

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

СБАЛАНСИРОВАННОСТЬ, ОПТИМАЛЬНОСТЬ И ЭКОНОМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ В ОТКРЫТЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМАХ*

© 2013 г. В.Г. Медницкий, Ю.В. Медницкий

(Москва)

При математическом моделировании экономического равновесия различие между валовой продукцией производства и ее товарной составляющей обычно игнорируется, что не вполне правильно. Показано, что использование леонтьевской модели при формировании равновесия типа Эрроу–Дебре приводит к рынку товарной продукции, экономическое равновесие которого существует, если леонтьевская матрица продуктивна, а вектор цен на все включенные в нее виды продукции полуположительный. Денежная стоимость (в ценах равновесия) той части товарной продукции, на которую в равновесии возникает потребительский спрос, всегда будет положительной.

Ключевые слова: экономическое равновесие, полуположительные цены, леонтьевская модель, продуктивность.

ВВЕДЕНИЕ

Во всех известных математических моделях экономического равновесия *валовая* и *товарная* продукция не различаются, хотя производится именно валовая продукция, а до конечных потребителей, как правило, доходит только ее часть, которая здесь для краткости будет называться товарной продукцией. Она может создаваться на разных уровнях организации производства: от предприятия до народного хозяйства в целом (Немчинов, 1965). Наиболее просто различие между этими двумя видами продукции формализуется в леонтьевской модели (Леонтьев, 1990), которую обычно, хотя это и не совсем верно, отождествляют с системой алгебраических уравнений

$$x_i - \sum_j a_{ij} x_j = z_i; \quad i, j \in I, \quad (1)$$

где переменными x_i , z_i , $i \in I$ должны быть определены объемы производства валовой и товарной продукции, а элементами множества I – наименования видов валовой продукции, которыми формируется квадратная матрица¹ $\|a_{ij}\| = A \geq 0$.

В работах (Медницкий В., Медницкий Ю., Леонов; 2009; Медницкий В., Медницкий Ю., Фаттахов, 2011) было показано, что равновесие типа Эрроу–Дебре (Карлин, 1963) может быть создано при добавлении равенств (1) к некоторому другому набору моделей, описывающих производственные возможности рассматриваемой системы² и процессы реализации произведенной ею товарной продукции. Оказалось, однако, что при этом становятся возможными оптимальные решения (в многокритериальном случае – равновесия) еще двух типов. В первом возникают нулевые цены и доходы, и, соответственно, планирование объемов производства продукции осуществляется не по экономическим критериям, а по критериям, которыми руководствуются лица, принимающие такие решения. Во втором типе решений существует положительный вектор цен,

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-01-00893а) и Российского гуманитарного научного фонда (проект 11-02-00149а).

¹ Неравенство $A \geq 0$ означает, что у матрицы A нет отрицательных элементов, а если $A > 0$, то все они положительны и матрица A называется *полуположительной*, если $A \geq 0$, но положительны некоторые из ее элементов. Векторы при этом рассматриваются как матрицы с одной (одним) строкой (столбцом).

² В дальнейшем для краткости она будет называться *объединением предприятий*.

определенный с точностью до произвольного положительного множителя, при котором добавленная стоимость единицы продукции во всех технологических процессах ее производства принимает отрицательные значения. По известной теореме выпуклого анализа (Рокафеллар, 1973) в этом случае у системы (1) – если рассматривать ее как однородную относительно векторов x , z – полуположительных решений не существует, а единственным, причем не только допустимым, но и при некоторых дополнительных предположениях (Медницкий В., Медницкий Ю., Фаттахов, 2011) оптимальным оказывается тривиальное решение $x = z = 0$. Следующее ниже определение вносит необходимое уточнение.

Определение 1. *Экономическим* будем называть равновесие типа Эрроу–Дебре, при котором полуположительны цены на все виды продукции и значения добавленной стоимости во всех технологических процессах ее производства, а денежная стоимость (в ценах равновесия) всей реализуемой в равновесии товарной продукции положительная.

Цель же настоящей работы заключается в выявлении факторов, обеспечивающих не только существование такого равновесия, но и сбалансированность, а также локальную оптимальность объемов производства и потребления всех видов продукции с учетом возможности импортных поставок.

СБАЛАНСИРОВАННОСТЬ РЕШЕНИЙ

Поскольку матрица A квадратная, то двойственная (1) система уравнений может быть представлена в виде

$$p_j - \sum_i p_i a_{ij} = w_j, \quad i, j \in I, \quad (2)$$

причем ее тоже можно рассматривать как однородную относительно векторов p , w . Любое из таких решений будем называть *сбалансированным* (в соответствующей системе уравнений). В связи с этим оказываются справедливыми следующие утверждения.

Теорема 1. *Если пары x , z и p , w сбалансированы в (1), (2), то для четверки этих векторов выполняется равенство*

$$pz = wx, \quad (3)$$

а если при этом еще и A , p , $x \geq 0$, то

$$\forall i \in I: \begin{cases} z_i > 0 \Rightarrow x_i > 0, \\ w_i > 0 \Rightarrow p_i > 0. \end{cases} \quad (4)$$

Равенства $pz = p(E - A)x = wx$ нетрудно получить из (1), (2), а условия (4) следуют из неравенств $x \geq z$ и $p \geq w$ (например, если x , $A \geq 0$, то $x = Ax + z \geq z$ и т.д.).

Следует, однако, заметить, что поскольку неравенства p , x , $A \geq 0$ гарантируют лишь выполнение условий (4), то при подстановке в (1) и (2) каких-то конкретных значений векторов x , $p \geq 0$ у векторов z , w могут появиться как положительные и нулевые, так и отрицательные компоненты. В последнем случае абсолютные значения произведений $w_j x_j$ и $p_i z_i$ естественно интерпретировать как дополнительные расходы, возникающие при производстве (или закупках) соответствующих видов продукции в тех объемах, которые необходимы для устранения балансовых дефицитов. Следовательно, в (2) строятся такие *цены* p_i , $i \in I$, при которых денежная стоимость товарной продукции всегда совпадает с созданной в том же производственном процессе добавленной стоимостью с учетом дополнительных расходов, которые могут появиться в обеих частях равенства (3). Однако при этом выполняются два весьма важных с экономической точки зрения утверждения.

Следствие 1. *Если вектор $p \geq 0$, а в равенстве (3) $wx > 0$, то вектор $p \neq 0$, а стоимость в ценах p_i , $i \in I$, всей производимой товарной продукции $p\tilde{y} > 0$. Баланс же между объемами производства валовой продукции и потребительского спроса на все виды товарной продукции может быть построен с помощью соотношений*

$$u + (E - A)x \geq y; \quad u, x, y \geq 0, \quad (5)$$

где вектором u формируются такие объемы импорта, при которых удовлетворяется определенный компонентами вектора y спрос на все виды товарной продукции.

Для доказательства достаточно заметить, что в (1) объемы собственного производства товарной продукции естественно определить, полагая $\tilde{y}_i = \max[0, z_i]$, $i \in I$, а объемы балансового дефицита – величинами $\tilde{u}_i = \max[0, -z_i]$, $i \in I$. Так как векторы $\tilde{y}, \tilde{u} \geq 0$, а $z = \tilde{y} - \tilde{u}$, то в соответствии с равенством (3) $p\tilde{y} = p\tilde{y} + wx \geq wx > 0$. Теперь соотношения $y \leq u + z = (u - \tilde{u}) + (z + \tilde{u}) = \tilde{y} + (u - \tilde{u})$ нетрудно получить из (5) и (1). Так как $\forall i \in I: z_i < 0 \Rightarrow (\tilde{u}_i > 0 \ \& \ \tilde{y}_i = 0)$, то входящим в (5) условием $y_i \geq 0$ гарантируется, что $u_i \geq \tilde{u}_i > 0$, а если $z_i \geq 0$, то $\tilde{u}_i = 0 \Rightarrow 0 \leq y_i \leq \tilde{y}_i + u_i$.

Таким образом, в (5) суммарные объемы импорта и производства всех видов валовой продукции сбалансированы с объемами их потребления. Действительно, любой балансовый дефицит, возникающий в (1), балансируется в (5) *компенсирующим* импортом $\tilde{u}_i = -z_i > 0$, а верхняя граница спроса при этом определяется *дополняющим* импортом $u_i - \tilde{u}_i \geq 0$, причем последнее неравенство гарантируется входящим в (5) условием $y \geq 0$. Если $z_i \geq 0$, то объем спроса ограничивается сверху суммой $\tilde{y}_i + u_i \geq 0$, причем выполнение неравенства гарантируется в (5) условиями $\tilde{y}, u \geq 0$.

Такой способ получения сбалансированных объемов валовой и товарной продукции можно назвать *внешним*, поскольку источники, продукцией которых формируется вектор u , в (5) не определены (известно только, что в (1) она не производится). Возможно, однако, и *внутреннее* решение этой проблемы, когда матрица $A \geq 0$ и *продуктивна* в соответствии со следующим определением.

Определение 2 (Гейл, 1963). Квадратная матрица A *продуктивна*, если

$$\exists \bar{x} \geq 0: \bar{x} > A\bar{x}. \quad (6)$$

В той же работе Гейлом показано, что необходимые и достаточные условия продуктивности квадратной матрицы $A \geq 0$ содержатся в следующем утверждении.

Теорема 2. Если квадратная матрица $A \geq 0$, то она *продуктивна* тогда и только тогда, когда матрица $(E - A)^{-1}$ не только существует, но и неотрицательна.

В результате проблема построения полуположительных и сбалансированных в (1), (2) пар векторов x, z и p, w получает *внутреннее* решение, которое удобно сформулировать как одно из следствий теоремы 2.

Следствие 2. Если квадратная матрица $A \geq 0$ и *продуктивна*, то при любых, но фиксированных значениях векторов z, w , каждая из систем (1) и (2) имеет единственное решение x, p . Оно будет полуположительным, если таким же окажется соответствующий ему вектор в паре z, w , или даже положительным, если матрица A неприводима.

Действительно вектор x для любого значения вектора z определен однозначно равенством $(E - A)^{-1}z = x$. Но если $z \geq 0$, то по теореме 2 вектор $x \geq 0$, а значит, по теореме $x \geq z$ и точно так же $-w \geq 0 \Rightarrow p \geq w$. Если, например, вектор x только полуположительный, а вектор $z \geq 0$, то равенство (1) удобно представить в форме

$$\begin{aligned} (E_1 - A_{11})x^1 - A_{12}x^2 &= z^1, \\ -A_{21}x^1 + (E_2 - A_{22})x^2 &= z^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Если $x^1 > 0$, а вектор $x^2 = 0$, то второе из входящих в (7) равенств выполняется только при условиях $z^2, A_{21} = 0$. В силу последнего из них матрица A приводима. Если $z^2, A_{21} = 0$, а вектор $z^1 > 0$, то вектор $x^2 = 0$, а $x^1 > 0$ по теореме 1. Другими словами, если в равенствах (7) $x^1 > 0$, а $x^2 = 0$, то, кроме следующего из теоремы 1 условия $z^2 = 0$, должна быть приводимой и матрица A , а значит, если она неприводима, то вектор $x > 0$. (Относительно вектора p рассуждаем также.)

Определение 3. Полуположительная и в общем случае прямоугольная матрица будет называться *полной*, если полуположительны все ее строки и столбцы.

Лемма 1. Если квадратные матрицы $A, (E - A)^{-1} \geq 0$, то матрица $(E - A)^{-1}$ *полная*.

Действительно, если $A = 0$, то $(E - A)^{-1} = E$, а если матрица A полуположительна, то, по условию леммы и теореме 2, она продуктивна. Так как в этом случае ряд из ее степеней сходится к матрице $(E - A)^{-1}$ (Гейл, 1963), то выполняются условия $(E - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \geq E$. В силу сходимости указанного ряда возникает еще одно замечательное утверждение, полученное Гейлом в той же работе.

Следствие 3. Если квадратная матрица $A \geq 0$ и продуктивна, то при фиксированных в правых частях систем (1) и (2) значениях векторов z , w последовательности векторов x^n , p^n , $n = 0, 1, \dots$, возникающие в процессах

$$x^{n+1} = z + Ax^n, \quad p^{n+1} = p^n A + w, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (8)$$

сходятся к точным решениям систем (1) и (2) x , p .

В силу следствия 3 в производственных системах с продуктивной леонтьевской матрицей должны выживать только сбалансированные в (1) и (2) пары векторов z , $x(z)$ и w , $p(w)$, поскольку при любых, но фиксированных, значениях z , w они, и только они, формируются автоматически в алгоритмах типа (8) после некоторого, вообще говоря, не очень большого числа итераций. Однако во всем предыдущем изложении нет и намека на то, как и можно ли определить устойчивые значения векторов z , w для достаточно больших промежутков времени, а без этого алгоритмы типа (8) теряют смысл. В рамках же модели (1)–(3) с продуктивной матрицей $A \geq 0$ кажется, что оба эти вектора, в силу следствия 2, можно задать как угодно. Причем, как было показано выше, если оба они будут полуположительными, а матрица A – неприводимой, то векторы p , $x > 0$ и денежная стоимость всей произведенной товарной продукции (в векторе $z = \tilde{y}$) будет совпадать с созданной в производстве добавленной стоимостью. Здесь, однако, сразу же возникают вопросы, будет ли при ценах p действительно реализована вся продукция, вошедшая в вектор $z \geq 0$ и какое влияние на этот процесс могут оказать импортные поставки в векторе $u \geq 0$. Другими словами, найдет ли своего потребителя вся продукция, входящая в вектор $y = z + u$?

Чтобы ответить на эти вопросы, надо перейти к анализу всей системы моделей, с помощью которых формируется экономическое равновесие (в смысле определения 1).

КОМПОЗИЦИЯ МАТРИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ ПРЕДПРИЯТИЙ

В конце 1950 – начале 1960-х годов было установлено, что системы матричных моделей можно строить и использовать для совершенствования технологии планирования во всех звеньях народного хозяйства СССР (Немчинов, 1963). В частности, при разработке системы таких моделей для предприятия (Волошин, 1965) было показано, что, кроме равенств (7), в нее должны входить еще два соотношения вида

$$A_{31}x^1 + A_{32}x^2 = u, \quad (9)$$

$$A_{41}x^1 + A_{42}x^2 \leq f, \quad (10)$$

которыми устанавливают потребности предприятия в ресурсах внешнего происхождения и ограничения на объемы его внутренних ресурсов. Разделение вектора x на векторы x^1 , x^2 связано с тем, что типовое предприятие, как правило, состоит из двух производств: основного, на котором создается его товарная продукция, и вспомогательно-обслуживающего, продукция которого задействована только в основном производстве и не выходит за рамки предприятия. Таким образом, теперь решение в равенствах (7) нужно построить в предположениях, что вектор $z^2 = 0$, но матрица A_{21} полная, хотя вся матрица A , формирующая равенства (7), может оказаться даже приводимой (если матрица $A_{12} = 0$). Следующее ниже утверждение выполняется независимо от этого обстоятельства.

Теорема 3. Если в (7), (9), (10) матрицы $A_{mn} \geq 0$, $m \in \{1, 2, 3, 4\}$, $n \in \{1, 2\}$, причем матрица A_{21} полная, а система (7) имеет решение $\bar{x}^1, \bar{x}^2 > 0$ при правых частях $\bar{z}^1 > 0$, $\bar{z}^2 = 0$, то каждое

предприятие на уровне их объединения $l \in L$ может быть представлено вектором объемов производства своей товарной продукции $z^l \geq 0$, с которым формируются соотношения

$$u_i^l = \sum_j a_{ij}^l z_j^l, \quad i \in I_l^1, \quad (11)$$

$$\sum_j f_{ij}^l z_j^l \leq f_i^l, \quad i \in I_l^2, \quad (12)$$

$$z_j^l \geq 0, \quad j \in I_l, \quad l \in L,$$

где $\forall i, j, l: a_{ij}^l, f_i^l \geq 0$, а множества I_l, I_l^1, I_l^2 попарно не пересекаются. Если же, кроме того, по-
 луположительны все столбцы матрицы $A_4 = [A_{41}, A_{42}]$, то $\forall j, l: \max_i f_{ij}^l > 0$.

По теореме 1 вектор $\bar{x}^1 > 0$, а поскольку матрица A_{21} полная, то и вектор $A_{21}\bar{x}^1 > 0$, и в соответствии с (6) и (7) матрица A_{22} продуктивна. Тогда по теореме 2 в равенствах (7) можно положить $\bar{x}^2 = (E_2 - A_{22})^{-1} A_{21}\bar{x}^1$, приводя первое из них к виду $(E_1 - \tilde{A}_{11})\bar{x}^1 = \bar{z}^1 > 0$, где $\tilde{A}_{11} = A_{11} + A_{12}(E_2 - A_{22})^{-1} A_{21}$. Таким образом, матрица $\tilde{A}_{11} \geq 0$ и в соответствии с (6) продуктивна (причем если $A_{12} = 0$, то $\tilde{A}_{11} = A_{11}$). Поэтому, полагая $x^1 = (E_1 - \tilde{A}_{11})^{-1} z^1$, можно привести условия (9) и (10) к виду

$$\tilde{A}z^1 = u, \quad Fz^1 \leq f, \quad z^1 \geq 0, \quad (13)$$

где матрицы $\tilde{A}, F$ определены равенствами

$$\tilde{A} = (A_{31} + A_{32}(E_2 - A_{22})^{-1} A_{21})(E_1 - \tilde{A}_{11})^{-1},$$

$$F = (A_{41} + A_{42}(E_2 - A_{22})^{-1} A_{21})(E_1 - \tilde{A}_{11})^{-1}. \quad (14)$$

В соответствии с (14) входящая в (13) матрица $\tilde{A} \geq 0$, а все столбцы матрицы F будут полуположительными, если это верно для матрицы A_4 .

С экономической точки зрения условия (7), (9), (10) формируются коэффициентами прямых затрат тех видов продукции и ресурсов, которые используются предприятием при производстве определенных в (7) видов валовой продукции, причем значения указанных коэффициентов находятся с помощью некоторой совокупности *прямых измерений* (Волошин, 1965). В соотношениях же (11), (12), как следует из (13), содержатся коэффициенты полных затрат, на значимость которых в экономико-математических исследованиях неоднократно указывал В.С. Немчинов (Немчинов, 1965). В рассматриваемом случае ими определяются затраты тех видов ресурсов, которые необходимы предприятиям для производства указанных во множестве I_l видов товарной продукции, а равенства (14) показывают, что определение значений этих коэффициентов требует применения вычислительных средств матричной алгебры.

В соответствии с (11), (12) все виды товарной продукции и внешних ресурсов для входящих в объединение предприятий определены элементами множеств

$$I^+ = \bigcup_{l \in L} I_l, \quad I^- = \bigcup_{l \in L} I_l^1, \quad (15)$$

а для каждого $i \in I = I^+ \cup I^-$ из множества L можно выделить подмножества (возможно пустые) предприятий L_i^+, L_i^- , производящих этот продукт или использующих его в производстве в качестве ресурса. В связи с этим справедливо следующее утверждение.

Следствие 4. Если построенное в соответствии с (15) множество $I \neq \emptyset$, то

$$\forall i \in I: L_i^+ \cup L_i^- \neq \emptyset, \text{ а } L_i^+ \cap L_i^- = \emptyset. \quad (16)$$

Для доказательства достаточно заметить, что если $i \in I^+$, то $\exists l \in L: i \in I_l$, т.е. $l \in L_i^+$, а значит, $L_i^+ \neq \emptyset$, и точно также $L_i^- \neq \emptyset$, когда $i \in I^-$. Но если $\exists i: L_i^+ \cap L_i^- \neq \emptyset$, то $\exists l \in L: I_l \cap I_l^1 \neq \emptyset$, что уже входит в противоречие с теоремой 4.

В результате для объединения предприятий глобальные балансовые соотношения приводят-ся к виду

$$y_i + \sum_{l \in L} \sum_{j \in I_l} a_{ij}^l z_j^l - \sum_{l \in L_i^+} z_i^l - u_i \leq 0, \quad u_i, \quad y_i \geq 0, \quad i \in I, \quad z_i^l \geq 0, \quad i \in I_l, \quad l \in L, \quad (17)$$

где, как и в (5), величинами $u_i, y_i, i \in I$ будут определены объемы импорта и спроса на товарную продукцию, но уже для объединения в целом. Кроме того, так как величинами z_i^l в соответствии с (7) и (13) будут установлены объемы производства товарной продукции для всех входящих в объединение предприятий, то модель (17) описывает балансовые соотношения, возникающие на двух последовательных уровнях ее производства. Отметим также, что в (17) оба множества L_i^+, L_i^- непусты, когда $I^+ \cap I^- = I_0 \neq \emptyset$, и продуктами $i \in I_0$ формируется внутривыпускной оборот объединения. Если же, например, $I^+ \setminus I_0 = I_1^+ \neq \emptyset$, то $\forall (i \in I_1^+): L_i^- = \emptyset$ и во множестве I_1^+ оказываются только такие виды товарной продукции, которые сразу же входят в товарную продукцию объединения. Аналогично, если $I^- \setminus I_0 = I_2^- \neq \emptyset$, то $\forall (i \in I_2^-): L_i^+ = \emptyset$ и множество I_2^- состоит из наименований тех видов ресурсов, которые не производятся ни одним из входящих в объединение предприятий. В случае же, когда $I_0 = \emptyset$, в (17) возникает горизонтальное объединение предприятий, связанных с потреблением (производством) общего набора ресурсов (видов продукции). Добавляя к (17) условия (12), получаем все соотношения, формирующие матричную модель объединения.

ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ОБЪЕДИНЕНИЯ

В каждом технологическом процессе, входящем в (17), как и должно быть в леонтьевской модели, производится только один продукт, но поскольку один и тот же продукт может производиться различными предприятиями, то в (17) может оказаться несколько способов его производства с различающимися структурами затрат. С учетом этого обстоятельства, прежде чем формировать оптимизационную задачу объединения, его матричную модель целесообразно несколько обобщить и одновременно упростить. Итак, предположим, что в рамках предприятия $l \in L$ каждый продукт $j \in I_l$ производится только в одном технологическом процессе в объеме x_j^l с помощью некоторой совокупности ресурсов $i \in I_{jl}$ с коэффициентами затрат $a_{ij}^l > 0$. Полагая $I_l^1 \cup I_{jl}$, можно сохранить условия (15) при формировании множеств I^+, I^- и, полагая

$a_{ij}^l = 0, i \in I \setminus I_{jl}, j \in I_l, l \in L$, сформировать соотношения

$$y_i + \sum_{l \in L} \sum_{j \in I_l} a_{ij}^l x_j^l - \sum_{l \in L_i^+} x_i^l - u_i \leq 0, \quad u_i, \quad y_i \geq 0, \quad i \in I, \quad (18)$$

где обозначением L_i заменяется L_i^+ , а переменные $u_i, y_i, i \in I$ имеют тот же смысл, что и в (5), но множество I определено в (15). Завершая построение модели, можно было бы к (18) добавить условия (12), но в настоящее время более естественно заменить их более общими условиями

$$x^l \in X_l, \quad l \in L, \quad (19)$$

где X_l – ограниченное, замкнутое и выпуклое множество векторов с неотрицательными компонентами (т.е. содержащее также и нулевой вектор). Критерий же оптимальности этой задачи естественно представить в форме

$$\max \{ \phi(y) - \psi(u) \}, \quad (20)$$

где функцией $\phi(y)$ задана ожидаемая валовая выручка от реализации всей товарной продукции, а функцией $\psi(u)$ – ожидаемые валовые затраты импорта, по существу тех же видов продукции в векторе u .

Для выявления некоторых свойств оптимальных решений этой задачи проведем ее разложение, используя метод Данцига–Вулфа (Цурков, 1981) и рассматривая в качестве связующих ограничений первую из систем неравенств, входящих в (18). Обозначая текущие значения соответствующих им двойственных переменных $q_i, i \in I$, модифицированный в соответствии

с указанным алгоритмом функционал можно представить в форме

$$\max \{ \phi(y) - \psi(u) - q(s - z) \}, \quad (21)$$

где векторы s и z определены равенствами

$$s = y - u, \quad (22)$$

$$z_i = \sum_{l \in L_i} x_i^l - \sum_{l \in L} \sum_{j \in I_l} a_{ij}^l x_j^l, \quad i \in I. \quad (23)$$

Из (21) и (22) получаем две локальные задачи

$$\max_{y \geq 0} \{ \phi(y) - qy \}, \quad (24)$$

$$\max_{u \geq 0} \{ qu - \psi(u) \}. \quad (25)$$

Оставшаяся же часть функционала (21) в соответствии с (23) приводится к виду

$$\sum_{i \in I} q_i z_i = \sum_{l \in L} \sum_{j \in I_l} \left(q_j - \sum_{i \in I} q_i a_{ij}^l \right) x_j^l,$$

позволяя после введения обозначений

$$w_j^l(q) = q_j - \sum_{i \in I} q_i a_{ij}^l, \quad j \in I_l, \quad l \in L. \quad (26)$$

получить для предприятий набор локальных производственных задач

$$\max \{ w^l(q) x^l \mid x^l \in X_l \}, \quad l \in L. \quad (27)$$

С экономической точки зрения величины q_i , $i \in I$ можно интерпретировать как текущие значения цен на все виды продукции и ресурсов, вошедшие в (18). Но тогда в (26) указан способ вычисления текущих значений величин $w_j^l(q)$, с помощью которых во всех технологических процессах, входящих в рассматриваемую производственную систему, определяется добавленная стоимость единицы продукции, а локально-оптимальными для предприятия в задаче (27) поэтому оказываются такие объемы производства валовой продукции, при которых достигается максимум общей ее величины.

Пусть $Y(p)$, $U(p)$, $X_l(p)$, $l \in L$ – множества оптимальных решений задач (24), (25), (27) при некоторых ценах p ,

$$y(p) \in Y(p), u(p) \in U(p), x^l(p) \in X_l(p), \quad l \in L, \quad (28)$$

$z(p)$, Z – образы указанной в (28) совокупности векторов $x^l(p)$, $l \in L$ и всего множества $X = \prod_{l \in L} X_l$

при отображении (23), а множество $\Omega = \{ s \mid \exists z \in Z: s \leq z \}$. Теперь можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 4. Если при некоторых ценах p для векторов $s(p)$ и $z(p)$, построенных в (22) и в (23) с помощью набора векторов из (28), выполняются условия

$$s(p) \leq z(p), \quad p \geq 0, \quad ps(p) = pz(p), \quad (29)$$

то указанный в (28) набор векторов $y(p)$, $u(p)$, $x^l(p)$, $l \in L$ оптимален в задаче (18)–(20). Кроме того, для вектора $z(q)$, построенного в (23) на оптимальных при любом значении вектора цен q решениях $x^l(q)$, $l \in L$ задач (26), (27), выполняется условие

$$qz(q) = \max \{ qz \mid z \in Z \}. \quad (30)$$

Равенство (30) следует непосредственно из соотношений

$$qz(q) = \sum_{l \in L} w^l(q) x^l(q) \geq \sum_{l \in L} w^l(q) x^l = qz, \quad (31)$$

справедливых для любых наборов, оптимальных при ценах q , или же только допустимых решений в задачах (26), (27). Так как в соответствии с (29) указанный в (28) набор векторов допустим в (18), (19), то для него и любых других, допустимых в (18), (19) решений $y, u, x^l, l \in L$, получим $pS(p) = pz(p) = \sum_{l \in L} w^l(p)x^l(p) \geq \sum_{l \in L} w^l(p)x^l = pz \geq pS$. Комбинируя же неравенство $pS(p) \geq pS$ с оптимальными решениями задач (24), (25) при ценах $q = p$, получаем $\phi(y(p)) - \psi(u(p)) \geq \phi(y) - \psi(u) + p(S(p) - S) \geq \phi(y) - \psi(u)$.

Задача (24) рассматривалась П. Самуэльсоном в качестве модели оптимизации потребительского выбора (Самуэльсон, 1964). Суть ее заключается в том, что приобретение товарной продукции в объемах $y_i \geq 0$ по ценам $q_i \geq 0, i \in I$ связано с затратами qy , которые и вычитаются из ожидаемой величины валовой выручки $\phi(y)$. Иначе говоря, в (24) вектор $y(q)$ выбирается так, чтобы максимизировать *чистую выручку*. Модель (25) имеет тот же самый смысл. Но поскольку теперь величины $u_i \geq 0, i \in I$ – это объемы импорта, то ожидаемая величина валовой выручки от его реализации на внутреннем рынке при ценах q будет равна qu , а валовые затраты, как отмечалось ранее, определяются величиной $\psi(u)$.

Как следует из (26), после решения задачи (27) предприятие производит валовую продукцию в объемах, при которых достигает максимума общая величина добавленной стоимости. Однако в силу равенства (30) реализуется своего рода принцип невидимой руки: на совокупности оптимальных планов предприятий достигается максимум денежной стоимости всей произведенной объединением товарной продукции за вычетом компенсирующего импорта, поскольку $qz(q) = q(\tilde{y}(q) - \tilde{u}(q))$.

РАВНОВЕСИЯ ТИПА ЭРРОУ–ДЕБРЕ

Проблемой для оптимизационного подхода всегда оставалась необходимость сравнения допустимых решений по единому критерию. Не является с этой точки зрения исключением и разность, указанная в (20). Теоретически, конечно, можно говорить о функциях, измеряющих экономический эффект (затраты) в зависимости от сочетания объемов различных видов продукции, но как получить такие функции хотя бы для пары десятков наименований товарной (импортируемой) продукции? Как не было ответа на этот вопрос в 1960-е годы, так нет его и в настоящее время, а решение этой проблемы, по-видимому, заключается в переходе к многокритериальной задаче. Здесь же будет использоваться одна из наиболее простых схем такого типа, обобщающая условия (24), (25). Вместо единой функции ϕ рассмотрим их набор $\phi_k, k \in K$, где K – множество различных возможных направлений реализации товарной продукции объединения, и аналогичным образом вместо единой функции ψ определим их семейство $\psi_m, m \in M$, переходя от (24) и (25) к наборам аналогичных задач

$$\max_{y \geq 0} \{ \phi_k(y) - qy \}, \quad k \in K, \quad (32)$$

$$\max_{u \geq 0} \{ qu - \psi_m(u) \}, \quad m \in M. \quad (33)$$

Множества оптимальных решений задач (32), (33) обозначим $Y_k(q), k \in K$ и $U_m(q), m \in M$, а некоторые совокупности элементов этих множеств

$$y^k(q) \in Y_k(q), \quad k \in K, \quad u^m(q) \in U_m(q), \quad m \in M \quad (34)$$

будем называть *распределением* векторов суммарного спроса и импорта

$$y(q) = \sum_{k \in K} y^k(q), \quad u(q) = \sum_{m \in M} u^m(q). \quad (35)$$

Определение 4. Распределение $y^k, u^m \geq 0, k \in K, m \in M$ будем называть *допустимым*, если построенный для него с помощью (35) и (22) вектор $S \in \Omega$. Если же выполняются неравенства

$$0 \leq \phi_k(\bar{y}^k) - \phi_k(y^k), \quad k \in K; \quad 0 \leq \psi_m(u^m) - \psi_m(\bar{u}^m), \quad m \in M, \quad (36)$$

причем хотя бы одно из них – строгое, то будем говорить, что распределение $y^k, u^m, k \in K, m \in M$ может быть улучшено распределением $\bar{y}^k, \bar{u}^m, k \in K, m \in M$ или что оно оптимально по Парето, если любое из улучшающих его распределений недопустимо.

Теперь можно доказать следующее утверждение.

Теорема 5. При ценах $p \geq 0$ совокупностью оптимальных решений задач (26), (27) и (32), (33) формируется равновесие типа Эрроу–Дебре, если для векторов $z(p), \varsigma(p)$, полученных с помощью указанных решений в (23) и (35) и (22), выполняются условия (29).

В соответствии с первым неравенством в (29) распределение, указанное в (34), допустимо, а если с помощью распределения $\bar{y}^k, \bar{u}^m \geq 0, k \in K, m \in M$ его можно улучшить, то в соответствии с (36) и (32), (33) будут выполняться условия

$$0 \geq \phi_k(y^k(p)) - \phi_k(\bar{y}^k) \geq p(y^k(p) - \bar{y}^k), \quad k \in K, \quad (37)$$

$$0 \geq \psi_m(\bar{u}^m) - \psi_m(u^m(p)) \geq p(\bar{u}^m - u^m(p)), \quad m \in M. \quad (38)$$

Суммируя крайние справа члены в неравенствах (37) по k , а в (38) – по m и оба итоговых неравенства друг с другом с учетом (29), получим соотношения $p\bar{s} > p\varsigma(p) = pz(p)$. Неравенство здесь строгое, поскольку таким является, по крайней мере, одно из неравенств в (37) и (38). Но тогда в силу равенства (30) во множестве Z не может быть элемента $\bar{z} \geq \bar{s}$, а значит, $\bar{s} \notin \Omega$.

Таким образом, распределение, указанное в (34), оптимально по Парето и вместе с набором оптимальных в (26) и (27) решений, формирующих вектор $z(p)$ в (23) и (29), создает равновесие того же типа, которое рассматривалось Эрроу–Дебре (Карлин, 1963), полученное, правда, в несколько иной формальной конструкции, чем та, которая использовалась при доказательстве их классической теоремы.

Однако оптимальность по Парето не обязательно означает, что равновесие окажется хорошим. Например, если $p = 0$, то в (32), (33) надо будет искать максимум или минимум каждой из функций $\phi_k, k \in K$, и $\psi_m, m \in M$, на множествах векторов $y, u \geq 0$. Если они достигаются на векторах $y^k, u^m = 0, k \in K, m \in M$, то равновесие формируется любой парой векторов $z(0) > 0 = \varsigma(0)$, так как выполняются условия (29). В силу (26), $w_j^l(0) = 0, j \in I_l, l \in L$, а значит, в задачах (27) оптимальны любые наборы векторов $x^l \in X_l, l \in L$. Если при этом в равенствах (23) можно найти квадратную и продуктивную подматрицу A' , то, полагая $x'(0) = (E - A')^{-1}z(0)$ и при необходимости дополняя вектор $x'(0)$ нулевыми компонентами, получим сбалансированную в (23) пару векторов $x(0), z(0)$, для которой остается так подобрать множитель $\theta > 0$, чтобы выполнилось условие $\theta x(0) \in X$.

Формально в приведенном примере выполнены все условия равновесия, хотя с экономической точки зрения оно выглядит бессмысленным. Тем не менее нечто подобное реализуется при рейдерских захватах предприятий, и поэтому его можно назвать “равновесием рейдеров”.

Однако если $K \supseteq K' \neq \emptyset$ и

$$\forall (k \in K') \exists (\bar{y}^k \geq 0): \phi_k(\bar{y}^k) > \phi_k(0), \quad (39)$$

то определенный в (32), (35) вектор $y(0)$ уже будет полуположительным. Уместно предположить, что при равновесии с вектором $p = 0$ остаются возможными равенства $\psi_m(0) = \min \{\psi_m(u) | u \geq 0\}$, $m \in M$. В этом случае создается спрос на товарную продукцию производства, каждая составляющая которого $y^k(0)$ не просто оптимальна, а обеспечивает безусловный максимум критерия $\phi_k, k \in K$. при полном безразличии к вектору $x(0) \in X$, сбалансированному в (18) и (19) с вектором $y = y(0)$, т.е. к способу его производства. Соответственно, этот тип равновесия можно назвать “равновесием олигархов”. Таким образом, для получения полноценных с экономической точки зрения решений необходимы какие-то дополнительные ограничения.

ЭКОНОМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ

В соответствии с (6), если квадратная матрица $A \geq 0$, то она продуктивна тогда и только тогда, когда система однородных уравнений (1) имеет положительное решение $\bar{x}, \bar{z} > 0$, а исключая

из нее вектор $\bar{z}$, получаем неравенства $\bar{x} > 0$, $(E - A)\bar{x} > 0$, которые означают, что ноль не входит в выпуклую оболочку (Рокафеллар, 1973) строк матрицы³ $[(E - A)^T, E]^T$. По аналогии для обобщенной леонтьевской модели с матрицей $(\Xi - A)$, где $A \geq 0$ и прямоугольная, а Ξ соответствующая ей псевдоединичная⁴, можно предложить такое определение продуктивности.

Определение 5. В леонтьевской модели с различными способами производства одних и тех же продуктов матрица $(\Xi - A)$, продуктивна тогда и только тогда, когда у системы (23) существует положительное решение вида $\bar{z}_i > 0$, $i \in I$; $\bar{x}_j^l > 0$, $j \in I_l$, $l \in L$.

Исключая из (23) переменные $\bar{z}_i$, $i \in I$, для вектора $\bar{\chi}$ с компонентами $\bar{x}_j^l > 0$, $j \in I_l$, $l \in L$ получаем неравенства $\bar{\chi} > 0$, $(\Xi - A)\bar{\chi} > 0$, означающие, что ноль не входит в выпуклую оболочку $\hat{S}$ строк матрицы $S = [(\Xi - A)^T, E]^T$, где E – единичная матрица размерности $N = \sum_{l \in L} |I_l|$. Таким образом, матрица $(\Xi - A)$, непродуктивна, если $0 \in \hat{S}$, и теперь нетрудно получить следующее утверждение.

Лемма 2. Если матрица $(\Xi - A)$ непродуктивна, то существует полуположительный вектор $\bar{p}$, для которого выполняются неравенства

$$\bar{p}_j - \sum_{i \in I} \bar{p}_i a_{ij}^l \leq 0, \quad j \in I_l, \quad l \in L. \quad (40)$$

Действительно, если $0 \in \hat{S}$, то для некоторого полуположительного вектора $(\bar{p}, \bar{\mu})$ с компонентами $\bar{p}_i$, $i \in I$; $\bar{\mu}_j^l$, $j \in I_l$, $l \in L$ будут выполнены равенства

$$\bar{p}_j - \sum_{i \in I} \bar{p}_i a_{ij}^l + \bar{\mu}_j^l = 0, \quad j \in I_l, \quad l \in L. \quad (41)$$

Однако полуположительным в (41) должен быть именно вектор $\bar{p}$, так как $\bar{p} = 0 \Rightarrow \bar{\mu}_j^l = 0$, $j \in I_l$, $l \in L$. Но для полуположительного вектора $\bar{p}$ неравенства (40) следуют из (41), так как $\bar{\mu}_j^l \geq 0$, $j \in I_l$, $l \in L$.

Из леммы 2 нетрудно получить ряд важных с экономической точки зрения следствий.

Следствие 5. Если матрица $(\Xi - A)$ продуктивна, то неравенство

$$\max_{l \in L} \max_{j \in I_l} \{w_j^l(q)\} > 0 \quad (42)$$

выполняется для любого полуположительного вектора цен q .

Если бы для некоторого полуположительного вектора $\bar{p}$ неравенство (42) не выполнялось, то неравенства (40) можно было бы получить, полагая в (26) $p = \bar{p}$, но тогда матрица $(\Xi - A)$ оказалась бы непродуктивной.

Чтобы использовать неравенство (42) при формировании оптимальных решений производственных задач, нужны дополнительные предположения о множестве производственных возможностей $X = \prod_{l \in L} X_l$, которые здесь удобно представить в виде⁵

$$0 \in X \text{ \& } \exists \bar{x} > 0: \bar{x} \in X \text{ \& } \forall x \in X: x \geq x' \geq 0 \Rightarrow x' \in X. \quad (43)$$

Следствие 6. При выполнении условий (43) и продуктивной матрице $(\Xi - A)$ для любого набора оптимальных решений задач (27), полученных при полуположительном значении вектора цен в (26), будут выполнены соотношения

$$w_j^l(q) < 0 \Rightarrow x_j^l(q) = 0, \quad j \in I_l, \quad l \in L, \quad (44)$$

$$qz(q) > 0. \quad (45)$$

³ Верхним индексом T здесь обозначается операция транспонирования.

⁴ Псевдоединичной здесь называется полная и прямоугольная матрица, в каждом столбце которой содержится только один отличный от нуля элемент, равный единице.

⁵ Поскольку $0 \in X$, то любое из локализованных производств можно остановить или произвести в ненулевых объемах все виды продукции, входящие в область его специализации, но в любом допустимом решении допустимо снижение объемов производства.

Некоторый вектор, построенный при полуположительном векторе цен q и допустимый в задачах (27), обозначим $\tilde{x}(q)$. Поскольку условия следствия 6 гарантируют выполнение неравенства (42), то в соответствии с (43), полагая

$$\tilde{x}_j^l(q) = \begin{cases} \tilde{x}_j^l, & \text{если } w_j^l(q) > 0, \\ 0, & \text{если } w_j^l(q) \leq 0, \end{cases} \quad j \in I_l, \quad l \in L,$$

получим неравенства

$$\sum_{l \in L} w^l(q) x^l(q) \geq \sum_{l \in L} w^l(q) \tilde{x}^l(q) > 0,$$

в силу которых (45) следует из (31). Если же для каких-то пар l, j не выполняются условия (44), то

$$\tilde{x}_j^l(q) = \begin{cases} x_j^l(q), & \text{если } w_j^l(q) \geq 0, \\ 0, & \text{если } w_j^l(q) < 0, \end{cases} \quad j \in I_l, \quad l \in L,$$

для допустимого в (27) набора векторов $\tilde{x}^l(q), l \in L$ неравенство $\sum_{l \in L} w^l(q) \tilde{x}^l(q) > \sum_{l \in L} w^l(q) x^l(q)$,

вступает в противоречие с оптимальностью в (27) набора $x^l(q), l \in L$.

Таким образом, условие (44) справедливо при полуположительном значении вектора цен q для любых оптимальных решений задач (27).

Следствие 7. Если экономическое равновесие сформировалось при полуположительном векторе цен p , а матрица $(\Xi - A)$ продуктивна, то $py(p) > 0$.

Действительно, используя равенство (22), условия (29) можно представить в виде

$$y(p) \leq z(p) + u(p), \quad p \geq 0, \quad py(p) = p(z(p) + u(p)), \quad (46)$$

а так как вектор $u(p) \geq 0$, то из (46) и (45) следуют неравенства $py(p) \geq pz(p) > 0$.

Поскольку компоненты вектора $y(p) \geq 0$, то их можно интерпретировать как объемы совокупного спроса на все виды товарной продукции, которые производятся в объединении или поставляются на рынки этой продукции по импорту, а компонентами суммы векторов $z(p) + u(p)$ тогда фиксируются объемы предложения тех же самых продуктов. В силу (46) в ценах экономического равновесия денежные стоимости обоих наборов совпадают и положительны. Это означает, что положительны цены на какие-то из тех видов товарной продукции, которые в равновесии производятся в ненулевых объемах. В экономической терминологии такие продукты называются *товарами*, а превышение объемов предложения над объемами спроса возможно только при нулевых значениях цен, т.е. для *даровых благ* (Самуэльсон, 1964).

ФОРМИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

Так как при экономическом равновесии могут производиться не все продукты, а лишь некоторая их часть из множества $I_1(q) \subseteq I^+$, то равенствами

$$\tilde{x}_j(q) = \sum_{l \in L_j} x_j^l(q), \quad j \in I_1(q) \quad (47)$$

определены суммарные объемы их производства, а с помощью соотношений

$$a_{ij}(q) = \sum_{l \in L_j} a_{ij}^l x_j^l(q) / \tilde{x}_j(q), \quad i \in I; \quad \hat{w}_j(q) = \sum_{l \in L_j} w_j^l(q) x_j^l(q) / \tilde{x}_j(q), \quad i \in I_1(q) \quad (48)$$

формируются элементы матрицы агрегированного по предприятиям продуктового баланса и вектора отраслевых нормативов добавленной стоимости на единицу продукции, причем в силу условий (44), $a_{ij}(q), \hat{w}_j(q) \geq 0, \quad i \in I, \quad j \in I_1(q)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 6. Если матрица $A(q)$ и векторы $\hat{x}(q)$, $\hat{w}(q)$, построенные в (47) и (48), используются в равенствах (1), (2), то вектор $\hat{x}(q)$ будет сбалансирован в (1) с тем значением вектора $z(q)$, которое определяется в (23) с помощью входящих в (47), (48) векторов $x^l(q)$, $l \in L$, а вектор $\hat{w}(q)$ будет сбалансирован в (2) с вектором q . Если множество $I_2(q) = I \setminus I_1(q) \neq \emptyset$ то матрица $A(q) = \|a_{ij}(q)\|$, $i \in I$, $j \in I_1(q)$ непродуктивна.

Для доказательства предположим сначала, что $I_1(q) = I$, т.е. все продукты производятся в ненулевых объемах. В соответствии с (23) и (47), (48) получаем равенства

$$\begin{aligned} z_i(q) &= \sum_{l \in L_i} x_j^l(q) - \sum_{l \in L_j} \sum_{j \in I_1} a_{ij}^l x_j^l(q) = \hat{x}_i(q) - \sum_{l \in I} \sum_{j \in L_j} a_{ij}^l x_j^l(q) = \\ &= \hat{x}_i(q) \sum_{j \in I} a_{ij}(q) \hat{x}_j(q), \quad i \in I. \end{aligned} \quad (49)$$

Умножая каждое равенство в (26) на соответствующее ему значение $x_j^l(q)$ и суммируя их почленно по $l \in L_j$, получим

$$\sum_{l \in L_j} w_j^l(q) x_j^l(q) = q_j \sum_{l \in L_j} x_j^l(q) - \sum_{l \in L_j} x_j^l(q) \sum_{i \in I} q_i a_{ij}^l,$$

а после деления всех членов каждого равенства на $\hat{x}_j(q)$ они в соответствии с (47) и (48) приводятся к виду

$$\hat{w}_j(q) = q_j - \sum_{i \in I} q_i a_{ij}(q), \quad j \in I. \quad (50)$$

Если же $I_2(q) \neq \emptyset$, то в равенствах (49) достаточно вместо множества I использовать множество $I_1(q)$, а в равенстве (50) ту же замену нужно произвести только в условии $j \in I$. В итоге, в обозначениях из (7), равенства (1), (2) принимают вид

$$z^1(q) = (E_1 - A_{11}(q))\hat{x}(q), \quad z^2(q) = -A_{21}(q)\hat{x}(q), \quad (51)$$

$$q^1(E_1 - A_{11}(q)) - q^2 A_{21}(q) = \hat{w}(q), \quad (52)$$

и теперь полуположительный вектор $\bar{p}$, формирующий неравенства (40) с матрицей $\begin{bmatrix} (E_1 - A_{11}(q))^T, & -A_{21}^T(q) \end{bmatrix}$, получим, полагая в (52) $\bar{p}^1 = q^1 = \hat{w}(q) = 0$, $q^2 = \bar{p}^2$ при любом, но полуположительном значении вектора $\bar{p}^2$. Однако из того же равенства (52) можно вывести еще одно, довольно интересное с экономической точки зрения утверждение.

Следствие 8. Если матрица $A_{11}(q) \geq 0$ и продуктивна, а матрица $A_{21}(q) \geq 0$ и в каждом столбце имеет положительные элементы, то при любых векторах $q^2 > 0$ и $\hat{w}(q) \geq 0$ существует такой вектор $q^1 > 0$, при котором выполняется равенство (52).

Действительно, полагая

$$q^1 = (\hat{w}(q) + q^2 A_{21}(q))(E_1 - A_{11}(q))^{-1}, \quad (53)$$

в соответствии с теоремой 1 $q^1 > 0$, так как вектор $q^2 A_{21}(q) + \hat{w}(q) > 0$.

Как видно из (51), абсолютными значениями компонент вектора $z^2(q)$ определены объемы использования ресурсов внешнего происхождения, а вектором $q^2 > 0$ – любые значения цен на эти ресурсы. Однако если цены на свою продукцию будут заданы компонентами вектора q^1 из (53), то не только балансируются все финансовые потоки, но и обеспечивается для каждого продукта $j \in I_1(q)$ установленное в (48) расчетное значение норматива добавленной стоимости $\hat{w}_j(q)$. Попутно выясняется, что все цены, определенные вектором $q = [q^1, q^2]$, положительные. В дальнейшем вопрос о наличии в структуре вектора цен $q \geq 0$ нулевых компонент будет рассмотрен более детально, а сейчас предположим, что при достижении экономического равновесия вектор цен $p > 0$ а значит, в (29) выполняется равенство

$$s(p) = z(p). \quad (54)$$

В (Карлин, 1963) показано, что в этом случае процесс рыночной корректировки цен $q(t)$ в непрерывном времени $t \geq 0$ описывается уравнениями Вальраса, которые в соответствии с первым неравенством в (46) приводятся к виду

$$\dot{q} = s(q) - z(q). \quad (55)$$

Теорема 7. Если экономическое равновесие реализуется с вектором цен $p > 0$ так что выполняется равенство (54), то равновесие с вектором цен p в динамической системе (55) будет устойчивым, а если при ценах p хотя бы одна из задач (32), (33) имеет единственное оптимальное решение, то и асимптотически устойчивым.

Выбирая функцию Ляпунова в виде $L(q) = (1/2)(q - p)^2$ и вычисляя значения ее производной на траекториях системы (55), получим $\dot{L}(q) = (q - p)(s(q) - z(p)) = (q - p)(s(q) - s(p) + z(p) - z(q)) \leq (q - p)(s(q) - s(p))$, причем последнее неравенство следует из условия (30), в силу которого $(q - p)(z(p) - z(q)) \leq 0$. Для любого из оптимальных решений задач (32) с вектором цен p выполняются неравенства

$$\phi_k(y^k(p)) - \phi_k(y^k(q)) \geq p(y^k(p) - y^k(q)), \quad k \in K, \quad (56)$$

а для оптимальных решений тех же задач с вектором цен q – неравенства

$$\phi_k(y^k(q)) - \phi_k(y^k(p)) \geq q(y^k(p) - y^k(q)), \quad k \in K. \quad (57)$$

Суммируя почленно в (56) и (57) пары неравенств с одинаковым значением индекса k , приходим к неравенствам $(q - p)(y^k(q) - y^k(p)) \leq 0$, $k \in K$, которые теперь можно просуммировать по k , получая неравенство $(q - p)(y(q) - y(p)) \leq 0$. Обращаясь к задачам (33), тем же способом можно построить неравенство $(q - p)(u(q) - u(p)) \leq 0$, которое в сумме с предыдущим приводит к окончательному неравенству $(q - p)(s(q) - s(p)) \leq 0$, из которого уже следует, что величина $\dot{L}(q(t))$ на интегральных кривых системы (55) не принимает положительных значений, т.е. равновесие с вектором $p > 0$ глобально устойчиво (Меркин, 1987). Но указанное неравенство становится строгим, если выполнено последнее условие теоремы 7, в силу которого существует $\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = p$.

О ПОЛУПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ ЦЕН

Для упрощения рассуждений предположим, что все функции ϕ_k , $k \in K$, ψ_m , $m \in M$, имеют первые частные производные.

Определение 6. Будем говорить, что продукт $s \in I_2(q)$ не пользуется спросом, если выполняется условие

$$y_s + \sum_{j \in I_1(q)} a_{sj}(q) \hat{x}_j(q) = 0. \quad (58)$$

Теорема 8. Если некоторый продукт $s \in I_2(q)$ не пользуется спросом, то в этом и только в этом случае выполняются равенства $q_s = u_s = 0$, а соответствующая этому продукту балансовая строка из матрицы $A_{21}(q)$ может быть исключена.

В соответствии с (51), равенство $U_s = 0$ для некоторого значения $s \in I_2(q)$ возможно тогда и только тогда, когда выполняется условие (58). Но поскольку вектор $\hat{x}(q) > 0$, то из (58) в этом случае следует, что

$$\forall j \in I_1(q): a_{sj}(q) = 0. \quad (59)$$

Для компонент же $y_s^k(q)$ векторов $y^k(q)$, $k \in K$, оптимальных в задачах (32) при ценах q , при этом должны выполняться необходимые условия экстремума

$$\left. \frac{\partial \phi_k}{\partial y_s^k} \right|_{y=y^k(q)} - q_s \leq 0, \quad y_s^k(q) \geq 0, \quad y_s^k(q) \left(\left. \frac{\partial \phi_k}{\partial y_s^k} \right|_{y=y^k(q)} - q_s \right) = 0, \quad k \in K. \quad (60)$$

Из (60) следует, что для единственности в задачах (32) оптимальных решений с компонентой $y_s^k(q) = 0$, $k \in K$ должны быть справедливы условия

$$q_s = 0, \quad \left. \frac{\partial \phi_k}{\partial y_s^k} \right|_{y=y^k(q)} < 0, \quad k \in K. \quad (61)$$

Но если для некоторого $s \in I_2(q)$ имеют место условия (61), то для $q_s = 0$ и $y_s^k(q) = 0$, $k \in K$ справедливы не только условия (60), но и в силу (59), условия (58), а значит, балансовую строку с индексом $s \in I_2(q)$ можно вычеркнуть из матрицы $A_{21}(q)$ и положить $u_s = 0$. Отметим, что для оптимальности этого решения в задачах (33) необходимо, чтобы

$$q_s = 0, \quad \left. \frac{\partial \phi_m}{\partial y_s^m} \right|_{u=u^m(q)} < 0, \quad m \in M. \quad (62)$$

Таким образом, если множество $I_2(q) \neq \emptyset$, то после вычеркивания из системы (52) незначащих равенств все финансовые потоки балансируются с помощью цен $[q^1, q^2] = q > 0$, где вектором $q^2 > 0$ могут быть заданы любые их значения для ресурсов внешнего происхождения, а в (51) вектором $q^1 > 0$ устанавливаются цены на все виды своей продукции, при которых производство любого из них становится рентабельным.

Остается рассмотреть случай, когда множество $I_2(q) = \emptyset$, а соответственно $I_1(q) = I$ и все виды продукции производятся в ненулевых объемах. В этом случае балансовые уравнения (49) и (50) могут иметь внутреннюю структуру, общий вид которой для ситуации экономического равновесия представлен в таблице.

<i>NTV</i>	$\hat{x}^1(p) > 0$	$\hat{x}^2(p) > 0$	$\hat{x}^3(p) > 0$	$u^1(p) \geq 0$	$u^2(p) \geq 0$	<i>TR</i>	<i>RHS</i>
$p^1 > 0$	$E_1 - A_{11}(p)$	$-A_{12}(p)$		E_1		=	$y^1(p)$
$p^2 > 0$	$-A_{21}(p)$	$E_2 - A_{22}(p)$			E_2	=	$y^2(p)$
$p^3 = 0$	$-A_{31}(p)$	$-A_{32}(p)$	$E_3 - A_{33}(p)$			$\geq$	$y^3(p)$
<i>TR</i>	=	=	=	$\leq$	$\leq$		
<i>RHS</i>	$\hat{w}^1(p) > 0$			$-\partial\psi/\partial u _{u=u(q)}$	$-\partial\psi/\partial u _{u=u(p)}$		

Примечание: *NTV* – имена и типы переменных; *TR* – типы ограничений; *RHS* – имена правых частей.

Поскольку вектор $\hat{w}(p)$ полуположительный, то должно существовать подмножество продуктов с вектором $\hat{w}^1(p) > 0$ и, согласно теореме 1, с ценами $p^1 > 0$, что и показано в левом верхнем углу таблицы. Однако так как соответствующая этим ценам матрица $E_1 - A_{11}(p)$ может иметь продолжение в виде полной подматрицы $-A_{12}(p)$, то векторы $A_{12}(p)\hat{x}^2(p)$, $p^1 A_{12}(p) > 0$, а значит, матрица $E_1 - A_{11}(p)$ продуктивна, и вектор цен $p^2 > 0$. Если в каждой строке матриц $A_{21}(p)$ и $A'_3(p) = [A_{31}(p), A_{32}(p)]$ имеется ненулевой элемент, то продуктивны в соответствии с (6) матрицы $A_{22}(p)$, $A_{33}(p)$. Но тогда входящее в таблицу уравнение $p^3(E_3 - A_{33}) = 0$ имеет единственное решение $p^3 = 0$, и, таким образом, все продукты, собранные в векторе $\hat{x}^3(p) > 0$, производятся в качестве даровых благ. Если при этом для всех компонент p_i^3 , $i \in I_3$ вектора p^3 выполняются условия (62), то никакой из этих продуктов не импортируется, а при выполнении условий

$$\forall i \in I_3 \quad \exists k \in K : \left. \frac{\partial \phi_k}{\partial y_i^k} \right|_{y=y^k, y_i^k=0} > 0$$

любое из даровых благ входит в вектор y^3 в объеме $y_i^3 > 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, формирование экономического равновесия идет не от векторов z , w к векторам x , p , а в обратном направлении. Начинается этот процесс при некоторых текущих значениях цен q , с помощью которых находятся локально оптимальные решения задач (32) и (33), затем в (34) и (35) значения векторов совокупного спроса $y(q)$ и импорта $u(q)$. Одновременно с помощью тех

же значений цен в (26) формируются текущие значения нормативов добавленной стоимости на единицу продукции во всех технологических процессах, входящих в матрицу $(\Xi - A)$. Используя эти показатели, предприятия получают возможность построить свои локально-оптимальные планы производства валовой продукции в задачах (27) и определить вектор $z(q)$. Причем сделать это можно двумя способами: прямым счетом в равенствах (23) или создавая продуктовый баланс в соответствии с (47) и (48). Можно построить правую часть в динамическом уравнении (55), и если окажется, что для векторов $s(q)$, $z(q)$ выполнено равенство (54), то экономическое равновесие построено и остается положить $p = q$.

Так как все локально оптимальные решения принимались независимо друг от друга, то объемы предложения по видам товарной продукции, которые сформируются в системе балансовых соотношений объединения предприятий, по многим позициям могут оказаться несбалансированными с объемами спроса. Это приведет к изменению значений какой-то части цен и в связи с этим – к необходимости корректировки результатов проведенных на предыдущем шаге расчетов. Таким образом, представленный выше процесс становится итеративным, и, что существенно, полуположительные и устойчивые значения векторов $z(p)$, $\hat{w}(p)$ в отраслях возникают не до, а после того, как в состоянии экономического равновесия в (47) и (48) сформируются сбалансированные с ними в (1) и (2) решения $\hat{x}(p)$, p .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Волошин Н.И.** (1965). Система матричных моделей внутризаводского планирования. В кн.: *“Применение математики в экономических исследованиях”*. Т. 3. М.: Мысль.
- Гейл Д.** (1963). Теория линейных экономических моделей. М.: Иностранная литература.
- Карлин С.** (1963). Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир.
- Леонтьев В.** (1990). Экономические эссе. М.: Политиздат.
- Медницкий В.Г., Медницкий Ю.В., Фаттахов М.Р.** (2011). Об экономических кризисах производственных систем // *Экономика и мат. методы*. Т. 47. № 1.
- Медницкий В.Г., Медницкий Ю.В., Леонов В.Ю.** (2009). Использование методов декомпозиции для оптимизации // *Изв. РАН. ТисУ*. № 5.
- Меркин Д.Р.** (1987). Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука.
- Немчинов В.С.** (1963). О дальнейшем совершенствовании планирования и управления народным хозяйством. М.: Изд-во экономической литературы.
- Немчинов В.С.** (1965). Экономико-математические методы и модели. М.: Мысль.
- Рокафеллар Р.** (1973). Выпуклый анализ. М.: Мир.
- Самуэльсон П.** (1964). Экономика. М.: Прогресс.
- Цурков В.И.** (1981). Декомпозиция в задачах большой размерности. М.: Наука.

Поступила в редакцию
25.02.2013 г.

Balance, Optimality and Economic Equilibrium in the Open Production Systems

V.G. Mednitskiy, Yu.V. Mednitskiy

In mathematical modeling of economic equilibrium distinction between the gross output of production and its commodity component is usually ignored that isn't absolutely correct. It is shown that use of Leontyev's model when forming balance of Errou-Debra type leads to the products market where economic equilibrium exists if the Leontyev's matrix is productive, and a vector of the prices of all the types of production is included in it as the semipositive. It is shown also that monetary expenses on that part of products on which there is a consumer demand in equilibrium will always be positive (in the balance prices).

Keywords: economic equilibrium, semipositive prices, Leontyev's model, productivity.