ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2013, том 49, № 3, с. 120–122

ЗАМЕТКИ И ПИСЬМА

ВРЕМЕННОЙ ЛАГ КАК ФАКТОР ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

© 2013 г. Т.Р. Кильматов

(Владивосток)

Ускоренная динамика изменений внешней среды и значимость временных задержек в принятии управленческих решений. Вследствие нестабильности мировых финансовых рынков, ускорения динамики социально-экономических процессов усложнилась проблема обеспечения устойчивости и стабильности экономического агента в современных условиях. Здесь особую роль играет быстрое и правильное принятие управленческих решений, реагирующих на внешние изменения. Задержка в реализации управленческих решений становится одним из определяющих факторов успешного существования агента. Данный фактор особенно важен для России вследствие относительно высокой централизации управления государством и значительных географических размеров. Это способствует возникновению временных задержек между принятием и исполнением управленческих решений на макроэкономическом уровне, в частности для удаленных регионов, например Приморского края.

Влияние временных лагов на функционирование экономических систем обсуждается с середины прошлого века (см. обзор литературы, например, в (Bellman, 1949; Philips, 1957; Самарский, Михайлов, 2001)). В приложении к экономике учет временных задержек исследуется прежде всего между производством и реализацией товаров, между капиталовложениями и будущей отдачей от них, между финансовыми вложениями в научные исследования и получением прибыли от новых разработок. Ясно, что временные лаги приводят к торможению динамики развития, поэтому нами прежде делались попытки использовать подобные модели в приложении к экономике Приморского края (Кильматов, 2003; Кильматов, Капитонова, 2004).

Математический аппарат моделирования временных задержек начал развиваться после Второй мировой войны для практических запросов управления быстрыми технологическими процессами (Bellman, 1949; Мышкис, 1950). Подобные процессы описываются с помощью дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами, причем данная математическая теория получила значительное самостоятельное саморазвитие (см. обзор литературы в (Эльсгольц, Норкин, 1971; Бекларян, 1996, 2007)). Теория имеет широкое технологическое применение. Например, в случае управления космическими роботами с Земли команды поступают с задержкой. Интуитивно понятно, что слишком большая задержка может привести к катастрофе, даже при верных командах управления.

Ниже приводится интерпретация теории в приложении к устойчивости экономических систем. Преследуются две цели. Первая – продемонстрировать на простом примере применение неклассической математической теории; вторая – показать условия, при которых изначально устойчивая система может терять устойчивость только вследствие временных задержек в процессе управления.

Критическое запаздывание в исполнении решений приводит устойчивую систему к неустойчивости. Рассмотрим простую линейную модель с запаздывающей переменной. Обозначим через $x = x(t)$ траекторию, имитирующую динамику развития экономического агента. В линейном приближении полагаем, что управленческое воздействие на траекторию пропорционально отклонению траектории от своего стационарного состояния. Будем называть правильным управленческим решением такое воздействие, которое обеспечивает устойчивость стационарной траектории, а неверным – управленческое решение, которое приводит к ее неустойчивости.

В простейшем случае имеем $dx/dt + \gamma x(t)$. При $x(0) = x_0$ аналитическое решение имеет вид $x(t) = (x_0 - x_*)\exp(-\gamma t) + x_*$. Очевидно, что правильное управленческое решение соответствует положительному значению параметра γ, в этом случае обеспечивается асимптотическая устойчивость траектории. Легко дать экономическую интерпретацию входящим величинам: x_0 – начальное состояние экономического агента; x_* – будущее целевое состояние экономического агента; γ – нормированная на время эластичность относительного отклонения траектории, в данном случае γ^{-1} – время, за которое относительное отклонение траектории изменится в exp (–1) раз. Ниже рассматриваем только ситуацию $\gamma > 0$.

Следуя теории (Эльцгольц, Норкин, 1971; Бекларян, 1996, 2007), покажем, что представленная устойчивая траектория может потерять устойчивость, если часть управленческих воздействий будет исполняться с временной задержкой. Пусть α ($0 < \alpha < 1$) – относительная доля управленческих решений, которые реализовываются с задержкой по времени τ. Тогда динамическая траектория экономического агента будет описываться следующим уравнением с запаздывающей переменной

$$\frac{dx}{dt} + \gamma(1-\alpha)x(t) + \gamma\alpha x(t-\tau) = \gamma x_*. \tag{1}$$

Интерпретация уравнения следующая. Динамика системы определяется принятием правильных управленческих решений, $\gamma > 0$. При отсутствии временной задержки (или $\tau = 0$, или $\alpha = 0$) получаем предыдущий устойчивый случай.

Для построения аналитического решения уравнения (1) по аналогии с задачей Коши надо задать начальное значение на начальном множестве $-\tau \leq t \leq 0$. Для простоты положим начальную функцию в виде линейной, $\phi(t) = x_0 + ct$. Решение уравнения (1) можно построить методом шагов. В частности, на первом шаге при $0 \leq t \leq \tau$ уравнение (1) преобразуется к виду $\dot{x}(t) + \gamma(1-\alpha)x(t) + \gamma\alpha[x_0 + c(t-\tau)] = \gamma x_*$, откуда динамическая траектория имеет вид

$$x_1(t) = [x_0 - x_{01}]\exp(-(1-\alpha)t) + x_{01} - \frac{\alpha c}{1-\alpha}t, \quad 0 \leq t \leq \tau, \tag{2}$$

где

$$x_{01} = \frac{\alpha c + (1-\alpha)(x_* - \alpha x_0 + \alpha c\tau)}{(1-\alpha)^2}.$$

На втором шаге аналитическое решение $x_2(t)$ строится по аналогии на отрезке $\tau \leq t \leq 2\tau$ и т.д. Решение на шаге n при $(n-1)\tau \leq t \leq n\tau$ имеет структуру формулы (2), только экспонента содержит множитель в виде многочлена $(n-1)$ степени относительно аргумента t.

Принципиальное отличие модели с запаздыванием от аналогичной модели без отклонения аргумента состоит в том, что она может потерять устойчивость при положительных γ, если $\alpha > 0{,}5$, т.е. если более половины управленческих решений исполняется с задержкой. Причем в этом случае величина временной задержки должна превышать критическое значение τ_*, которое определяется по формуле

$$\tau_* = \arccos(-(1-\alpha)/\alpha)/\sqrt{2\alpha-1} \tag{3}$$

(Эльсцгольц, Норкин, 1971, глава 3). Превышение времени задержки относительно своего критического значения приводит к потере устойчивости решения уравнения (1). В таблице представлена количественная зависимость (3) между временем отсрочки при исполнении управленческих решений и относительным числом таких решений. Из таблицы видно, что чем больше доля “запоздалых” решений α, тем система более близка к порогу своей неустойчивости.

$\alpha\times100\%$	55%	75%	95%	100%
τ_*	8,00	2,70	1,71	1,57
$\alpha\tau^*$	4,40	2,03	1.62	1,57

Критическое значение временного лага зависит от доли задержанных в исполнении решений: чем больше управленческих решений, реализованных с временным запозданием, тем меньше допустимое критическое значение этого запаздывания. Поскольку $\alpha\tau^*$ уменьшается при росте α, это означает, что система более чувствительна к величине временного лага.

Следствия из моделирования достаточно определенные – даже правильные и исполненные решения, но с временной задержкой, превышающей критический временной лаг, в реальности могут привести к нестабильности. Практически это равносильно принятию неверного управленческого решения. Причем чем больше доля выполняемых с отсрочкой действий, тем меньше значение временнóго лага, превышение которого приводит к неустойчивости системы.

Изложенная модель проста, поэтому ее непосредственное приложение в реальном управлении весьма ограничено. В то же время построение мостика между неклассической математической теорией и ее практическими приложениями в социально-экономических моделях особенно важно для такой большой и централизованно управляемой страны, как РФ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Бекларян Л.А. (1996). Введение в качественную теорию функционально-дифференциальных уравнений и их приложения. М.: ЦЭМИ РАН.

Бекларян Л.А. (2007). Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Групповой подход. М.: Факториал Пресс.

Кильматов Т.Р. (2003). Моделирование временного запаздывания в динамических экономических системах // *Вестник ДВГАЭУ*. № 2 (26).

Кильматов Т.Р., Капитонова М.Н. (2004). Моделирование сценариев стратегического развития Приморского края. Владивосток: Дальнаука.

Мышкис А.Д. (1950). Линейные однородные дифференциальные уравнения первого порядка с запаздывающим аргументом // *УМН.* Т. 5. № 2 (36).

Самарский А.А., Михайлов А.П. (2001). Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. М.: Физматлит.

Эльсцгольц Л.Э., Норкин С.Б. (1971). Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука.

Bellman R. (1949). On the Existence and Boundedness of Solutions Differential-Difference Equations // *Ann. Math*. Vol. 50. № 2.

Philips A.W. (1957). Stabilization Policy and the Time-Forms of Lagged Responses // *Econ. J*. Vol. 67. No 6.

Поступила в редакцию
07.06.2012 г.