

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

О ДИНАМИКЕ ФЕРХЮЛЬСТА И ДИНАМИКЕ РОСТА КАПИТАЛА В ЭКОНОМИКЕ

© 2008 г. В. А. Царьков

(Москва)

Рассмотрена обобщенная модель воспроизводства капитала. Получено уравнение роста капитала во временных точках, пропорциональных циклу оборачиваемости капитала в процессе его воспроизводства. Утверждается, что при нелинейной зависимости капитализации прибыли динамика роста капитала идентична динамике Ферхюльста, описывающей рост популяции в природе. Исходя из этого, выдвигается гипотеза фрактальной экономики, в которой экспоненциальный рост капиталистической экономики может стать циклическим и даже хаотичным в зависимости от величины маржинальной рентабельности производственного процесса.

ДИНАМИКА ФЕРХЮЛЬСТА

Динамика Ферхюльста описывает изменение численности популяции x_n в году n при нелинейном коэффициенте прироста R

$$R = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n}. \quad (1)$$

Если прирост равен константе r , то закон, управляющий динамикой роста популяции, определяется уравнением

$$x_{n+1} = f(x_n) = (1 + r)x_n, \quad (2)$$

а численность x_n вычисляется по формуле

$$x_n = (1 + r)^n x_0, \quad (3)$$

где x_0 — начальная численность при $n = 0$.

П.Ф. Ферхюльст считал, что численность популяции, заполняющей экологическую нишу, не может быть больше некоторого максимального значения (которое можно положить равным единице). Он предположил, что коэффициент прироста должен уменьшаться с ростом x_n пропорционально разности $(1 - x_n)$, т.е.

$$R = r(1 - x_n). \quad (4)$$

Таким образом, закон, определяющий динамику изменения популяции, теперь будет выглядеть так:

$$x_{n+1} = f(x_n) = (1 + r)x_n - rx_n^2. \quad (5)$$

Динамику роста с постоянным коэффициентом прироста $R = r$ принято называть экспоненциальной. Она носит возрастающий характер независимо от величины параметра r .

Совсем иначе обстоит дело с нелинейной динамикой Ферхюльста. Нелинейная динамика Ферхюльста зависит от величины параметра r . Эта зависимость оказалась необычайно сложной. Увеличение r приводило сначала к периодическим колебаниям популяции с определенным периодом. При дальнейшем увеличении параметра r период колебаний численности популяции начинал последовательно удваиваться. Наконец, увеличение r нарушает периодичность колебаний и численность популяции начинает прыгать около бесконечного числа значений. Процесс изменения численности популяции становится непредсказуемым, несмотря на его изначальную детерминированность. Более детально можно ознакомиться с нелинейной динамикой роста популяции в (Пайтген, Рихтер, 1993, с. 39–42).

В данной статье исследуется вопрос: “Могут ли наблюдаться подобные процессы в экономике?”. Чтобы ответить на него, изучим динамику роста капитала в процессе его расширенного воспроизводства.

ВЫБОР МОДЕЛИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ РОСТА КАПИТАЛА

Исследования последних лет показывают, что динамика экономических систем различного уровня (отрасли, производственные и торговые предприятия, кредитные организации и другие объекты экономики) адекватно описывается многозвенными операторными звеньями, охваченными положительными и отрицательными обратными связями (Царьков, 2007).

Долгое время непреодолимым препятствием для восприятия экономистами динамических моделей являлось отсутствие экономической интерпретации динамической характеристики: постоянной времени инерционного звена τ . Автору неоднократно приходилось сталкиваться с возражениями типа: “Рассматриваемые модели не могут применяться в экономике, так как в них используется постоянная времени τ , не имеющая экономического смысла”. В настоящее время можно утверждать, что постоянная времени инерционного звена τ “приобрела экономический смысл”. В экономической системе, описывающей динамику процесса непрерывного расширенного воспроизводства, она тождественна времени оборачиваемости капитала $\tau = \tau_{об}$ (Царьков, 2004).

Рост капитала $K(t)$ в экономической системе воспроизводства с непрерывными потоками денежных поступлений и платежей описывается экспоненциальным уравнением:

$$K(t) = K_0 e^{\beta p t / \tau}, \quad (6)$$

где K_0 — начальный объем капитала в момент времени $t = 0$; p — рентабельность, т.е. отношение прибыли к затратам; β — коэффициент капитализации прибыли, показывающий, какая доля прибыли направляется на увеличение капитала.

Эффективность воспроизводства капитала E , равная отношению прибыли $y_n(t)$ к текущей величине капитала $K(t)$, определяется соотношением:

$$E = y_n(t) / K(t) = p / \tau. \quad (7)$$

Уравнения (6)–(7) являются фундаментальными, определяющими динамику роста экономической системы.

Однако в рыночной экономике в практике экономических расчетов широко применяется категория добавленной стоимости. Она служит исходным показателем как для расчета цены продукции, доходности капитала, так и для формирования рентабельности. Поэтому для вычисления динамики роста капитала возьмем модель расширенного воспроизводства капитала с использованием этого показателя. Последнее обстоятельство не означает отрицания показателей эффективности, основанных на рентабельности предприятия и времени оборачиваемости капитала в соответствии с (7).

В роли системы воспроизводства капитала могут выступать предприятие, отрасль народного хозяйства, национальная экономика в целом. В дальнейшем будем использовать термин “предприятие”. Исходным допущением при конструировании блок-схемы динамической модели является непрерывный характер потоков денежных поступлений на счета и платежей предприятия (в дальнейшем слово *поток* иногда будет опускаться). Такое допущение справедливо, если имеет место достаточно большой ежедневный объем финансовых операций, а средние показатели вычисляются на достаточно большом промежутке времени, например равном одному месяцу.

Интегральные характеристики предприятия (ежемесячный доход, расходы, средняя величина собственного основного и оборотного капитала, привлеченные ресурсы и др.) являются общепринятыми агрегированными экономическими показателями их деятельности, характерными для детерминированной системы. Очевидно, правомерно рассматривать предприятие как детерминированную систему, параметры которой структурно взаимосвязаны, могут измеряться, имеют свою динамику и свою траекторию изменения во времени, которую можно прогнозировать и планировать. На рис. 1 представлена обобщенная 5-звенная блок-схема динамической модели воспроизводства производственного капитала предприятия (основного и оборотного), построенная на основе методов, применяемых в теории автоматического регулирования.

Метод моделирования систем автоматики. В модели денежные ресурсы (запасы) и финансовые потоки ресурсов являются векторами на входе и выходе операторных звеньев. Вектор на выходе

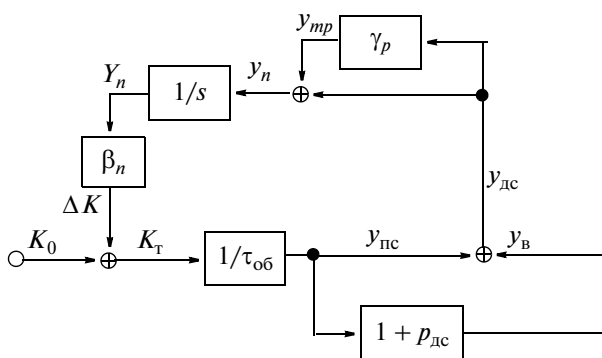


Рис. 1.

звена равен произведению входного вектора на передаточный коэффициент звена $W(s)$. Операция дифференцирования имеет передаточную функцию $W(s) = s$, а операция интегрирования — $W(s) = 1/s$. Передаточный коэффициент многозвенной системы представляется в виде алгебраической функции от комплексной переменной s . Эта функция называется изображением функции оригинала от аргумента времени t .

Переход от функции-изображения $f(s)$ к функции-оригиналу $f(t)$ выполняется по правилам операционного исчисления Лапласа. Таким образом, метод определения временной зависимости вектора состоит из трех этапов:

- 1) конструируется блок-схема модели;
- 2) на основе блок-схемы вычисляется уравнение для вектора в виде функции от аргумента s ;
- 3) по таблице соответствия находится временная функция вектора.

По существу, блок-схема модели отражает взаимосвязи в системе интегродифференциальных уравнений, описывающих изучаемый объект.

Модель, представленная на рис. 1, содержит минимальный набор агрегированных показателей, определяющих динамику расширенного воспроизводства капитала. Она содержит следующие звенья (операторы):

— звено себестоимости с коэффициентом передачи $W = 1/\tau_{об}$ — это звено преобразует вектор текущего капитала K_m в вектор потока перенесенной себестоимости y_{nc} ;

— звено с коэффициентом передачи $W = 1 + p_{dc}$ — преобразует вектор перенесенной стоимости в вектор потока выручки (операционного дохода) y_v ;

— звено текущих расходов с коэффициентом передачи γ_p — преобразует вектор потока добавленной стоимости y_{dc} в вектор текущих расходов y_{tr} (расходы на зарплату, амортизацию, налоги, отчисления в различные фонды);

— интегрирующее звено в цепи обратной связи с коэффициентом передачи $W = 1/s$ — преобразует вектор прибыли y_n в вектор прибыли Y_n нарастающим итогом (прибыль, накопленная за период);

— звено капитализации прибыли с коэффициентом передачи $W = \beta_n$ — преобразует прибыль Y_n в прирост производственного капитала предприятия ΔK .

Особенностью модели является наличие контура положительной обратной связи, определяющей главное свойство модели: свойство саморазвития после подачи вектора собственного начального капитала K_0 . При $K_0 = 0$ система остается в режиме покоя, все другие векторы равны нулю. После подачи на вход модели $K_0 > 0$ система переходит из состояния покоя в состояние динамического роста. Величина каждого вектора со временем будет меняться. Характер траектории изменения (динамики) текущего вектора капитала K_t и других векторов будет зависеть от параметров операторов, входящих в блок-схему модели.

ДИНАМИКА РОСТА КАПИТАЛА

Обозначим символом β_d коэффициент капитализации добавленной стоимости, показывающий долю добавленной стоимости, направляемую на увеличение капитала. На основе блок-схемы модели (рис. 1) несложно получить следующее равенство:

$$\beta_d = \beta_n(1 - \gamma_p). \quad (8)$$

С введением коэффициента капитализации добавленной стоимости β_d модель может быть изображена более простой 4-звенной блок-схемой, представленной на рис. 2.

Капитал K_m в блок-схеме на рис. 2, так же как и на рис. 1, генерирует поток перенесенной стоимости продукции $y_{nc} = K_m/\tau_{об}$. Поток выручки связан с потоком себестоимости оператором с

коэффициентом передачи $W = 1 + p_{\text{дс}}$. Коэффициент $p_{\text{дс}}$ — это, по существу, маржинальная рентабельность

$$p_{\text{дс}} = (y_{\text{в}} - y_{\text{пс}})/y_{\text{пс}}. \quad (9)$$

Поток добавленной стоимости $y_{\text{дс}}$ преобразуется интегрирующим звеном с коэффициентом передачи $W = 1/s$ в пространстве изображений по Лапласу в добавленную стоимость $Y_{\text{дс}}$, полученную за период $[0; t]$. Другими словами, поток преобразуется в объем стоимости, получаемой за период $[0; t]$ нарастающим итогом. Часть этого объема, равная доле $\beta_{\text{д}} Y_{\text{дс}} = \Delta K$, суммируется с начальным капиталом, увеличивая текущий капитал.

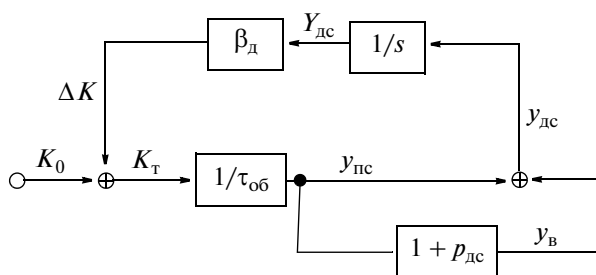


Рис. 2.

Запишем уравнение роста капитала в зависимости от времени (вывод формулы приведен в (Царьков, 2004)):

$$K_{\text{т}}(t) = K_0 e^{\beta_{\text{д}} p_{\text{дс}} t / \tau_{\text{об}}}. \quad (10)$$

Обозначим моменты времени, кратные периодам времени оборачиваемости капитала $\tau_{\text{об}}$, через

$$t = n \tau_{\text{об}}. \quad (11)$$

Подставим (11) в (10) и получим уравнение для расчета капитала во временных n точках, кратных времени оборачиваемости капитала

$$K_{\text{т}}(n) = K_0 e^{\beta_{\text{д}} p_{\text{дс}} n} = K_0 (e^{\beta_{\text{д}} p_{\text{дс}}})^n. \quad (12)$$

В уравнении (10) выражение в скобках заменим первыми двумя членами разложения в ряд Маклорена

$$e^{\beta_{\text{д}} p_{\text{дс}}} \cong 1 + \beta_{\text{д}} p_{\text{дс}}. \quad (13)$$

Таким образом, уравнение (10) примет вид

$$K_{\text{т}}(n) = K_0 (1 + \beta_{\text{д}} p_{\text{дс}})^n. \quad (14)$$

Запишем коэффициент прироста R для капитала, вычисляемого по формуле (14):

$$R = (K_{\text{т}}(n+1) - K_{\text{т}}(n))/K_{\text{т}}(n) = \beta_{\text{д}} p_{\text{дс}}. \quad (15)$$

Введем обозначение

$$r = \beta_{\text{д}} p_{\text{дс}}. \quad (16)$$

В линейной системе доля капитализируемой прибыли $\beta_{\text{д}} = \text{const}$ и рентабельность $p_{\text{дс}} = \text{const}$, следовательно, $r = \beta_{\text{д}} p_{\text{дс}} = \text{const}$. Таким образом, закон, управляющий динамикой роста капитала, будет определяться уравнением

$$K_{\text{т}}(n+1) = f(n) = (1 + r) K_{\text{т}}(n). \quad (17)$$

Данное уравнение совпадает с уравнением численности популяции с экспоненциальным ростом (2).

Очевидно, что для экономической системы, функционирующей в рамках капиталистического рынка, как и для популяции в природе, имеется своя ниша и свой *потолок* роста. В связи с этим будем исходить из гипотезы, что с ростом выпуска доля капитализируемой прибыли, направляемая на расширение воспроизводства, будет уменьшаться. Предположим, что доля капитализируемой прибыли будет уменьшаться пропорционально росту капитала, пока капитал не достигнет максимума $K_{\text{макс}}$, при котором $\beta_{\text{д}} = 0$:

$$\beta_{\text{д}} = (K_{\text{макс}} - K_{\text{т}}(n))/K_{\text{макс}}. \quad (18)$$

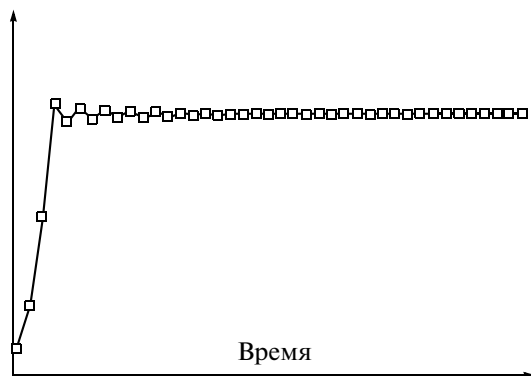


Рис. 3.

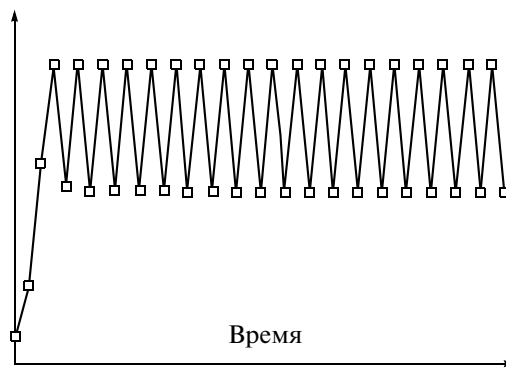


Рис. 4.

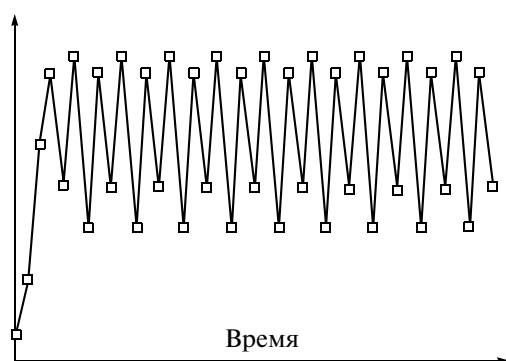


Рис. 5.

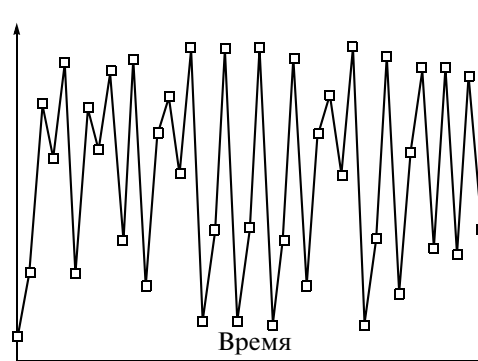


Рис. 6.

Подставив (18) в правую часть (15), после преобразования получим

$$K_T(n+1) = (1 + p_{\text{дс}})K_T(n) - p_{\text{дс}}([K_T(n)]^2 / K_{\text{макс}}). \quad (19)$$

Разделим левую и правую часть уравнения (19) на $K_{\text{макс}}$, тогда

$$\frac{K_T(n+1)}{K_{\text{макс}}} = (1 + p_{\text{дс}})\frac{K_T(n)}{K_{\text{макс}}} - \left[\frac{K_T(n)}{K_{\text{макс}}}\right]^2 p_{\text{дс}}. \quad (20)$$

Введем новую переменную $x_n = K_T(n)/K_{\text{макс}}$, тогда $x_{n+1} = K_T(n+1)/K_{\text{макс}}$, после чего уравнение (20) можно записать в виде

$$x_{n+1} = (1 + p_{\text{дс}})x_n - (x_n)^2 p_{\text{дс}}. \quad (21)$$

Сравнивая уравнение (21) с (5), замечаем, что оба уравнения идентичны. Следовательно, нелинейная динамика роста относительной величины x_n капитала будет аналогична нелинейной динамике Ферхюльста.

Характер динамики роста капитала будет зависеть от величины маржинальной рентабельности $p_{\text{дс}}$ воспроизводственного процесса, так же как и динамика роста численности популяции от параметра роста r . По существу маржинальная рентабельность $p_{\text{дс}}$ является параметром роста для капитала в экономике. В зависимости от ее величины нелинейная динамика капитала будет претерпевать последовательно все качественные изменения, свойственные процессу для нелинейной динамики Ферхюльста.

Для пояснения изложенного воспользуемся примерами, заимствованными из (Пайтген, Рихтер, 1993) для $x_0 = 0.1$ (рис. 3–6). В системе с маржинальной рентабельностью $p_{\text{дс}}$, удовлетворяющей условию $0 < p_{\text{дс}} < 2$, траектория роста капитала стремится к равновесному состоянию (рис. 3). При $2 < p_{\text{дс}} < 2.449$ процесс начинает осциллировать (рис. 4). С увеличением $p_{\text{дс}}$ период колебаний

начинает удваиваться (рис. 5) и, наконец, при $p_{\text{дс}} > 2.57$ процесс вообще перестает быть периодическим. Другими словами, процесс становится хаотичным и непредсказуемым (рис. 6).

Подобные процессы с нелинейной динамикой относятся к математической теории фракталов. В (Петерс, 2004) изложена гипотеза фрактального рынка. По аналогии назовем изложенные результаты гипотезой фрактальной экономики. Как следует из этой гипотезы, динамика роста капитала во фрактальной экономике существенно меняется с увеличением величины маржинальной рентабельности $p_{\text{дс}}$. В пределах изменения $p_{\text{дс}}$ до 200% в экономике наблюдаются процессы саморегулирования. Однако при увеличении $p_{\text{дс}}$ *парадигма саморегулируемой экономики не работает*.

Гипотеза фрактальной экономики может существенно изменить сложившиеся представления о причинах и закономерностях циклических колебаний в экономическом развитии. Для полноценного развития гипотезы фрактальной экономики необходимо преодолеть барьер одномерного измерения капитала и потоков ресурсов, что потребует представления капитала в форме комплексного числа на комплексной плоскости. Капитал при этом должен иметь действительную часть, которая, возможно, отражала бы фактическую стоимость (например, материально-вещественную) и мнимую (возможно, ценовую). Это позволит в полной мере использовать теорию комплексных динамических систем, описать с более общих позиций переход от порядка к хаосу и исследовать роль множества Мальденброта в экономической динамике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х. (1993): Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М.: Мир.
- Петерс Э.Э. (2004): Фрактальный анализ финансовых рынков: применение теории хаоса в инвестициях и экономике. М.: Интернет-трейдинг.
- Царьков В.А. (2004): Моделирование экономической динамики предприятия // *Аудит и финансовый анализ*. № 4.
- Царьков В.А. (2007): Динамические модели экономики. Теория и практика экономической динамики. М.: Экономика.

Поступила в редакцию
20.02.2007 г.

Ferhulst Dynamics and Capital Growth Dynamics in the Economy

V. A. Tsarkov

The author analysis the general model of capital reproduction. He got the equation of capital growth at the certain points in time, in proportion to the cycle of capital return in the process of its reproduction. He states that with the nonlinear profit capitalization function the dynamics of capital growth is equal to Ferhulst dynamics, describing the population growth in Nature. The author formulates the hypothesis of the fractal economy, where exponential growth of the capitalist economy may become cyclic and even chaotic considering the level of marginal efficiency of the reproduction process.