{3, 5\},\ \ Q_2^- = \{1\},\ Q_2^+ = \varnothing;\\
k = 1,\ \ S_1 = \{3\},\ \ Q_1^- = \{5\},\ Q_1^+ = \{1\};\\
k = 0,\ \ S_0 = \varnothing,\ \ Q_0^- = \{3\},\ Q_0^+ = \{1, 2, 4, 5\};\\
x_0 = 2,\ \ S_1 = \{2\},\ \ Q_1^- = \varnothing,\ Q_1^+ = \{4, 5\},\ \ k = 1;\\
x_1 = 4,\ \ S_2 = \{2, 4\} \text{ – МНМ},\ \ Q_2^- = Q_2^+ = \varnothing,\ \ k = 2;\\
k = 1,\ \ S_1 = \{2\},\ \ Q_1^- = \{4\},\ \ Q_1^+ = \{5\};\\
x_1 = 5,\ \ S_2 = \{2, 5\} \text{ – МНМ},\ \ Q_2^- = Q_2^+ = \varnothing,\ \ k = 2;\\
k = 1,\ \ S_1 = \{2\},\ \ Q_1^- = \{4, 5\},\ \ Q_1^+ = \varnothing;\\
k = 0,\ \ S_0 = \varnothing,\ \ Q_0^- = \{3, 2\},\ \ Q_0^+ = \{1, 4, 5\};\\
x_0 = 1,\ \ S_1 = \{1\},\ \ Q_1^- = \{3\},\ \ Q_1^+ = \{4, 5\},\ \ k = 1;\\
x_1 = 4,\ \ S_2 = \{1, 4\} \text{ – МНМ},\ Q_2^- = Q_2^+ = \varnothing,\ \ k = 2;\\
k = 1,\ \ S_1 = \{1\},\ \ Q_1^- = \{3, 4\},\ \ Q_1^+ = \{5\};\\
k = 0,\ \ S_0 = \varnothing,\ \ Q_0^- = \{3, 2, 1\},\ \ Q_0^+ = \{4, 5\}.
\end{gathered} \tag{8}$$

Все МНМ построены, однако критерий $k = 0\ \&\ Q_0^+ = \varnothing$ (прекращения работы алгоритма) не выполнен. Согласно алгоритму необходимо перейти на шаг 3, где $\Gamma(1) \cap Q_0^+ = \varnothing$, затем – на шаг 5 при $k = 0$. Индекс k обращается в –1, и все рекуррентные определения теряют смысл. При описании алгоритма не учтено, что и после построения всех МНМ возможно $Q_0^+ \neq \varnothing$.

Приведенный пример не является чем-то исключительным, он допускает различные обобщения. Пусть, например, $X = \{1, 2, X'\}$, где X' – произвольное множество вершин, а $\Gamma(1) = \{2\}$; при этом безразлично, будет ли $\Gamma(2) \cap X' = \varnothing$. Здесь и в дальнейшем будем нумеровать вершины x_0 в порядке их использования алгоритмом. Если $x_0^1 = 1$, $x_0^2 = 2$, то после построения всех МНМ окажется, что $Q_0^- = \{1, 2\}$, $Q_0^+ = X'$, $\Gamma(1) \cap Q_0^+ = \varnothing$, и снова $k = -1$.

В дальнейшем мы убедимся, что критерий прекращения работы алгоритма можно сформулировать следующим образом:

$$k = 0\ \&\ (Q_0^+ = \varnothing \vee (\exists x \in Q_0^- : \Gamma(x) \cap Q_0^+ = \varnothing)). \tag{9}$$

Далее, обоснование алгоритма существенно опирается на следующее **положение**: множество Q_k^- состоит из тех вершин, которые уже использовались для расширения множеств[3] S_k. **Ошибочность** этого положения обнаруживается на шаге (8): вершина $3 \in Q_1^-$ не использовалась указанным образом, она была взята лишь для расширения S_0. Вершины 1 и 3 входили в $S_3 = \{3, 5, 1\}$, но наличие S_3 вида $\{3, p, 1\}$, вообще говоря, не позволяет корректно провести рассуждение, предложенное в (Кристофидес, 1978). Уточнять цитированное утверждение и с его помощью давать обоснование алгоритма было бы слишком сложно, поэтому мы пойдем иным путем.

2.2. Пусть $\langle Y \rangle$ – подграф графа $G(X, \Gamma)$, порожденный множеством $Y \subseteq X$, $\langle X \rangle = G(X, \Gamma)$; $\Sigma(Y)$ – совокупность МНМ графа $\langle Y \rangle$, $\Sigma(\varnothing) = \varnothing$. Наша цель доказать, что $AL1$ (а значит, и его частный случай $AL2$) вырабатывает $\Sigma(X)$. Поясним ход дальнейших рассуждений, используя граф с $X = \{1, \ldots, 4\}$, $\Gamma = \{(i, i+1),\ i = 1, 2, 3\}$.

Пример 2. Пусть работа $AL1$ начинается с $x_0^1 = 1$.

Этап I. Далее выявляются МНМ подграфа $\langle Q_1^+ \rangle = \langle X \setminus \{1, 2\} \rangle = \langle \{3, 4\} \rangle$, т.е. $\{3\}$ и $\{4\}$; добавляя их к $S_1 = \{1\}$, $AL1$ строит МНМ $\{1, 3\}$, $\{1, 4\} \in \Sigma(X)$.

Этап II. Затем алгоритм формирует $Q_0^+ = X \setminus \{1\} = \{2, 3, 4\}$ и переходит к анализу подграфа $\langle Q_0^+ \rangle$, полагая $Q_0^- = \{1\}$. Очевидно, что $\Sigma(Q_0^+) = \{2, 4\} \cup \{3\}$, причем $\{2, 4\} \in \Sigma(X)$, $\{3\} = \Sigma(Q_0^+) \setminus \Sigma(X)$. Если $x_0^2 = 3$, $x_0^3 = 2$, то согласно правилам шагов 3, 4, $AL1$ не идентифицирует $\{3\}$ как МНМ из $\Sigma(X)$ и, напротив, включает $\{2, 4\}$ в $\Sigma(X)$.

Легко обосновать следующее свойство множеств $\Sigma(\cdot)$.

Утверждение 2. *Если* $A, B \subseteq X$, *то*

$$A \supset B \Rightarrow \{\sigma\colon \sigma \in \Sigma(A), \sigma \subseteq B\} \subseteq \Sigma(B). \tag{10}$$

В дальнейшем, не теряя общности, будем считать, что $x_0^1 = 1$, тогда

$$S_1 = \{1\},\ Q_1^- = \varnothing,\ Q_1^+ = X \setminus (\{1\} \cup \Gamma(1)). \tag{11}$$

Разобьем $\Sigma(X)$ на два множества $\Sigma_1(X) = \{\sigma\colon 1 \in \sigma\} \neq \varnothing$, $\Sigma_2(X) = \Sigma(X) \setminus \Sigma_1(X) = \{\sigma\colon 1 \notin \sigma\}$ и заметим, что любое из множеств Q_1^+, $\Gamma(1)$, $\Sigma_2(X)$ может оказаться пустым. Установим нужные нам свойства $\Sigma_1(X)$, $\Sigma_2(X)$.

Пусть $\sigma \in \Sigma_1(X)$, тогда, учитывая (10), получаем

$$\sigma = \{1\} \cup S \Rightarrow S \cap \Gamma(1) = \varnothing \Rightarrow S \subseteq Q_1^+ \Rightarrow S \in \Sigma(Q_1^+). \tag{12}$$

Верно и обратное:

$$S \in \Sigma(Q_1^+) \Rightarrow S \cap \Gamma(1) = \varnothing,\ 1 \notin S \Rightarrow (\{1\} \cup S) \in \Sigma(X) \Rightarrow (\{1\} \cup S) \in \Sigma_1(X); \tag{13}$$

здесь использовано обстоятельство, согласно которому $\{1\} \cup S$ нельзя расширить до НМ за счет добавления $x \in Q_1^+$ или $x \in \Gamma(1)$.

Утверждение 3.

$$\sigma \in \Sigma_2(X) \Leftrightarrow (\sigma \cap \Gamma(1) \neq \varnothing,\ \ \sigma \in \Sigma(X \setminus \{1\})), \tag{14}$$

в частности,

$$\Sigma_2(X) \subseteq \Sigma(X \setminus \{1\}). \tag{15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего для $\sigma \in \Sigma_2(X)$ верно $\sigma \cap \Gamma(1) \neq \varnothing$. Действительно, если $\sigma \cap \Gamma(1) = \varnothing$, то $\sigma \cup \{1\}$ – НМ, что противоречит включению $\sigma \in \Sigma(X)$. Далее, с учетом (10) имеем $\sigma \in \Sigma_2(X) \Rightarrow 1 \notin \sigma \Rightarrow \sigma \subseteq (X \setminus \{1\}) \Rightarrow \sigma \in \Sigma(X \setminus \{1\})$.

Обратно: соотношения в правой части (14) показывают, что $\sigma \cup \{1\}$ и $(\sigma \cup \{x\})\, \forall x \in (X \setminus \{1\})$ не образуют НМ, значит, $\sigma \in \Sigma(X)$, т.е. $\sigma \in \Sigma_2(X)$. Резюмируя сказанное, убеждаемся в справедливости утверждения 3.

---

[3] Здесь в (Кристофидес, 1978) допущена неточность перевода: из контекста ясно, что речь идет лишь о *текущем* множестве S_k, а не о тех S_k, которые встречались ранее (в английском тексте to augment S_k).

Теорема. *$AL1$ с критерием прекращения работы* (9) *строит все МНМ из* $\Sigma(X)$ *и только их.*

Доказательство проведем индукцией по числу $|X|$. Основанием индукции служит граф с $|X| = 1$, протокол работы $AL1$ таков: $S_0 = Q_0^- = \varnothing$, $Q_0^+ = \{1\}$, $k = 0$; $x_0^1 = 1$, $S_1 = \{1\}$ – МНМ; $Q_1^- = Q_1^+ = \varnothing$, $k = 1$; шаг 5: $k = 0$, $S_0 = Q_0^+ = \varnothing$, $Q_0^- = \{1\}$, прекращение работы алгоритма согласно правилу $k = 0 \,\&\, Q_0^+ = \varnothing$. С учетом соотношения $\Sigma(X \setminus \{1\}) = \Sigma(\varnothing) = \varnothing$ убеждаемся, что утверждение теоремы верно.

При $|X| \geq 2$ работа $AL1$ начинается с выбора $x_0^1 = 1$ и формирования (11). На этапе I строятся МНМ вида $\{1\} \cup S$, причем, учитывая (12), (13), имеем $(\{1\} \cup S) \in \Sigma_1(X) \Leftrightarrow S \in \Sigma(Q_1^+)$.

Легко проследить, что вершины $x \notin Q_1^+$ (в частности, $x_0^1 = 1$) не оказывают влияния на формирование множеств S; анализ подграфа $\langle Q_1^+ \rangle$ идет "по стандартной схеме" – так, как если бы он рассматривался сам по себе, вне связи с объемлющим графом $G(X, \Gamma)$. Поскольку $|Q_1^+| < |X|$, заключаем по индукции, что $AL1$ построит все $S \in \Sigma(Q_1^+)$, т.е. множество $\Sigma_1(X)$.

Затем $AL1$ заносит $x = 1$ в Q_0^- и формирует подграф $\langle Q_0^+ \rangle$: $\langle Q_0^+ \rangle = \langle X \setminus \{1\} \rangle = \langle \Gamma(1) \cup Q_1^+ \rangle$. Если $\Gamma(1) = \varnothing$, работа алгоритма на этом завершается по критерию (9): $k = 0 \,\&\, (1 \in Q_0^-,\ \Gamma(1) \cap Q_0^+ = \varnothing)$. В противном случае $AL1$ переходит к этапу II, т.е. к построению МНМ в $\langle Q_0^+ \rangle$, при этом $Q_0^- = \{1\}$.

Если бы на этапе II в качестве начального условия было выбрано $Q_0^- = \varnothing$ (назовем это вариантом $AL3$, он совпадает с применением $AL1$ к $\langle X \setminus \{1\} \rangle$), то, как и выше, можно было бы заключить по индукции, что алгоритм построит множество $\Sigma(X \setminus \{1\}) \supseteq \Sigma_2(X)$ (см. (15)). При этом равенства $Q_k^- = Q_k^+ = \varnothing$ служат в $AL3$ критерием для включения S_k в $\Sigma(X \setminus \{1\})$, а прекращение работы алгоритма происходит согласно (9).

Единственное отличие $AL1$ от $AL3$ заключается в дополнительном правиле: если на шаге 3 выполнено (7) для x=1, т.е.

$$1 \in Q_k^- \,\&\, Q_k^+ \cap \Gamma(1) = \varnothing, \tag{16}$$

то $AL1$ переходит к шагу возвращения. (Попутно отметим, что условие (7) дублируется, причем без всякой надобности, на шаге 4 в виде $Q_k^- \neq \varnothing$, $Q_k^+ = \varnothing$.) Нам нужно сравнить работу двух алгоритмов и установить, что $AL1$ построит все $S_k \in \Sigma_2(X)$ и отвергнет остальные $S_k \in \Sigma(X \setminus \{1\})$.

Обратим внимание, что все исследуемые алгоритмы не задают однозначно ход построения МНМ: при программной реализации правило "для добавления к S_k можно выбирать любую вершину $x_k \in Q_k^+$" следует конкретизировать ($AL2$ указывает лишь направление такой конкретизации). При рассмотрении $AL3$ не использовались какие-либо дополнительные предположения о выборе $x_k \in Q_k^+$, отличающиеся от правил $AL1$; для обоснования $AL1$ достаточно проследить за соответствием между возможными траекториями $\{x_k\}$, вырабатываемыми $AL1$ и $AL3$.

Отметим следующие обстоятельства: содержимое Q_k^- не влияет на выбор x_k в $AL1$, $AL3$ на шаге расширения; на шаге возвращения правила $AL1$ и $AL3$ идентичны и также не зависят от $x \in Q_k^-$. Если на некоторой итерации множества S_k, Q_k^+ для $AL1$ совпадают с аналогичными множествами в $AL3$, то любой вариант выбора x_k в $AL1$ может быть реализован и в $AL3$. При одинаковом выборе x_k шаг 2 приведет к формированию одинаковых S_{k+1}, Q_{k+1}^+; Q_{k+1}^- могут совпадать или, как и Q_k^-, отличаться наличием/отсутствием $x = 1$. Сказанное относится и к шагам возвращения – к тем, которые не связаны с правилом (16).

Что же касается итераций $AL3$, отсутствующих в $AL1$, то на них $AL3$ строит некоторое число МНМ $\bar{\sigma} \in \Sigma(X \setminus \{1\})$. Ниже будет показано, что $\bar{\sigma} \notin \Sigma_2(X)$. Очевидно следующее: после построения указанных $\bar{\sigma}$ и соответствующих шагов возвращения $AL3$ вернется в то же состояние S_k, Q_k^+, Q_k^-, что и на итерации, которая привела к расхождению $AL1$ и $AL3$ ввиду (16).

Далее проследим за выполнением критерия $Q_k^- = Q_k^+ = \varnothing$ в $AL1$ при условии, что на некоторой итерации он выполнен в $AL3$. Напомним, что в $AL1$ $1 \in Q_0^-$; вершина $x = 1$ исключается из Q_l^-, $l < k$, при формировании Q_{l+1}^-, если и только если $x_l \in \Gamma(1)$. Это означает, что в $AL1$ указанный критерий опознает $S_k \in \Sigma(X \setminus \{1\})$ как МНМ из $\Sigma_2(X)$, если $1 \notin Q_k^- \Leftrightarrow S_k \cap \Gamma(1) \neq \varnothing$

(утверждение 3), и напротив, отвергнет $S_k \in \Sigma(X \setminus \{1\}) \setminus \Sigma_2(X)$, поскольку для таких S_k верно $S_k \cap \Gamma(1) = \varnothing \Leftrightarrow 1 \in Q_k^-$.

Ясно также, что критерий (9), по которому происходит прекращение работы алгоритма в $AL3$, корректен и для $AL1$. Действительно, Q_0^+ в $AL3$, $AL1$ совпадают, а наличие в варианте $AL3$ вершины $\bar{x} \in Q_0^-: \Gamma(\bar{x}) \cap Q_0^+ = \varnothing$ влечет за собой $\bar{x} \in Q_0^-$ и в $AL1$.

Для завершения доказательства теоремы остается установить, что при выполнении (16) переход $AL1$ к шагу возвращения не приведет к потере $\sigma \in \Sigma_2(X)$. Действительно, $1 \in Q_k^-$ означает, что $S_k \cap \Gamma(1) = \varnothing$; в сочетании с $Q_k^+ \cap \Gamma(1) = \varnothing$ это гарантирует, что любое возможное расширение S_k за счет вершин из Q_k^+ также будет обладать свойством $S_{k+p} \cap \Gamma(1) = \varnothing$, т.е. в силу утверждения 3, $S_{k+p} \notin \Sigma_2(X)$. ■

2.3. Сделаем несколько заключительных замечаний. Критерий $Q_k^- = Q_k^+ = \phi$ для $S_k \in \Sigma(X)$, обоснованный в (Кристофидес, 1978) с использованием ошибочного положения из п. 2.1, при нашем ходе рассуждений не нуждается в отдельном доказательстве: в $AL1$ заложен именно этот критерий, а корректность $AL1$ уже доказана.

Приведем утверждение, важное для понимания хода алгоритма.

Утверждение 4. *После построения $S_k = \{x_0, \ldots, x_{k-1}\}$ и до перехода на шаге возвращения к S_{k-1}, $AL1$ завершает формирование всех МНМ, являющихся расширениями S_k, т.е. имеющих вид $\{x_0, \ldots, x_{k-1}, \ldots, x_l\}$.*

Доказательство проведем индукцией по k. Если $k = 1$, то $S_1 = \{x_0^p\}\ \forall p$ лежит в основании цепочки шагов расширения и возвращения. Затем, на некоторой итерации, вершина x_0^p заносится в Q_0^-. После этого она не может быть использована для построения новых МНМ. Как устанавливает теорема, $AL1$ строит все $\sigma \in \Sigma(X)$, значит, к указанному моменту окажутся построены все МНМ вида $\{x_0^p, \ldots, x_l\}$.

Пусть утверждение верно для $k = q$, $S_q = \{x_0^p, \ldots, x_{q-1}\}$, докажем его для $k = q+1$, $S_{q+1} = S_q \cup x_q$. Предположим, что МНМ $S_{l+1} = \{x_0^p, \ldots, x_q, \ldots, x_l\}$ не будет построено до перехода от S_{q+1} к S_q, т.е. до занесения x_q в Q_q^-; однако после этого момента S_{l+1} уже не удастся получить как расширение S_q, что противоречит предположению индукции. ■

Как следствие из утверждения 4, приведем еще одно замечание. Пусть шаг расширения привел к построению $\bar{S}_k = \{x_0^{p+r}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{k-1}\}$, при этом возможно, что некоторые $x \in \bar{S}_k$ входили в построенные ранее $\sigma \in \Sigma(X)$. Действительно, если $\bar{S}_k \not\subset \Gamma(x_0^p)$, то всякое МНМ вида $\{x_0^p, x_0^{p+r}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{k-1}, x_k, \ldots, x_l\}$ было построено ранее как расширение $S_1 = \{x_0^p\}$.

Наконец, последнее замечание, оно касается $AL2$. Сказанное в (Кристофидес, 1978) об эффективности $AL2$ сравнительно с $AL1$ стоит дополнить следующим соображением. Пусть $x_0^1 = 1$, тогда к началу этапа II $Q_0^- = \{1\}$. Выбрав $x_0^2 \in Q_0^+ \cap \Gamma(1)$ и получив $S_1 = \{x_0^2\}$, $AL2$ обеспечивает свойство $S_l \cap \Gamma(1) \neq \varnothing$, $l \geq 1$, и тем самым исключает из рассмотрения траектории, приводящие к образованию $\sigma \in \Sigma(X \setminus \{1\}) \setminus \Sigma_2(X)$ (см. утверждение 3). Отметим также, что обоснование корректности $AL2$ было бы менее громоздким, чем для $AL1$. Наш интерес к $AL1$ вызван прежде всего тем, что для практических задач небольшого размера (Вересков, Зотов, Пономарева и др., 2012) вопросы быстродействия не играют существенной роли, а программная реализация $AL1$ для этого класса задач ощутимо проще, чем реализация $AL2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Вересков А.И., Зотов В.В., Пономарева О.С. и др. (2012). Институциональные аспекты инновационных решений на предприятиях // *Экономика и мат. методы.* Т. 48. № 2.

Кристофидес Н. (1978). Теория графов: алгоритмический подход. М.: Мир.

Поступила в редакцию
11.10.2012 г.