
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

ОЦЕНКА РИСКА В ЛИНЕЙНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ
СИСТЕМАХ
ПРИ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ВРЕМЕННЫХ ПРЕДПОЧТЕНИЯХ*

© 2013 г. Е.С. Паламарчук¹

(Москва)

Рассматривается линейная стохастическая экономическая система управления с квадратичным целевым функционалом, учитывающим отрицательные временные предпочтения агентов, которые выражаются с помощью возрастающей дисконтирующей функции. Для этой системы формулируется понятие оптимальности в среднем на бесконечном интервале времени. Для найденного оптимального в среднем управления оценивается риск от его применения. В качестве приложений полученных результатов рассматривается одна модель экологической экономики.

Ключевые слова: линейная стохастическая система, отрицательные временные предпочтения, бесконечный горизонт планирования, риск.

ВВЕДЕНИЕ²

При анализе поведения управляемых экономических систем на больших горизонтах планирования одна из важнейших задач – оценка долгосрочных последствий применения выбранных стратегий управления. Основная трудность здесь связана с тем, что на динамику системы влияют неконтролируемые (случайные) факторы. Поэтому теоретической основой указанного анализа могут являться результаты исследований стохастических динамических систем управления на бесконечных интервалах времени. Такие исследования предполагают выбор адекватного критерия оптимальности, нахождение соответствующего оптимального управления и оценку риска при его использовании, обусловленного влиянием тех же случайных факторов.

При формировании критерия оптимальности на бесконечном интервале времени возникает необходимость решения следующих проблем:

- а) учет степени влияния случайных факторов в структуре критерия;
- б) учет временных предпочтений экономических агентов.

Чтобы пояснить смысл указанных здесь проблем, возникающих, в частности, при управлении линейными стохастическими системами на бесконечном интервале времени, обратимся сначала к традиционной теории линейных оптимальных систем управления (Квакернаак, Сиван, 1977).

Для детерминированных линейных систем может быть использован критерий минимизации квадратичного интегрального функционала, определенного на бесконечном интервале времени. Для той же системы при наличии случайных возмущений значение функционала представляет собой случайную величину, а в задачах стохастической динамической оптимизации обычно предлагается рассматривать вместо самого функционала его математическое ожидание (м.о.). Но в данном случае соответствующий критерий (будем называть его “критерием м.о.”) лишен смысла, так как за счет влияния случайных факторов он обращается в бесконечность при любом

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-00767) и РГУИТП (проект НИР 1.1859.2011).

¹ Автор благодарит рецензента за ценные замечания, способствующие улучшению изложения материала статьи.

² Введение написано совместно с Т.А. Белкиной.

допустимом управлении. Поэтому для функционала, определенного на каждом временном интервале, используется нормировка, отражающая накопление случайных факторов за соответствующее время. В обычной ситуации, когда параметры возмущений ограничены во времени, эта нормировка представляет собой длину интервала. Тогда в соответствии с критерием, называемым иногда в литературе *долговременным средним*, предлагается минимизировать верхний предел среднего по времени значения м.о.

В задачах управления экономическими системами, где применяется экспоненциальное дисконтирование в функционале качества, на бесконечном интервале времени, так же как и на конечном, может быть использован критерий м.о. Однако в задачах, где функционал включает дисконтирующую функцию, существенно отличную от экспоненциальной, а также в задачах управления линейной системой с затухающими (вырождающимися со временем) или, наоборот, бесконечно нарастающими возмущениями, м.о. и долговременное среднее могут быть неподходящими критериями. Точнее, они будут неэффективны в том смысле, что либо будут давать нулевое значение для целого множества управлений, либо будут обращаться в бесконечность для всех допустимых управлений. В этих ситуациях требуется введение более общей нормировки, которая учитывала бы каким-то образом степень влияния указанных факторов. Например, с понятием нормировки в виде “накопленного дисконта” можно ознакомиться в (Leizarowitz, 1988). В работах (Паламарчук, 2010; Белкина, Паламарчук, 2013) исследуется задача с затухающими возмущениями, относительно которой, в частности, показано, что она может быть сведена к задаче с дисконтированием с помощью подходящей замены переменных; при этом нормировка “накопленный дисконт” эквивалентна нормировке в виде *дисперсии накопленных шумовых воздействий* в исходной задаче. Критерий оптимальности с обобщенной нормировкой такого рода можно назвать *обобщенным долговременным средним*.

Выбор дисконтирующей функции в функционале качества, в свою очередь, относится к решению второй из указанных проблем при формировании критерия оптимальности, а именно проблеме учета временных предпочтений экономических агентов. Временные предпочтения должны описывать различия во внутренней оценке экономическими агентами значимости доходов (или потерь), относящихся к различным моментам времени. Результаты многих исследований по экспериментальному выявлению временных предпочтений показывают, что они не соответствуют так часто используемому в экономических моделях экспоненциальному дисконтированию (подробнее об этом см. в разд. 1). Более того, во многих ситуациях они соответствуют так называемому *отрицательному дисконтированию* и должны описываться не убывающими, а возрастающими дисконтирующими функциями. Зачастую это объясняется отношением агентов к риску в получении отложенного во времени дохода или к возникновению потери (разд. 1).

После того как сформирован критерий оптимальности (в том числе с учетом отношения к риску) и найдено оптимальное управление, возникает как бы “второй уровень” восприятия риска и необходимость его оценки. Дело в том, что критерии, основанные на математическом ожидании функционалов, не дают уверенности в том, что соответствующее оптимальное управление (так называемое *оптимальное в среднем*) будет достаточно хорошим с точки зрения значения самого функционала на отдельно взятой траектории случайного процесса. Поэтому и важно оценить риск получения нежелательного результата при применении оптимального в среднем управления. Для этого предлагается оценить дефект последнего, точнее, скорость роста этого дефекта со временем. Под дефектом в текущий момент времени мы понимаем разность значений функционалов при оптимальном в среднем и произвольном управлении, рассматриваемую на интервале до этого момента, таким образом можно говорить о *процессе дефекта* и о возможной скорости его роста как оценке риска в задаче стохастической динамической оптимизации.

Для стандартных линейных управляемых систем с квадратичными функционалами, о которых говорилось в начале и которые описаны, в частности, в книге (Квакернаак, Сиван, 1977), оценка риска такого рода была получена в (Белкина, Кабанов, Пресман, 2003). Там было показано, что верхней функцией для всего семейства процессов дефекта управления, оптимального в смысле долговременного среднего, будет логарифмическая функция.

Проблема оптимального управления и оценки риска в задачах с бесконечным горизонтом и отрицательным дисконтированием является предметом исследования данной работы.

Работа организована следующим образом. В разд. 1 рассматривается понятие временных предпочтений и специфика их отражения в дисконтирующей функции при анализе тех или иных экономических проблем, а также дан обзор исследований по математической теории управления при отрицательном дисконтировании. В разд. 2 приводится описание модели и постановка задачи. Для ее решения исходная задача с отрицательным дисконтированием преобразуется к соответствующей задаче для системы с нарастающим возмущением, для которой в разд. 3 находится оптимальное среднее управление, а в разд. 4 проводится исследование его вероятностных свойств и оценивается риск его применения. Разд. 5 посвящен интерпретации полученных результатов для исходной задачи и их применению к одной модели из экологической экономики.

1. ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ ДИСКОНТИРОВАНИЕ КАК ОСОБЕННОСТЬ ВРЕМЕННЫХ ПРЕДПОЧТЕНИЙ И ОТРАЖЕНИЕ РИСКА

Учет фактора времени представляет ключевой элемент в анализе экономических процессов и явлений. Это проявляется в существовании у субъектов так называемых “временных предпочтений”. В них отражено то, каким образом они производят оценку монетарных (денежных) или немонетарных альтернатив, отнесенных к разным моментам времени, а также принимаемые ими решения. Традиционно предполагается, что эти предпочтения положительные, иными словами, субъекты стремятся приблизить желательные события (“выигрыши”), а нежелательные (“потери”) – отдалить. Такая характеристика носит название поведенческого оптимизма (Berndsen, Pligt, 2001): получая выигрыш сейчас, у игрока есть основания ожидать его повторения и в будущем, а отодвигая потерю – возможность каким-либо образом избежать ее. Однако эмпирические исследования (см., например, (Loewenstein, Prelec, 1991)) показали, что в ряде ситуаций в поведении субъектов возникает обратный эффект – отрицательные предпочтения, в частности при оценке потерь.

В большинстве случаев предполагается, что временные предпочтения могут быть выражены с помощью так называемой “дисконтирующей функции” $f_t \geq 0$ придающей вес событиям (выигрышам, потерям), возникающим в конкретный момент времени. На основании этого можно сравнивать различные альтернативы. Точнее, пусть предлагается x в момент t и y в момент s ($s \neq t$). Тогда $(y, s) \succ (x, t) \Leftrightarrow f_s u(y) > f_t u(x)$, где $\succ$ – знак строгого предпочтения, $u(\cdot)$ – функция полезности, принимающая положительное значение при выигрыше и отрицательное для потери. Положительные предпочтения означают, что при одинаковых выигрышах x, y и $s \leq t$ будет выбрана пара (y, s) (пара (x, t) при сравнении потерь), поэтому из приведенного выше соотношения $f_s > f_t$, т.е. дисконтирующая функция убывает, а при отрицательных временных предпочтениях, наоборот, возрастает. Со скоростью изменения дисконтирующей функции связана ее характеристика, называемая ставкой дисконтирования, которая определяется в случае непрерывного параметра и дифференцируемой f_t в виде $\phi_t = -\dot{f}_t/f_t$ (знак “ $\dot{}$ ” – производная по времени). Нетрудно заметить, что эта ставка больше нуля в случае положительных предпочтений и меньше нуля – при отрицательных.

Теперь обратимся к тому, из каких соображений возникает тот или иной вид дисконтирования с учетом эмпирических исследований, аксиоматики и эвристического подхода. Самая тривиальная ситуация – использование постоянной $\phi_t = r > 0$, которая возникает, например, при вложениях в безрисковый актив (банковский счет) с постоянной доходностью. С точки зрения аксиоматики такой вид дисконтирующей функции $f_t = e^{-rt}$ связан с предположением о стационарности предпочтений (Koormans, 1960), т.е. из $(x, s) \succ (y, t) \Leftrightarrow (x, t + \tau) \succ (y, s + \tau)$ при произвольных x, y и $s, t \geq 0$, а также сдвига времени $\tau > 0$. В этом контексте для исследования экономико-математических моделей, описывающих социально-значимые явления и процессы, предлагается использование так называемой социальной ставки дисконтирования как отражения временных предпочтений общества (см., например, (Moore, Boardman et al., 2004)). В настоящее время получил широкое распространение подход, при котором эта ставка определяется согласно модели Рамсея (Ramsey, 1928) в виде $r = \rho + \eta g$, где $\rho \geq 0$ – чистая ставка временных предпочтений, η – коэффициент эластичности предельной полезности по потреблению, g – темп прироста потребления на душу населения (который связывают с ростом ВВП). Тем не менее в будущем может

создаться ситуация уменьшения ВВП, а значит, отмеченная в (Islam, 2005) возможность отрицательного значения g (из-за изменений климатического или демографического характера, истощения ресурсов) при невысокой ρ приведет к отрицательной ставке дисконтирования. Как известно (Шоломицкий, 2005, с. 117), величина η является индексом, измеряющим несклонность к риску: чем выше ее значение, тем более осторожны субъекты. Очевидно, что несклонность к риску усиливает эффект влияния $g < 0$ на социальную ставку дисконтирования r .

Заметим, что подход, предполагающий дисконтирование по постоянной (положительной) ставке, долгое время оставался доминирующим. Однако со временем возникли задачи (в первую очередь при моделировании состояния окружающей среды и долгосрочном планировании), для которых такая методика оценки оказалась несостоятельной, и были проведены эмпирические исследования (Thaler, 1981; Weitzman, 2001; Newell, Pizer, 2003) показывающие, что ϕ_t является убывающей функцией времени, что аксиоматически отражено в (Fishburn, Rubinstein, 1982; Loewenstein, Prelec, 1992). Как неоднократно упоминалось (Moore, Boardman и др., 2004; Islam, 2005; Newell, Pizer, 2003), выбор ставки дисконтирования, соответствующей специфике моделируемого явления, оказывает решающее воздействие на результаты последующего анализа. Особенно это актуально для задач, рассматриваемых на долгосрочном интервале (Voinov, 2008, p. 324).

Отметим здесь важный поведенческий аспект: ориентацию на настоящее у применяющих положительное дисконтирование и на будущее – при отрицательном (Brougham, John, 2007, p. 51). Ведь будущее зачастую сопряжено с большой долей неопределенности, и несклонные к риску субъекты подобным образом (т.е. придавая будущему больший вес) пытаются уменьшить последствия от возможных негативных явлений. Как пример (McCaffery, Slemrod, 2006, Chapter 6) – поведение налогоплательщиков в США, которые предпочитают заплатить существенно больше, чем ожидаемая сумма налога (оплата происходит заранее, фактическая сумма налога в тот момент неизвестна). Государство, в свою очередь, возвращает разницу, но лишь спустя некоторое время. Одним из основных мотивов такого специфического подхода к уплате налогов является стремление перестраховаться, не рисковать. Очевидно, что не во всех ситуациях удастся подобным образом (заплатив “премию”) свести к нулю влияние неопределенности. Однако путем включения отрицательных временных предпочтений можно выработать стратегии поведения, удовлетворяющие восприятию будущего осторожными субъектами. В (Fishburn, Edwards, 1997) приводится так называемая “нейтральная к дисконтированию” модель предпочтений, где в рамках аксиоматики не ограничивается характер дисконтирующей функции (т.е. допускается возможность и отрицательного дисконтирования), см. также (Barokas, 2012). В завершение данного обзора необходимо отметить, что в случае, когда ставится задача выработки общественного решения, дисконтирование (в том числе и отрицательное) выступает в роли своеобразного взвешивания, показывающего, каким образом оцениваются будущие последствия той или иной политики (Bell, Hobs, Ellis, 2003). Естественно предположить, что такие ставки дисконтирования могут существенно отличаться от индивидуальных, которые при традиционно сформулированных вопросах вида “предпочитает ли субъект улучшение ситуации лично для себя сейчас или же через год” обычно оказываются положительными. В исследовании (Bell, Hobbs, Ellis, 2003) приводится пример опроса, показывающего, что ставка дисконтирования (в среднем по выборке) может быть и отрицательной, если ставится задача сравнения долгосрочных последствий от действий, приводящих к выбросу вредных веществ, накоплению ядерных отходов, глобальному потеплению и т.д.

Теперь обратимся к известным примерам по математической теории управления при наличии отрицательного дисконтирования в целевом функционале. Как отмечают авторы в (Carlson, Naurie, Leizarowitz, 1991, p. 125), это может вносить дестабилизирующий эффект в поведение систем на больших интервалах планирования. Тем не менее, в ряде случаев можно сформулировать соответствующие задачи управления. В (Mitra, 1981) рассматривалось обобщение модели Рамсея, включающее исчерпаемый ресурс и функционал качества с полезностью потребления по экономике в целом. При предположении об экспоненциальном росте населения преобразование критерия оптимальности приводит к задаче с отрицательной ставкой дисконтирования, для которой были получены условия существования оптимальных стратегий потребления на бесконечном интервале времени. В работе (Veinott, 1969) исследовалась задача управления мар-

ковским процессом с конечным числом состояний с целью максимизации ожидаемых доходов за бесконечное время при их дисконтировании с постоянным темпом, который может быть и отрицательным, что, по мнению автора, соответствует инфляции и включению в модель реальной процентной ставки. Дается характеристика оптимальной стратегии, которая оказывается принадлежащей классу стационарных управляющих воздействий. Статья (Stettner, 1989) посвящена изучению задач оптимальной остановки и импульсивного управления с критерием, который включает дисконтирующую функцию общего вида. В приводимой модели отрицательные ставки дисконтирования интерпретируются как способствующие самовосстановлению системы. Также в (Stettner, 1989) были сформулированы правила оптимальной остановки и условия существования стратегий, минимизирующих ожидаемое значение функционала потерь при стремлении горизонта планирования к бесконечности. В (Gueant, 2009) исследовалась возможность использования отрицательной ставки дисконтирования (чистой ставки временных предпочтений) в стохастической модели Рамсея. Оказалось, что в случае изоэластичной функции полезности при определенном соотношении между параметрами, в первую очередь при большом значении параметра шума, существует решение задачи максимизации ожидаемой дисконтированной полезности потребления. В указанных работах были найдены управления, доставляющие экстремум математическому ожиданию целевого функционала, т.е. оптимальные в среднем управления. Для модели, описание которой приводится в следующем разделе, удастся не только получить вид оптимального в среднем управления на бесконечном интервале времени, но и исследовать его вероятностные свойства.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОСТИ В СРЕДНЕМ

Рассмотрим линейную управляемую экономическую систему, функционирующую в условиях неопределенности. Пусть на полном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ задан n -мерный случайный процесс $\tilde{X}_t$, $t \geq 0$, определяющий состояние системы и описываемый уравнением

$$d\tilde{X}_t = A\tilde{X}_t dt + B\tilde{U}_t dt + Gdw_t, \quad \tilde{X}_0 = \tilde{x}, \quad (1)$$

где начальное состояние $\tilde{x}$ неслучайно; $w_t(t \geq 0)$ – d -мерный стандартный винеровский процесс; $\tilde{U}_t(t \geq 0)$ – допустимое управление, или k -мерный случайный процесс, согласованный с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, $\mathcal{F}_t = \sigma\{w_s, s \leq t\}$, такой что уравнение (1) имеет решение; A , B , G – матрицы таких размерностей, при которых (1) имеет смысл, $\|G\| > 0$ ($\|\cdot\|$ – матричная евклидова норма). Множество допустимых управлений обозначим $\tilde{\mathcal{U}}$.

При стремлении горизонта планирования T к бесконечности важной задачей (Sengupta, 1970; Holt, 1962) является стабилизация системы, т.е. поддержание траектории ее развития вблизи заранее выбранного состояния, а любые отклонения рассматриваются как потери. Действительно, часто в качестве переменных, которые желательно стабилизировать, выступают такие макроэкономические показатели, как инфляция, уровень безработицы и т.д. (Turnovsky, 1977, part 3). Кроме того, из свойств линейных систем следует, что задачу экспоненциального роста выпуска можно переформулировать как задачу стабилизации новой переменной (“выпуск/экспонента”) вблизи единицы.

Целевой функционал, оценивающий качество управления, имеет интегральный квадратичный вид и учитывает специфику оценки субъектами разновременных затрат в виде дисконтирующей функции, соответствующей отрицательным временным предпочтениям. Рассмотрим детерминированный процесс, описываемый уравнением (1), при $G \equiv \mathbf{O}$ ($\mathbf{O}$ – нулевая матрица) и пусть $\tilde{x}_0$ – фиксированный вектор. Предположим, что существует управление $\tilde{U}_t \equiv \tilde{u}_0$, при котором $\tilde{X}_t \equiv \tilde{x}_0$ – стационарное состояние этого процесса и $A\tilde{x}_0 + B\tilde{u}_0 = \tilde{\mathbf{0}}$ ($\tilde{\mathbf{0}}$ – нулевой вектор). Отметим, что при $n = 1$ и $B \neq 0$ такое управление всегда существует. Определим целевой функционал (случайную величину, с.в.), который учитывает на $[0, T]$ потери из-за отклонения случайного (возмущенного) процесса и некоторого допустимого управления от $\tilde{x}_0$ и $\tilde{u}_0$ соответственно:

$$J_T(\tilde{U}^T) = \int_0^T f_t \{ (\tilde{X}'_t - \tilde{x}'_0) Q (\tilde{X}_t - \tilde{x}_0) + (\tilde{U}'_t - \tilde{u}'_0) R (\tilde{U}_t - \tilde{u}_0) \} dt, \quad (2)$$

где $\tilde{U}^T = \{\tilde{U}_t\}_{t \leq T}$ – сужение управления $\tilde{U} \in \tilde{\mathcal{U}}$ на интервале $[0, T]$, Q, R – симметричные матрицы, неотрицательно определенная и положительно определенная соответственно, “ $'$ ” – знак транспонирования. При этом $\tilde{U}^T \in \tilde{\mathcal{U}}^T$, где $\tilde{\mathcal{U}}^T$ – множество допустимых управлений, рассматриваемых на интервале $[0, T]$, f_t – дисконтирующая функция, обладающая свойствами, приводимыми в следующем предположении.

Предположение 1. Дисконтирующая функция $f_t > 0, t \geq 0, f_0 = 1$:

- 1) возрастает, дифференцируема и при $t \rightarrow \infty$ функция $f_t \rightarrow \infty$;
- 2) $\varphi_t = -\dot{f}_t/f_t$ – ограниченная функция при любом $t \geq 0$ и $\lim_{t \rightarrow \infty}(-\varphi_t) = c_f$, где $c_f \geq 0$ – константа.

Первое условие означает, что имеет место отрицательное дисконтирование, для которого можно определить соответствующую ставку $\varphi_t = -\dot{f}_t/f_t$. Если во втором условии константа $c_f = 0$, то это является аналогией с ситуацией положительных временных предпочтений, где ставка дисконтирования также со временем может стремиться к нулю. Мы будем рассматривать поведение системы управления (1)–(2) при $T \rightarrow \infty$ и сформулируем определение оптимальности в среднем на бесконечном интервале времени.

Определение 1. Управление $\tilde{U}^* \in \tilde{\mathcal{U}}$ будем называть *оптимальным в среднем на бесконечном интервале времени* в задаче с дисконтированием, если оно является решением задачи

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \left[EJ_T(\tilde{U}) / \int_0^T f_t dt \right] \rightarrow \inf_{\tilde{U} \in \tilde{\mathcal{U}}} \quad (3)$$

Это определение аналогично приведенному в (Паламарчук, 2010) для случая положительного дисконтирования. Заметим, что при нормировке критерия в (3) учитывается порядок роста дис-

континирующей функции, а точнее $\int_0^T f_t dt$ – накопленный за плановый период дисконт (если предположить, что оценивается единичный поток в безразмерных величинах), а само отношение интерпретируется как ожидаемые совокупные издержки на единицу накопленного дисконта, см. также (Weide, Noortwijk, Suyono, 2008). Как будет показано далее, в случае с отрицательным дисконтированием по постоянной ставке требование оптимальности в смысле (3) оказывается слишком сильным, поэтому сформулируем еще одно определение.

Определение 2. Управление $\tilde{U}^* \in \tilde{\mathcal{U}}$ будем называть *слабо оптимальным в среднем на бесконечном интервале времени* в задаче с дисконтированием, если существует число $C_J > 0$:

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{EJ_T(\tilde{U}^*)}{\int_0^T f_t dt} \leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{EJ_T(\tilde{U})}{\int_0^T f_t dt} + C_J, \quad \forall \tilde{U}^* \in \tilde{\mathcal{U}}. \quad (4)$$

Заметим, что ввиду неограниченности матриц $f_t Q$ и $f_t R$ даже при $G \equiv \mathbf{O}$ система (1)–(2) не является стандартным линейно-квадратическим регулятором, поведение которого может исследоваться при $T \rightarrow \infty$ (Квакернаак, Сиван, 1977). Заметим, что в случае положительного дисконтирования (Паламарчук, 2010) невозможность применить стандартные подходы, известные из теории управления, возникала вследствие неотделимости $f_t Q$ и $f_t R$ от нуля. Однако путем замены переменных исходная задача управления сводилась к задаче, решение которой можно было найти известными методами. Применим эту же процедуру и для данного случая, определив

$$X_t := \sqrt{f_t}(\tilde{X}_t - \tilde{x}_0), \quad U_t := \sqrt{f_t}(\tilde{U}_t - \tilde{u}_0). \quad (5)$$

Тогда динамика процесса $\{X_t\}$ будет описываться уравнением

$$dX_t := (A - 0,5\varphi_t \mathbf{I})X_t dt + BU_t dt + \sqrt{f_t} G dw_t, \quad X_0 = \tilde{x} - \tilde{x}_0, \quad (6)$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица. Функционал (2) в новых обозначениях примет вид

$$J_T(U) = \int_0^T (X_t' Q X_t + U_t' R U_t) dt. \quad (7)$$

Очевидно, что $J_T(\tilde{U}) = J_T(U)$. Так как $\|\sqrt{f_t} G\| \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$, то в системе (6)–(7) со временем имеет место нарастание возмущений. В следующем разделе будут сформулированы определения оптимальности в среднем на бесконечном интервале времени и исследованы соответствующие задачи управления для системы, частным случаем которой является (6)–(7).

3. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ С НАРАСТАЮЩИМ ВОЗМУЩЕНИЕМ. ОПТИМАЛЬНОСТЬ И ОЦЕНКА РИСКА

Пусть на полном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ задан n -мерный случайный процесс X_t , $t \geq 0$, описываемый уравнением

$$dX_t = A_t X_t dt + B_t U_t dt + G_t dw_t, \quad X_0 = x, \quad (8)$$

где начальное состояние x неслучайно; w_t , $t \geq 0$, – d -мерный стандартный винеровский процесс; U_t , $t \geq 0$, – допустимое управление, или k -мерный случайный процесс, согласованный с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, $\mathcal{F}_t = \sigma\{w_s, s \leq t\}$, такой что уравнение (8) имеет решение; A_t , B_t , $t \geq 0$, – ограниченные матричные функции времени соответствующих размерностей. О предположениях относительно матричной функции $G_t = \sqrt{f_t} G$ будет сказано позднее, пока отметим, что при $t \rightarrow \infty$ она является неограниченной. Множество допустимых управлений обозначим $\mathcal{U}$. Для каждого $T > 0$ в качестве целевого функционала определим случайную величину

$$J_T(U^T) = \int_0^T (X_t' Q_t X_t + U_t' R_t U_t) dt, \quad (9)$$

где $U^T = \{U_t\}_{t \leq T}$ – сужение управления $U \in \mathcal{U}$ на интервале $[0, T]$; Q_t , R_t , $t \geq 0$, – ограниченные матричные функции времени, неотрицательно определенная и положительно определенная соответственно. При этом $U^T \in \mathcal{U}^T$, где $\mathcal{U}^T$ – множество допустимых управлений, рассматриваемых на интервале $[0, T]$. Будем исследовать поведение системы (8)–(9) при больших горизонтах планирования. В этом случае решается задача

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{E J_T(U)}{T} \rightarrow \inf_{U \in \mathcal{U}} \quad (10)$$

(Квакернаак, Сиван, 1977). Однако для ситуации $\|G_t\| \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$ постановка (10) теряет смысл, так как приводит к неограниченному значению критерия оптимальности при любом $U \in \mathcal{U}$, что будет показано ниже. Мы предлагаем определение оптимальности в среднем на бесконечном интервале времени, напрямую учитывающее вклад шума в динамику системы.

Определение 3. Управление $U^* \in \mathcal{U}$ будем называть *оптимальным в среднем на бесконечном интервале времени* (или оптимальным в смысле долговременного среднего), если оно является решением задачи

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{E J_T(U)}{\int_0^T \|G_t\|^2 dt} \rightarrow \inf_{U \in \mathcal{U}}. \quad (11)$$

При этом нормировка в (11) соответствует сумме дисперсий с.в., образующих вектор интегральных шумовых воздействий $\mathcal{Z}_T = \int_0^T G_t dw_t$ на интервале $[0, T]$, в чем нетрудно убедиться с помо-

щью формулы Ито: $E\mathcal{Z}_T \mathcal{Z}'_T = \int_0^T \|G_t\|^2 dt$. При этом скорость роста этого показателя $E\mathcal{Z}'_T \mathcal{Z}_T$ оказывается равной $\|G_t\|^2$.

Определение 4. Управление $U^* \in \mathcal{U}$ будем называть *слабо оптимальным в среднем на бесконечном интервале времени*, если существует число $C_J > 0$:

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{EJ_T(U^*)}{\int_0^T \|G_t\|^2 dt} \leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{EJ_T(U)}{\int_0^T \|G_t\|^2 dt} + C_J \quad \forall U \in \mathcal{U}. \quad (12)$$

Как упоминалось ранее, функция $\|G_t\|$ является неограниченной, т.е. со временем возмущение быстро нарастает. В следующем предположении более точно формулируются условия относительно характера этих изменений.

Предположение 2. Матричная функция G_t , $t \geq 0$:

- 1) $\|G_t\|$ – монотонна, $\|G_t\| \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$;
- 2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d \ln \|G_t\|}{dt} = c_G$, $c_G \geq 0$ – константа.

Замечание 1. Действительно, (6)–(7) оказывается частным случаем (8)–(9) при $A_t = A - 0,5\varphi_t \mathbf{I}$, $B_t \equiv B$, $G_t = \sqrt{f_t} G$, $x = \tilde{x} - \tilde{x}_0$, $Q_t \equiv Q$, $R_t \equiv R$. По предположению, $\|G_t\| > 0$, иными словами, аддитивная неопределенность действительно имеет место. Следовательно, задачи (11) и (3) эквивалентны.

В стандартном стохастическом линейно-квадратическом регуляторе (т.е. при ограниченной матричной функции G_t) при ряде общих условий на параметры соответствующей детерминированной системы (Белкина, Кабанов, Пресман, 2003; Квакернаак, Сиван, 1977) вид оптимального установившегося закона управления на бесконечном интервале времени совпадает с управлением в задаче без шума, что наводит на мысль о справедливости подобного факта и для ситуации с нарастающим возмущением. Условия указанного вида включают, например, равномерную вполне управляемость пары (A_t, B_t) и равномерную вполне восстанавливаемость пары (A_t, Q_t) или справедливость экспоненциальной оценки фундаментальной матрицы для функции A_t . Напомним, что фундаментальная матрица $\Phi(t, s)$ для матричной функции A_t , $t \geq 0$, является решением задачи

$$\frac{\partial \Phi(t, s)}{\partial t} = A_t \Phi(t, s), \quad \Phi(s, s) = \mathbf{I}, \quad (13)$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица. При этом $\Phi(t, s) = \Phi(t, 0)\Phi(0, s)$, $\Phi(s, t) = \Phi^{-1}(t, s)$.

Из (Белкина, Кабанов, Пресман, 2003) известно, что существуют предположения наиболее общего вида, гарантирующие упомянутые выше свойства системы. Эти предположения приводятся ниже.

Предположение 3. Функции A_t, B_t, Q_t, R_t , $t \geq 0$ таковы, что существует абсолютно-непрерывная ограниченная функция Π_t , $t \geq 0$ со значениями в множестве нетрицательно определенных симметричных матриц, удовлетворяющая уравнению Риккати

$$\dot{\Pi}_t + \Pi_t A_t + A'_t \Pi_t - \Pi_t B_t R_t^{-1} B'_t \Pi_t + Q_t = 0, \quad (14)$$

и такая, что фундаментальная матрица $\Phi_A(t, s)$ для функции $A_t := A_t - B_t R_t^{-1} B'_t \Pi_t$ допускает экспоненциальную оценку

$$\|\Phi_A(t, s)\| \leq \kappa_1 e^{-\kappa_2(t-s)}, \quad s \leq t, \quad (15)$$

при некоторых положительных константах $\kappa_1, \kappa_2 > 0$.

Предположение 4. Существует константа $c_0 > 0$, такая что для любой пары $(x_t, u_t)_{t \leq T}$, удовлетворяющей уравнению

$$dx_t = A_t x_t dt + B_t u_t dt, \quad x_0 = 0, \quad (16)$$

справедливо неравенство

$$\|x_T\|^2 + \int_0^T \|x_t\|^2 dt \leq c_0 \int_0^T (x_t' Q_t x_t + u_t' R_t u_t) dt. \quad (17)$$

Как будет показано далее, предположения 3 и 4 действительно обеспечивают требуемый результат о существовании управления U^* оптимального в смысле определения 3 (определения 4).

Теорема 1. Пусть выполнены предположения 2–4. Тогда управление вида

$$U_t^* = -R_t^{-1} B_t' \Pi_t X_t^*, \quad (18)$$

где процесс $\{X_t^*\}_{t=0}^\infty$ задается уравнением

$$dX_t^* = (A_t - B_t R_t^{-1} B_t' \Pi_t) X_t^* dt + G_t dw_t, \quad X_0^* = x, \quad (19)$$

является:

а) решением задачи (11), если в предположении 2 константа $c_G = 0$;

б) решением задачи (12), если в предположении 2 константа $c_G > 0$.

В доказательстве теоремы 1 будет использоваться следующая лемма.

Лемма 1. Пусть выполнены предположения 2 и 3. Тогда

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left(E \|X_T^*\|^2 / \int_0^T \|G_t\|^2 dt \right) = c_E, \quad (20)$$

где $c_E = 0$, если в предположении 2 $c_G = 0$ и $c_E > 0$ при $c_G > 0$.

Доказательство. Решение уравнения (19) имеет вид

$$X_T^* = \Phi_A(T, 0)x + \int_0^T \Phi_A(T, t) G_t dw_t, \quad (21)$$

где $\Phi_A(t, s)$ – фундаментальная матрица для функции $\mathcal{A}_t := A_t - B_t B_t' \Pi_t$. Используя свойство изометрии Ито, получим

$$E \|X_T^*\|^2 \leq \|\Phi_A(T, 0)\|^2 \|x\|^2 + \int_0^T \|\Phi_A(T, t)\|^2 \|G_t\|^2 dt.$$

Тогда, с учетом экспоненциальной оценки (15) из предположения 3, имеем

$$E \|X_T^*\|^2 \leq c e^{-2\kappa_2 T} \|x\|^2 + c \int_0^T e^{-2\kappa_2(T-t)} \|G_t\|^2 dt. \quad (22)$$

В дальнейшем в качестве c будем обозначать некоторую константу, конкретное значение которой не играет роли и может меняться от формулы к формуле. Применяя (22), находим по правилу Лопиталя предел

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} E \|X_T^*\|^2 / \int_0^T \|G_t\|^2 dt &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{2\kappa_2 t} \|G_t\|^2 dt / \left(e^{2\kappa_2 T} \int_0^T \|G_t\|^2 dt \right) = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} e^{2\kappa_2 T} \|G_T\|^2 / \left(2\kappa_2 e^{2\kappa_2 T} \int_0^T \|G_t\|^2 dt + e^{2\kappa_2 T} \|G_T\|^2 \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} 1 / \left(1 + 2\kappa_2 \int_0^T \|G_t\|^2 dt / \|G_T\|^2 \right) = c_E, \end{aligned}$$

что также следует из применения правила Лопиталя при вычислении

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \|G_T\|^2 / \int_0^T \|G_t\| dt = 2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{d \ln \|G_T\|}{dt} = 2c_G.$$

Очевидно, что $c_E = 0$ для $c_G = 0$ и $c_E > 0$ при $c_G > 0$. ■

Доказательство теоремы 1. Зафиксируем произвольное допустимое управление $U \in \mathcal{U}$ и обозначим через X_t соответствующий ему процесс, определяемый по (8), а также $x_t := X_t - X_t^*$, $u_t := U_t - U_t^*$. Заметим, что пара $(x_t, u_t)_{t \leq T}$ удовлетворяет (16). При условии справедливости предположений 3 и 4 в (Белкина, Кабанов, Пресман, 2003) получена оценка вида

$$J_T(U^*) \leq J_T(U) + c_1 \|X_T^*\|^2 - \frac{1}{c_0} \int_0^T \|x_t\|^2 dt - 2 \int_0^T x_t' \Pi_t G_t dw_t, \quad (23)$$

где $c_1, c_0 > 0$ – некоторые константы.

Взяв математическое ожидание от обеих частей (23), используя нормировку $\int_0^T \|G_t\|^2 dt$, приходим к оценке

$$\frac{E J_T(U^*)}{\int_0^T \|G_t\|^2 dt} \leq \frac{E J_T(U)}{\int_0^T \|G_t\|^2 dt} + c_1 \frac{E \|X_T^*\|^2}{\int_0^T \|G_t\|^2 dt}. \quad (24)$$

В предельном переходе при $T \rightarrow \infty$ применим утверждение леммы 1:

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{E J_T(U^*)}{\int_0^T \|G_t\|^2 dt} \leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{E J_T(U)}{\int_0^T \|G_t\|^2 dt} + c_E, \quad (25)$$

т.е. управление U^* является решением задачи (11) при $c_G = 0$ и задачи (12), если $c_G > 0$. Осталось проверить, что значение критерия в (25) на управлении U^* – конечно. Из (14) и (19) с помощью формулы Ито получим, что

$$d((X_t^*)' \Pi_t X_t^*) = -\{(X_t^*)' Q_t X_t^* + (U_t^*)' R_t U_t^*\} dt + tr(G_t' \Pi_t G_t) dt + 2(X_t^*)' \Pi_t G_t dw_t,$$

т.е.

$$J_T(U^*) = x' \Pi_0 x - (X_T^*)' \Pi_T X_T^* + \int_0^T tr(G_t' \Pi_t G_t) dt + 2 \int_0^T (X_t^*)' \Pi_t G_t dw_t. \quad (26)$$

Соответственно,

$$E J_T(U^*) \leq x' \Pi_0 x + \int_0^T tr(G_t' \Pi_t G_t) dt,$$

откуда с учетом ограниченности функции Π_t получаем, что

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \left(E J_T(U^*) / \int_0^T \|G_t\|^2 dt \right) < \infty. \quad \blacksquare$$

Наряду с оптимальностью в среднем, о которой говорилось выше, возникает понятие стохастической оптимальности, основанной на изучении асимптотического поведения самих функционалов – в том или ином вероятностном смысле. Для дальнейших определений стохастической оптимальности будем использовать понятие процесса дефекта управления U^* (Белкина, Кабанов, Пресман, 2003).

Определение 5. Процессом дефекта для управления U^* на управлении $U \in \mathcal{U}$ называется процесс

$$\Delta_T(U) := J_T(U^*) - J_T(U), \quad T > 0. \quad (27)$$

Выбирая всевозможные $U \in \mathcal{U}$, будем иметь семейство процессов $\{\Delta_T(U)\}_{U \in \mathcal{U}}$. Исследуя это семейство, можно оценить риск от применения оптимального в среднем управления. Риск возникает из-за того, что $J_T(U^*)$ (см. (26)) является случайной величиной и на каких-то элементарных исходах может превышать $J_T(U)$. Это отражается в положительной части процесса дефекта, поэтому оценивание осуществим сверху, сформулировав соответствующее определение (Белкина, Кабанов, Пресман, 2003).

Определение 6. Неубывающая функция h_T является *верхней функцией для семейства процессов дефекта* $\{\Delta_T(U)\}_{U \in \mathcal{U}}$, если для любого $U \in \mathcal{U}$ существует почти наверное конечный момент времени T_0 , такой что $\Delta_T(U) \leq h_T, \quad \forall T > T_0$.

В (Белкина, Кабанов, Пресман, 2003) в случае стандартного линейно-квадратического регулятора с ограниченной матричной функцией G_t для семейства процессов дефекта была найдена оценка сверху в виде $h_T = b_0 \ln T$ ($b_0 > 0$ – некоторая константа). В следующем разделе будут исследованы вероятностные свойства управления U^* и приведен вид верхней функции для ситуации нарастающих возмущений.

4. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СВОЙСТВА ОПТИМАЛЬНОГО В СРЕДНЕМ УПРАВЛЕНИЯ И ОЦЕНКА РИСКА

Сначала перепишем (23) в терминах процесса дефекта (27)

$$\Delta_T(U) \leq c_1 \|X_T^*\|^2 + \mathcal{R}_T, \quad (28)$$

где

$$\mathcal{R}_T := -\frac{1}{c_0} \int_0^T \|x_t\|^2 dt - 2 \int_0^T x_t' \Pi_t G_t dw_t, \quad (29)$$

c_1, c_0 – некоторые константы.

Для оценки слагаемых в (28) будем использовать понятие верхней функции для произвольного процесса $\{Y_t\}_{t=0}^\infty$, определенного на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ с фильтрацией $\mathbf{F} = (\mathcal{F})_{t \geq 0}$.

Определение 7. Неубывающая функция h_T^* является *верхней функцией для процесса* $\{Y_t\}_{t \geq 0}$, если существует почти наверное конечный момент времени $t_0(\omega)$, такой что неравенство $Y_T \leq h_T^*$ выполняется с вероятностью единица для любого $T > t_0$.

Лемма 2. Пусть выполнены предположения 2 и 3. Тогда верхняя функция для процесса $\|X_T^*\|^2$, задаваемого (19), имеет вид $h_T^* = c^* \|G_T\|^2 \ln T$ ($c^* > 0$ – некоторая константа).

Доказательство. Следуя идее (Белкина, Кабанов, Пресман, 2003, доказательство леммы А.2), рассмотрим процесс $\{\hat{X}_t\}_{t=0}^\infty$, динамика которого задается уравнением

$$d\hat{X}_t = -\kappa_2 \mathbf{I} \hat{X}_t dt + G_t dw_t, \quad \hat{X}_0 = 0, \quad (30)$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица. Решая (30) и произведя классическую замену времени в стохастическом интеграле для каждой компоненты решения $\hat{X}_t^i, i = 1, \dots, n$, получим

$$\hat{X}_T^i = e^{-\kappa_2 T} \sum_{j=1}^d \int_0^T e^{\kappa_2 t} G_t^{ij} dw_t^j = e^{-\kappa_2 T} M_T^i = e^{-\kappa_2 T} \hat{w}_{\langle M_T^i \rangle}, \quad (31)$$

где $\hat{w}^i$ – винеровский процесс, G_t^{ij} – элементы матрицы G_t и $\langle M_T^i \rangle = \int_0^T e^{2\kappa_2 t} \left(\sum_{j=1}^d (G_t^{ij})^2 \right) dt$ – квадратическая характеристика мартингала M_T^i . Из предположения 2 следует, что существу-

ет хотя бы одно i , при котором $\langle M_T^i \rangle \rightarrow \infty$, $T \rightarrow \infty$. Тогда применим закон повторного логарифма для винеровского процесса $\hat{w}^i$, т.е. существуют число $c > 0$ и момент времени $t_0^i(\omega)$, такие что $(\hat{w}_{\langle M_T^i \rangle}^i)^2 \leq c \langle M_T^i \rangle \ln \ln \langle M_T^i \rangle$ при $T > t_0^i$. Также в силу предположения 2 имеем соотношение

$$\|G_t\|^2 \leq e^{\tilde{c}t} \quad (\tilde{c} > 0 - \text{некоторое число}), \text{ поэтому } \ln \ln \langle M_T^i \rangle \leq c \ln T. \text{ Следовательно, при } T > t_0^i \text{ не-}$$

$$\text{равенство } (\hat{X}_T^i)^2 \leq c e^{-2\kappa_2 T} \int_0^T e^{2\kappa_2 t} \|G_t\|^2 dt \ln T \text{ выполняется с вероятностью единица. Обозначим}$$

$$\alpha_T := e^{-2\kappa_2 T} \int_0^T e^{2\kappa_2 t} \|G_t\|^2 dt, \text{ тогда для процесса } \|\hat{X}_T\|^2$$

$$\|\hat{X}_T\|^2 \leq \hat{c} \alpha_T \ln T, \quad (32)$$

с вероятностью единица при $T > \hat{t}_0(\omega)$ для некоторого $\hat{t}_0 = \hat{t}_0(\omega)$ и некоторой константы $\hat{c} > 0$. С помощью правила Лопиталья нетрудно убедиться в том, что $\lim_{T \rightarrow \infty} (\alpha_T / \|\hat{X}_T\|^2) = c > 0$, поэтому в качестве верхней функции для процесса $\|\hat{X}_T\|^2$ возьмем $\hat{h}_T = \hat{c}_1 \|\hat{X}_T\|^2 \ln T$ ($\hat{c}_1 > 0$ – некоторая константа).

Определим процесс $Y_t = X_t^* - \hat{X}_t$, его динамика задается уравнением $dY_t = A_t Y_t dt + (A_t + \kappa_2 \mathbf{I}) \hat{X}_t dt$,

$$Y_0 = x, \text{ т.е. } Y_T = \Phi(T, 0)x + \int_0^T \Phi(T, t)(A_t + \kappa_2 \mathbf{I}) \hat{X}_t dt. \text{ Применим экспоненциальную оценку (15) и, с}$$

учетом ограниченности функции A_t , получим

$$\|Y_T\| \leq \kappa_1 e^{-\kappa_2 T} \|x\| + c \int_0^T e^{-\kappa_2(T-t)} \|\hat{X}_t\| dt.$$

Разделив предыдущее неравенство на неубывающую функцию $\hat{h}_t^{1/2}$, будем иметь

$$\|Y_T\| \hat{h}_T^{-1/2} \leq \kappa_1 e^{-\kappa_2 T} \|x\| \hat{h}_T^{-1/2} + c \int_0^{\hat{t}_0} e^{-\kappa_2(T-t)} \|\hat{X}_t\| \hat{h}_T^{-1/2} dt + c \int_0^T e^{-\kappa_2(T-t)} \|\hat{X}_t\| \hat{h}_t^{-1/2} dt, \quad (33)$$

где $\hat{t}_0$ – определенный выше момент времени. Первые два слагаемых в правой части (33) стремятся почти наверное к нулю, а последнее, в силу определения верхней функции $\hat{h}_t$, ограничено. Следовательно, верхняя функция $\hat{h}_T^*$ для процесса $\|X_T^*\|^2$ совпадает с $\hat{h}_t$ с точностью до константы, т.е. $\hat{h}_T^* = c^* \|\hat{X}_T\|^2 \ln T$. ■

Лемма 3. Пусть выполнены предположения 2 и 3. Тогда верхняя функция для процесса $\mathcal{R}_T$, задаваемого (29), имеет вид $\bar{h}_T = \bar{c} \|\hat{X}_T\|^{2(1+\delta)}$ ($\bar{c} > 0$ – некоторая константа, $\delta > 0$ – как угодно малое число).

Доказательство. Рассмотрим мартингал $M_T = \int_0^T x_t' \Pi_t G_t dw_t$, его квадратическая характеристика $\langle M_T \rangle$ имеет вид $\langle M_T \rangle = \int_0^T \|G_t' \Pi_t x_t\|^2 dt$. На множестве $\{\langle M_T^i \rangle \rightarrow \infty, T \rightarrow \infty\}$ применим закон повторного логарифма для мартингалов (Wang, 1993) к M_T , т.е. существуют число $c > 0$ и $T_0(\omega)$, такие что $M_T \leq c \sqrt{\langle M_T \rangle \ln \ln \langle M_T \rangle}$ при $T > T_0$. Очевидно, что $M_T \leq c \langle M_T \rangle^\gamma$, где константа $\gamma > 0,5$.

Заметим, что из ограниченности функции Π_t и пункта 1 предположения 2 следует оценка

$$\langle M_T \rangle = \int_0^T \|G_t' \Pi_t x_t\|^2 dt \leq c \int_0^T \|G_t\|^2 \|x_t\|^2 dt =$$

$$= c \left(\|G_T\|^2 \int_0^T \|x_t\|^2 dt - 2 \int_0^T \|G_t\|^2 \frac{d \ln \|G_t\|}{dt} \int_0^t \|x_s\|^2 ds dt \right) \leq c \|G_T\|^2 \int_0^T \|x_t\|^2 dt,$$

поэтому

$$M_T \leq c \|G_T\|^{2\gamma} \left(\int_0^T \|x_t\|^2 dt \right)^\gamma, \quad T > T_0. \quad (34)$$

Таким образом, $\mathcal{R}_T$ оценивается в виде

$$\mathcal{R}_T \leq -\frac{1}{c_0} \int_0^T \|x_t\|^2 dt + c (\|G_T\|)^\gamma \left(\int_0^T \|x_t\|^2 dt \right)^\gamma. \quad (35)$$

Рассмотрим задачу максимизации функции вида $g(y) = ay^\gamma - by$, $a, b > 0$ – константы. Точка максимума y^* этой функции находится из условия $a\gamma y^{\gamma-1} = b$, т.е. $y^* = (b/a\gamma)^{1/(\gamma-1)}$ и значение $g(y^*) = a(y^*)^\gamma - b\gamma y^* = y^*(a(y^*)^{(\gamma-1)} - b) = by^*(1/\gamma - 1) = ca^{1/(1-\gamma)}$.

Положим $y = \int_0^T \|x_t\|^2 dt$, $a = c \|G_T\|^{2\gamma}$, $b = 1/c_0$, тогда из полученного выше и (35) следует

$$\mathcal{R}_T \leq c \|G_T\|^{2\gamma/(1-\gamma)} = c \|G_T\|^{2(1+\delta)}, \quad T > T_0, \quad (36)$$

где $c > 0$ – некоторая константа, $\delta > 0$ – сколь угодно малое число. Последнее равенство в (36) вытекает из того, что $\gamma > 0,5$ и соотношение $2 + 2\delta = 2\gamma/(1-\gamma) > 2$.

Для множества $\{\langle M_\infty \rangle < \infty\}$ очевидно, что $M_T \leq \bar{c} \|G_T\|^{2(1+\delta)}$ при $T > T_1(\omega)$, так как функция $\|G_T\|^2 \rightarrow \infty$, $T \rightarrow \infty$. Таким образом, верхняя функция h_T для $\mathcal{R}_T$ имеет вид $h_T = \bar{c} \|G_T\|^{2(1+\delta)}$. ■

Теорема 2. Пусть выполнены предположения 2–4. Тогда верхняя функция h_T для семейства процессов дефекта $\{\Delta_T(U)\}_{U \in \mathcal{U}}$ имеет вид $h_T = \max\{h_T^*, \bar{h}_T\}$, где функции h_T^* и $\bar{h}_T$ определяют в леммах 2 и 3 соответственно.

Доказательство теоремы 2 следует из оценки (28), лемм 2 и 3. ■

5. УПРАВЛЕНИЕ И ОЦЕНКА РИСКА ДЛЯ СИСТЕМ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ДИСКОНТИРОВАНИЕМ

В этой части работы применим результаты разд. 3–4, касающиеся оптимальности в среднем и оценки риска, к системе (1)–(2) с отрицательным дисконтированием, используя обратное преобразование к (5) и замечание 1.

Теорема 3. Пусть выполнено предположение 1. Кроме того, предположим, что параметры системы (1)–(2) таковы, что для $A_t = A - 0,5\varphi_t \mathbf{I}$, $B_t \equiv B$, $Q_t \equiv Q$ и $R_t \equiv R$ выполнены предположения 3 и 4. Тогда управление вида

$$\tilde{U}_t^* = -R^{-1} B^T \Pi_t (\tilde{X}_t^* - \tilde{x}_0) + \tilde{u}_0, \quad (37)$$

где процесс $\{\tilde{X}_t^*\}_{t=0}^\infty$ задается уравнением

$$d\tilde{X}_t^* = (A - BR^{-1} B^T \Pi_t) (\tilde{X}_t^* - \tilde{x}_0) dt + G dw_t, \quad \tilde{X}_0^* = \tilde{x}, \quad (38)$$

является:

а) решением задачи (3), если в предположении 1 константа $c_f = 0$;

б) решением задачи (4), если в предположении 1 константа $c_f > 0$.

Доказательство. К процессу, задаваемому (6), применим утверждение теоремы 1 с $G_t = \sqrt{f_t} G$. Определяя $\tilde{X}_t^* - \tilde{x}_0 = \tilde{X}_t^*/\sqrt{f_t}$, $\tilde{U}_t^* - \tilde{u}_0 = \tilde{U}_t^*/\sqrt{f_t}$, по (19) находим

$\tilde{U}_t^* - \tilde{u}_0 = -R^{-1} B' \Pi_t (\tilde{X}_t^* - \tilde{x}_0)$. Подставив $\tilde{U}^*$ в (6), получим $d\tilde{X}_t^* = A\tilde{X}_t^* dt - BR^{-1} B' \Pi_t (\tilde{X}_t^* - \tilde{x}_0) dt + B\tilde{u}_0 dt + Gdw_t$, $\tilde{X}_0^* = \tilde{x}$. По определению $A\tilde{x}_0 = B\tilde{u}_0 = \bar{0}$, что и приводит к (38). ■

Для оценки риска от применения оптимального в среднем управления $\tilde{U}^*$ в теореме 2 положим $G_t = \sqrt{f_t} G$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда верхняя функция $\tilde{h}_T$ для семейства процессов дефекта $\{\Delta_T(\tilde{U})\}_{\tilde{U} \in \tilde{\mathcal{U}}}$ имеет вид

$$\tilde{h}_T = \max \{\tilde{h}_T^{(1)}, \tilde{h}_T^{(2)}\},$$

где $\tilde{h}_T^{(1)} = \tilde{c}_1 f_t \ln T$, $\tilde{h}_T^{(2)} = \tilde{c}_2 f_t^{1+\tilde{\beta}}$, и при этом $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2 > 0$ – некоторые константы, $\tilde{\beta} > 0$ – сколь угодно малое число.

Замечание 2. Систему управления (1)–(2) можно исследовать и при $\|G_t\| \equiv \mathbf{O}$. Для этого удобнее будет рассмотреть (8)–(9). Из (21) очевидно, что $\|X_T^*\| \rightarrow 0$, $T \rightarrow \infty$, поэтому с помощью предельного перехода в (23) получаем $\limsup_{T \rightarrow \infty} J_T(U^*) \leq \limsup_{T \rightarrow \infty} J_T(U)$, что доказывает оптимальность управления U^* в смысле решения задачи $\limsup_{T \rightarrow \infty} J_T(U) \rightarrow \inf$. По (26) $\lim_{T \rightarrow \infty} J_T(U^*) = x' \Pi_0 x$, что совпадает с результатом для обычного детерминированного линейного регулятора, поэтому нормировка в (3) оказывается излишней. Более того, из (23) и асимптотического стремления $\|X_T^*\|$ к нулю вытекает, что оценкой рисков от применения управления U^* в соответствии с определением 6 является любая положительная, сколь угодно малая, константа. Действительно, неопределенности в системе нет, и риск получения непредсказуемых значений целевого функционала отсутствует. Именно из этих соображений случай $\|G_t\| \equiv \mathbf{O}$ не был включен в исходную постановку задачи.

Далее рассмотрим модель, предложенную в (Karp, 2005), которая относится к области экологической экономики. Предполагается, что регулирующий орган может контролировать текущие выбросы (эмиссию) вредных веществ, стараясь поддерживать их концентрацию вблизи заданного уровня для стабилизации степени загрязнения окружающей среды. Важность такого подхода подчеркивается во многих исследованиях, связанных с экологическим моделированием (Griffin, 2003; Bosch, Dave et al., 2007).

Изменение объема загрязняющих веществ моделируется уравнением

$$dS_t = -aS_t dt + Z_t dt + \sigma dw_t, \quad S_0 = s_0, \quad (39)$$

где S_t – накопленный объем загрязняющих веществ, параметр $a > 0$ характеризует способность окружающей среды к самоочищению, $\sigma > 0$ – степень влияния неконтролируемых факторов на динамику загрязнения, w_t – стандартный одномерный винеровский процесс, Z_t – выбросы в текущий момент времени t , выступающие в роли неупреждающего управления, согласованного с фильтрацией, порожденной процессом w_t вплоть до момента t , s_0 – известный начальный объем загрязнения.

Теперь перейдем к тому, каким же образом может быть оценена та или иная политика, определяющая уровень выбросов. Во-первых, согласно подходу, широко применяемому при моделировании экономических, экологических и др. процессов (см., например, (Lanza, Sammarco, 1993; Sengupta, 1970)) для получения явного вида управляющих воздействий и их последующей интерпретации, минимизируются отклонения переменных модели от их плановых уровней, задаваемые функционалом вида (2). При этом значения плановых показателей могут выбираться, исходя из различных соображений. Допустим, они могут являться решениями различных оптимизационных задач, учитывающих интересы других субъектов. Например, в случае управления выбросами вредных веществ соответствующий плановый уровень эмиссий носит название business-as-usual-emissions (BAU, эмиссии базового сценария для бизнеса (Griffin, 2003)). Возможны и другие варианты, зависящие от целей регулирующего органа. К примеру, такой задачей может стать снижение накопленного объема загрязнения до уровня, характерного для доиндустриального этапа развития (Karp, Zhang, 2006). Тогда соответствующее значение будет выступать в качестве планового. Во-вторых, оценка эмиссионной политики может быть произведена с точки зрения издержек и выгод, что является часто встречающимся подходом в области моделирова-

ния для экологической экономики (Херападаеас, 2011; Карп, 2005). В качестве издержек в момент времени будем рассматривать ущерб, возникающий в первую очередь из-за загрязнения окружающей среды (например, последствия глобального потепления при концентрации CO_2). При этом важно отметить (Hasselmann, 2001), что отрицательным эффектом обладает не только увеличение, но и уменьшение объема накопленного газа относительно некоторого заданного уровня, например из-за необходимости в задействовании адаптационных механизмов по корректровке при колебаниях средней температуры земной поверхности (показатель, сильно зависящий от стабильности объема CO_2 в атмосфере). Таким образом, для оценки ущерба можно использовать функцию $\mathcal{D}(S_t) = q(\bar{S} - S_t)^2$, которая характеризует потери из-за отклонения объема загрязнений S_t от заданного уровня $\bar{S} > 0$, константа $q > 0$ (Карп, 2005; Карп, Zhang, 2006). Выгоды от эмиссий, как подчеркивается в (Griffin, 2003, p. 15; Карп, 2005), представлены в виде уменьшения определенного вида издержек (и, соответственно, неположительны). В качестве такого рода издержек (Карп, 2005) рассмотрим функцию $q_1(\bar{Z} - Z_t)^2$, при этом константа $q_1 > 0$, $\bar{Z}$ – плановый уровень выбросов. Это выражение аналогично тому, как определяются так называемые издержки уменьшения отрицательных эффектов (abatement costs), возникающие из-за отклонения текущих выбросов от уровня BAU. Пример выбора параметров модели управляемого процесса (39), в том числе для приведенных выше квадратичных функций издержек, можно посмотреть в (Карп, Zhang, 2006), где также приводятся ссылки на соответствующие эмпирические исследования, также см. расчеты в (Kothari, Dhillon, 2011, Part 6).

Далее, оценка совокупных потерь в момент времени t , как сумма ущерба из-за отклонения накопленного объема веществ от планового и издержек типа abatement costs, с учетом характера временных предпочтений при анализе долгосрочных задач управления, примет вид $f_t(\mathcal{D}(S_t) + q_1(\bar{Z} - Z_t)^2)$, где $f_t > 0$ – дисконтирующая функция, соответствующая отрицательным временным предпочтениям и удовлетворяющая предположению 1. Такой характер временных предпочтений, в частности, соотносится с выводами исследования (Wigley, Richels, Edmonds, 1996), согласно которому снижение концентрации CO_2 в ближайшем будущем (а также связанные с этим издержки) предпочтительнее, чем их реализация в отдаленной перспективе. Возвращаясь к упомянутой ранее цели по стабилизации системы, будем предполагать, что $\bar{Z} = a\bar{S}$. Таким образом, за период $[0, T]$ совокупные потери, с учетом включения в анализ временных предпочтений, составят

$$J_T(Z) = \int_0^T f_t(q(\bar{S} - S_t)^2 + q_1(\bar{Z} - Z_t)^2) dt. \quad (40)$$

Используем теорему 3 для нахождения стратегии управления выбросами Z^* , которая минимизирует долгосрочные ожидаемые потери на единицу дисконта в смысле определений 1 и 2. Проверим выполнение предположений 3 и 4 для системы управления с $A_t = -a - 0,5\varphi_t$, $B_t \equiv 1$, $Q_t \equiv q$, $R_t \equiv q_1$. Определим, согласно (Белкина, Кабанов, Пресман, 2003; Квакернаак, Сиван, 1977), вспомогательную функцию

$$W(t, t_0) = \int_0^T \Phi_{\mathcal{A}}(t, s) B_s B'_s \Phi'_{\mathcal{A}}(t, s) ds, \quad (41)$$

где функция $\Phi_{\mathcal{A}}(t, s)$ определена для $\mathcal{A}_t := A_t = -a - 1/2\varphi_t$, и, как нетрудно проверить, имеет вид

$$\Phi_{\mathcal{A}}(t, s) = \exp \left[-a(t-s) - 0,5 \int_s^t \varphi_\tau d\tau \right].$$

Утверждение 1. Для системы управления с $A_t = -a - 0,5\varphi_t$, $B_t \equiv 1$, $Q_t \equiv q$, $R_t \equiv q_1$ выполняются предположения 3 и 4.

Доказательство. В (Белкина, Кабанов, Пресман, 2003) было показано, что для выполнения предположений 3 и 4 достаточно равномерной вполне управляемости пары (A_t, B_t) и отделимости от нуля $|\det(Q_t)|$ ($\det(\cdot)$ – знак определителя матрицы). Напомним, что пара ограничен-

ных матричных функций (A_t, B_t) называется равномерной вполне управляемой, если существуют такие положительные константы $\alpha, \beta > 0$, что

$$W(t + \beta, t) \geq \alpha I \quad \forall t \geq 0,$$

где знак $\geq$ означает неотрицательную определенность разности соответствующих матриц, $W(t, s)$ задается с помощью (41).

Для рассматриваемой системы найдем

$$W(t + \beta, t) = \int_t^{t+\beta} \exp(-2a(t + \beta - s)) - \int_s^{t+\beta} \varphi_\tau d\tau ds.$$

Из условия отрицательности временных предпочтений ставка дисконтирования $\varphi_t \leq 0$ и

$$W(t + \beta, t) \geq \int_t^{t+\beta} \exp(-2a(t + \beta - s)) ds = (1 - e^{-2a\beta})/2a.$$

Полагая $\alpha = (1 - e^{-2a\beta})/2a > 0$, по определению получаем, что пара (A_t, B_t) является равномерно вполне управляемой. Выполнение второго условия $|\det(Q_t)| = q > 0$ также очевидно. ■

Теперь сформулируем утверждение теоремы 4 для системы (39)–(40).

Утверждение 2. Пусть выполнено предположение 1. Тогда стратегия эмиссии вида

$$Z_t^* = -(1/q_1)\Pi_t(S_t^* - \bar{S}) + \bar{Z}, \quad (42)$$

где процесс накопления загрязняющих веществ $\{S_t^*\}_{t=0}^\infty$ задается уравнением

$$dS_t^* = (-a - (1/q_1)\Pi_t)(S_t^* - \bar{S})dt + \sigma dw_t, \quad S_0^* = s_0, \quad (43)$$

а неотрицательная абсолютно непрерывная функция Π_t удовлетворяет уравнению Риккати

$$\dot{\Pi}_t - 2a\Pi_t - \varphi_t\Pi_t - \Pi_t^2/q_1 + q = 0, \quad (44)$$

является:

а) оптимальной в среднем на бесконечном интервале времени, если в предположении 1 $c_f = 0$;

б) слабо оптимальной в среднем на бесконечном интервале времени, если в предположении 1 $c_f > 0$.

Стратегия (42) означает, что, например, в случае превышения объема загрязнения S_t^* относительно его целевого значения $\bar{S}$ уровень текущих выбросов должен быть уменьшен по сравнению с запланированным $\bar{Z}$. И, наоборот, выбросы корректируются в обратном направлении, если S_t^* не превосходит $\bar{S}$.

Для оценки риска от применения определенной выше эмиссионной политики можно воспользоваться теоремой 4. Например, в случае так называемого “отрицательного гиперболического” дисконтирования, т.е. при $f_t = (1 + \theta t)^{\theta_1/\theta}$ ($\theta_1, \theta > 0$ – константы), максимальной из функций $\tilde{h}_T^{(1)} = \tilde{c}_1 f_T \ln T$ и $\tilde{h}_T^{(2)} = \tilde{c}_2 f_T^{1+\beta}$ будет $\tilde{h}_T^{(2)}$. Таким образом, верхней функцией будет $\tilde{h}_T = \tilde{c}_2 (1 + \theta T)^{(1+\beta)\theta_1/\theta}$.

Возвращаясь к теореме 4, отметим, что оценка $\tilde{h}_T$ в явном виде учитывает временные предпочтения субъектов, которые, как известно, сами по себе также служат отражением риска. В качестве дальнейшего направления исследований выделим включение в функционал (2) вместо $\tilde{x}_0$ и $\tilde{y}_0$ функций $\tilde{x}_t$ и $\tilde{y}_t$. В рассмотренной модели экологической экономики это соответствует изменяющимся во времени плановым уровням объема загрязнений и эмиссий, что актуально на сегодняшний день.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Белкина Т.А., Кабанов Ю.М., Пресман Э.Л. (2003). О стохастической оптимальности для линейно-квадратического регулятора // *Теория вероятностей и ее применения*. Т. 48. № 4.

- Белкина Т.А., Паламарчук Е.С.** (2013). О стохастической оптимальности для линейного регулятора с за-
тахающими возмущениями // *Автоматика и телемеханика*. № 4.
- Квакернаак Х., Сиван Р.** (1977). Линейные оптимальные системы управления. М.: Наука.
- Паламарчук Е.С.** (2010). Управление процессом сходимости цены к равновесному значению при нали-
чии случайных факторов. В сборнике: “Анализ и моделирование экономических процессов”. Вып. 7.
М.: ЦЭМИ.
- Шоломицкий А.Г.** (2005). Теория риска. Выбор при неопределенности и моделирование риска. М: Изда-
тельский дом ГУ ВШЭ.
- Barokas G.** (2012). Selves Indifference, Bounded Irrationality, and The Elicitation of Time Preferences. Working
paper. Tel-Aviv: The Foerder Institute for Economic Research.
- Bell M., Hobbs B.F., Ellis H.** (2003). The Use of Multi-Criteria Decision-Making Methods in the Integrated
Assessment of Climate Change: Implications for IA Practitioners // *Socio-Econ. Planning Sciences*. Vol. 37.
Issue 4.
- Berndsen M., Pligt J. van der** (2001). Time is on my Side: Optimism in Intertemporal Choice // *Acta Psychologica*.
Vol. 108. Issue 2.
- Bosch P., Dave R.** et al. (eds.) (2007). Climate Change 2007 – Mitigation of Climate Change. Working Group
III contribution to the Fourth Assessment Report of the IPCC. Intergovernmental Panel on Climate Change.
N.Y.: Cambridge University Press.
- Brougham R.R., John R.S.** (2007). Age Differences in Preventive Health Decisions in Motivation of Health
Behavior. N.Y.: Nova Science Publishers, Inc.
- Carlson D.A., Haurie H., Leizarowitz A.** (1991). Infinite Horizon Optimal Control: Deterministic and Stochastic
Systems. N.Y.: Springer.
- Fishburn P., Edwards W.** (1997). Discount-Neutral Utility Model for Denumerable Time Streams // *Theory and
Decision*. Vol. 43. No 2.
- Fishburn P.C., Rubinstein A.** (1982). Time Preference // *International Econ. Rev.* Vol. 23. No 3.
- Griffin J.M.** (ed.) (2003). Global Climate Change: The Science, Economics and Politics. Northampton: Edward
Elgar Publishing.
- Gueant O.** (2009). Mean Field Games and Applications to Economics. Ph.D. Thesis. Paris: Universite Paris-
Dauphine.
- Hasselmann K.** (2001). Optimizing Long-Term Climate Management in Global Biogeochemical Cycles in the
Climate System. San Diego: Academic Press.
- Holt C.C.** (1962). Linear Decision Rules for Economic Stabilization and Growth // *The Quarterly J. of Econ.*
Vol. 76. No 1.
- Islam S.M.N.** (2005). Intertemporal and Environmental and Ecological Economics: Mathematical Modelling
of Growth and Sustainability in Dimensions of Environmental and Ecological Economics. Himayatnagar:
Universities Press (India) Private Limited.
- Karp L.** (2005). Global Warming and Hyperbolic Discounting // *J. of Public Econ.* Vol. 89. Issues 2–3.
- Karp L., Zhang J.** (2006). Regulation with Anticipated Learning about Environmental Damages // *J. of
Environmental Econ. and Management*. Vol. 51. Issues 3.
- Koopmans T.C.** (1960). Stationary Ordinal Utility and Impatience // *Econometrica*. Vol. 28. Issue 2.
- Kothari D.R., Dhillon J.S.** (2011). Power System Optimization. New Delhi: Prentice-Hall of India.
- Lanza A., Sammarco G.** (1993). Environmental and Economic Effects of the European Tax: the Italian Case in
The European Carbon Tax: An Economic Assessment. Norwell: Kluwer Academic Publishers.
- Leizarowitz A.** (1988). Controlled Diffusion Processes on Infinite Horizon with the Overtaking Criterion //
Applied Mathematics Optimization. Vol. 17. No 1.
- Loewenstein G., Prelec D.** (1991). Negative Time Preference // *American Econ. Rev.* Vol. 81. Issue 2.
- Loewenstein G., Prelec D.** (1992). Anomalies in Intertemporal Choice: Evidence and an Interpretation // *The
Quarterly J. of Econ.* Vol. 107. No 2.
- McCaffery E.J., Slemrod J.** (eds.) (2006). Behavioral Public Finance. N.Y.: Russell Sage Foundation.

- Mitra T.** (1981). Some Results on the Optimal Depletion of Exhaustible Resources Under Negative Discounting // *Rev. of Econ. Studies*. Vol. 48. No 3.
- Moore M.A., Boardman A.E.** et al. (2004). Just Give Me a Number! Practical Values for the Social Discount Rate // *J. of Policy Analysis and Management*. Vol. 23. Issue 4.
- Newell R.G., Pizer W.A.** (2003). Discounting the Distant Future: How Much Do Uncertain Rates Increase Valuations? // *J. of Environmental Econ. and Management*. Vol. 46. Issue 1.
- Ramsey F.P.** (1928). A Mathematical Theory of Saving // *The Econ. J.* Vol. 38. No 152.
- Sengupta J.K.** (1970). Optimal Stabilization Policy with a Quadratic Criterion Function // *The Rev. of Econ. Studies*. Vol. 37. No 1.
- Stettner L.** (1989). On Some Stopping and Impulsive Control Problems with a General Discount Rate Criteria // *Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences. Probability and Mathematical Statistics*. Vol. 10. Fasc. 2.
- Thaler R.** (1981). Some Empirical Evidence on Dynamic Inconsistency // *Economics Letters*. Vol. 8. Issue 3.
- Turnovsky S.J.** (1977). Macroeconomic Analysis and Stabilization Policy. Cambridge, MA: Cambridge University Press.
- Veinott A.F. Jr.** (1969). Discrete Dynamic Programming with Sensitive Discount Optimality Criteria // *The Annals of Mathematical Statistics*. Vol. 40. No 5.
- Voinov A.A.** (2008). Systems Science and Modeling for Ecological Economics. L.: Academic Press.
- Wang, J.-G.** (1993). A Law of the Iterated Logarithm for Stochastic Integrals // *Stochastic Processes and their Applications*. Vol. 47. Issue 2.
- Weide J.A.M. van der, Noortwijk J.M. van, Suyono S.** (2008). Renewal Theory with Discounting in Advances in Mathematical Modeling for Reliability. Amsterdam: IOS Press.
- Weitzman M.L.** (2001). Gamma Discounting // *American Econ. Rev.* Vol. 91. No 1.
- Wigley T.M.L., Richels R., Edmonds J.A.** (1996). Economic and Environmental Choices in the Stabilization of Atmospheric CO₂ Concentrations // *Nature*. Vol. 379.
- Xepapadeas A.** (2011). Stochastic Analysis: Tools for Environmental and Resource Economics Modeling in Research Tools in Natural Resource and Environmental Economics. Singapore: World Scientific Publishing.

Поступила в редакцию
07.11.2012 г.

Risk Estimation for Linear Economic Systems under Negative Time Preferences

E.S. Palamarchuk

We consider stochastic linear economic control system with a quadratic cost function taking into account the agents' negative time preferences that can be represented by increasing discount function. We give a definition of average optimality over an infinite time horizon for such a system. Risk of using the obtained optimal control law is estimated. The results are applied to an ecological-economic model.

Keywords: linear stochastic system, negative time preference, infinite planning horizon.