ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2008, том 44, № 3, с. 98–110

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

СТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ТРАЕКТОРИЯМИ

© 2008 г. В. З. Беленький*, К. В. Кетова, О. Р. Сабирова

(Москва)

Рассматривается задача нахождения стационарных состояний в моделях экономической динамики с ограниченными траекториями. Ее решение дается на основе полученного ранее авторами "векового" уравнения для неподвижных точек оптимальной стратегии. Для монопродуктового и полипродуктового вариантов модели получены формулы, выражающие искомые стационарные состояния в явном виде через входные параметры.

ВВЕДЕНИЕ

В анализе динамических моделей экономики существенную роль играет нахождение стационарного состояния, к которому сходятся траектории системы (в регулярном случае такое состояние существует и единственно). Это справедливо и для теоретических исследований, и для прикладных моделей, ориентированных на применение в практике реального планирования.

В строгом смысле термин "стационарное состояние" корректен в гомогенных (однородных во времени) оптимизационных динамических моделях, причем в стационарной постановке. В таких моделях оптимальный ход зависит только от текущего состояния системы и, следовательно, оптимальная траектория однозначно определяется (речь идет о детерминированных моделях, без учета возможной неопределенности будущего) своей начальной точкой x_0. Состояние $\hat{x}$ называется стационарным, если оно не изменяется во времени, т.е. если $x_0 = \hat{x}$, то $x_t = \hat{x}$ при всех $t \geq 0$.

В работе (Беленький, 1991) было получено уравнение, названное "вековым", которому обязано удовлетворять стационарное состояние в динамических моделях с дискретным временем (с единичным шагом по времени) – необходимое условие стационарности. Его частные случаи исследовались в более ранних работах (Беленький, 1979; Беленький, Сластников, 1997). В (Беленький, Кетова, 2006) аналогичное уравнение было получено для моделей в непрерывном времени.

В прикладных задачах условие гомогенности принимается как нулевое приближение, поскольку реальная прогнозная информация явным образом привязана к календарному времени и, следовательно, условие гомогенности не выполняется. В такой ситуации стационарное состояние в строгом смысле отсутствует, однако, если прогнозные кривые меняются достаточно плавно, то возникает так называемая квазистационарная траектория, на которую выходят оптимальные траектории системы (подобная модель изучалась в (Кетова, Сабирова, 2006)).

В настоящей работе исследуются два варианта гомогенной модели экономической динамики в конечномерном фазовом пространстве R_+^n в непрерывном времени. Оба варианта рассматриваются в стационарной постановке и характеризуются двумя принципиальными чертами: 1) производственная функция относится к классическому типу (с бесконечной эффективностью в нуле и нулевой эффективностью на бесконечности (п. 2.1)); 2) учитывается амортизация производственных ресурсов (фондов). Как следствие, траектории системы остаются ограниченными (не уходят в бесконечность) и обеспечивается существование стационарной точки (лемма 1). Для рассматриваемых моделей справедливо полученное в (Беленький, Кетова, 2006) вековое уравнение, однако в отличие от общего случая, здесь оно приобретает более законченную форму. В статье приведены типичные примеры для случаев, когда стационарная точка единственна, и дается ее явное выражение через исходные данные модели. Вопрос о единственности стационарного состояния в общем случае остается открытым.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00775).

1. КАНОНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ, ВЕКОВОЕ УРАВНЕНИЕ В ОБЩЕЙ ФОРМЕ

В этом разделе изложим основной результат работы (Беленький, Кетова, 2006). Гомогенная модель экономической динамики в стационарной постановке записывается в следующей канонической форме.

Задача 1:

$$Cr(\zeta) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} u(x_t, c_t)dt \longrightarrow \max_\zeta =: G(a), \tag{1}$$

$$x(0) = a \in X, \quad \dot{x} = f(x, c), \quad c \in d(x) \subseteq C, \quad x \in X, \tag{2}$$

где $X \subseteq R_+^n$ – фазовое пространство рассматриваемой экономической системы; $C \subseteq R^m$ – пространство управлений; $d : X \longrightarrow C$ – управляющее отображение; $d(x)$ – множество управлений, допустимых в состоянии $x \in X$; $f : X \times C \longrightarrow \dot{R}^n$ – эволюционная функция (определяет эволюцию рассматриваемой системы во времени); $u : X \times C \longrightarrow R$ – критериальная функция.

Таким образом, информационный паспорт задачи 1 – это набор

$$\{X, C, d, u, f, \alpha\}. \tag{3}$$

Максимум в (1) берется по множеству всевозможных стратегий ζ. По определению, стратегия – это произвольный селектор управляющего отображения d, т.е. функция ζ на фазовом пространстве X такая, что

$$\zeta(x) \in d(x) \ \forall x \in X.$$

Выбранной стратегии однозначно соответствует фазовая траектория $\{x_t\}$; предполагается, что управляющее отображение задано так, что при любой стратегии ζ траектория $\{x_t\}$ целиком находится в фазовом пространстве.

Максимальное значение критериального функционала (1) обозначено через $G(a)$; $G : X \longrightarrow R$ – функция выигрыша, которая в стационарной модели является потенциалом (потенциальной функцией, объективным функционалом, см. (Беленький, 2006в, 2006а)) экономической системы. Потенциальная функция удовлетворяет уравнению Якоби–Гамильтона–Беллмана для задачи 1 (ЯГБ-уравнение, см. (Беленький, 2007, п. 4.3.2)):

$$\alpha G(x) = \max_{c \in d(x)} [u(x, c) + G'(x) f(x, c)], \quad x \in X. \tag{4}$$

Здесь $G'(x)$ – градиент функции G в точке x, который формально понимается как *ковектор*[1], поэтому второе слагаемое в квадратной скобке есть скалярное произведение векторов G' и f. Предполагается, что уравнение (4) имеет решение и оно единственно.

Оптимальная стратегия, доставляющая максимум критериальному функционалу (1) (обозначим ее $S := \zeta_{опт}$), выражается через потенциальную функцию G:

$$S(x) = \operatorname{Arg}\max_{c \in d(x)} [u(x, c) + G'(x) f(x, c)], \quad x \in X. \tag{5}$$

Вообще говоря, значение $S(x)$ (оптимальный ход в состоянии x) неединственно, т.е. $S(x)$ – множество в пространстве R^m (поэтому в (5) стоит Arg, а не arg). Стратегия (5) порождает *поле скоростей*

$$v(x) := f(x, S(x)), \quad x \in X. \tag{6}$$

Неподвижной точкой $\hat{x}$ называется корень уравнения[2]

$$\hat{x}: v(x) = 0 \in \dot{R}^n. \tag{7}$$

[1] Ковектор есть элемент сопряженного пространства $^*R^n$ (вектор-строка, если считать x вектором-столбцом).

[2] Поскольку $v(x)$, так же как и $S(x)$, является множеством, то более строго надо писать в (7) не равенство, а включение $v(x) \ni 0$; это обстоятельство не является препятствием для дальнейших выкладок, поэтому мы игнорируем указанное осложнение.

Точка $\hat{x}$ локально устойчива, если она является внутренней точкой фазового пространства, т.е. входит в X вместе с некоторой окрестностью O, и для любой точки $x(0) = a \in O$ оптимальная траектория $\{x_t\}$ стремится к точке $\hat{x}$ при $t \longrightarrow \infty$. Ясно, что локально устойчивая неподвижная точка является стационарным состоянием модели.

1.1. Исходные посылки. Пусть искомая устойчивая неподвижная точка локализована в некоторой окрестности $O \subset X$ такой, что выполнены следующие предположения.

Предположение 1. Любая точка $x \in O$ может быть "претендентом на неподвижность" в том смысле, что множество

$$E(x) := \{c \in d(x) | f(x, c) = 0 \in \dot{R}^n\}, \quad x \in O, \tag{8}$$

непусто; более того, предполагается, что оно содержит только одну точку, т.е. $E(x)$, $x \in O$ – однозначная функция.

Предположение 2. Для каждой начальной точки $x_0 = a \in O$ время $T(a, \hat{x})$ перехода оптимальной траектории в неподвижную точку $\hat{x}$ конечно.

Тогда задача нахождения неподвижной точки эквивалентна определению точки остановки (или момента остановки) при движении из начальной точки a по соответствующей оптимальной траектории (x_t, c_t).

Взяв в качестве точки остановки некоторую "пробную" точку $y \in O$ (т.е. предполагая, что эта точка является неподвижной) и обозначив $\tau := T(a, y)$ отвечающий ей момент остановки, запишем соответствующее значение критериального функционала (1):

$$\int_0^\tau e^{-\alpha t} u(x_t, c_t) dt + e^{-\alpha\tau} N(y) =: V(y, a), \quad a \in O, \quad \tau = T(a, y). \tag{9}$$

Здесь $N(y)$ – значение критериального функционала, отвечающее начальной точке $x(0) = y$, предположительно неподвижной; оно может быть вычислено, согласно (1), по формуле

$$N(y) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} u(y, E(y)) dt = \frac{1}{\alpha} u(y, E(y)). \tag{10}$$

1.2. Вековое уравнение. Вывод векового уравнения основывается на следующем очевидном соображении, впервые использованном в работе (Кетова, 2004).

Принцип максимума для неподвижной точки. В описываемой ситуации для неподвижности искомой точки $\hat{x}$ необходимо, чтобы выражение (9), рассматриваемое как функция точки остановки $y \in O$, достигало при $y = \hat{x}$ своего максимума для всех $a \in O$.

Поскольку для любой начальной точки $x_0 = a \in O$ существует управление, приводящее траекторию в точку $\hat{x}$, число m управляющих переменных (т.е. размерность пространства управлений R^m) должно быть не меньше размерности фазового пространства n; таким образом, $m \geq n$. Далее, среди m управляющих переменных существует подгруппа из n переменных, с помощью которых траектории, начинающиеся в O, приводятся в неподвижную точку; назовем эти переменные *существенными*. Остальные, *несущественные*, управляющие переменные имеют в бесконечно малой окрестности неподвижной точки постоянные значения, равные их значениям в точке $\hat{x}$; их можно исключить из рассмотрения (эту операцию называют очисткой). Это означает, что, зафиксировав значения несущественных управляющих переменных, можно считать, что в окрестности неподвижной точки пространство управлений n-мерно и включает только существенные переменные. Будем обозначать суженное пространство существенных управляющих переменных через $\tilde{C} \subseteq R^n_+$, а суженное множество управлений, допустимых в точке x, через $\tilde{d}(x)$.

Дальнейшее изложение требует принятия еще одного предположения.

Предположение 3. Существенная часть $\tilde{c}$ оптимального хода $c = E(\hat{x})$, обеспечивающего условие неподвижности (8), является *внутренней точкой* множества допустимых управлений $\tilde{d}(\hat{x})$. Такую ситуацию назовем *невырожденной*.

В невырожденной ситуации имеет место следующая теорема.

Теорема 1 (Беленький, Кетова, 2006). *Пусть оптимальная стратегия* (5) *задачи* 1 *обладает локально устойчивой неподвижной точкой* $\hat{x}$. *Тогда* (*в невырожденной ситуации*) *в подпространстве* $\tilde{C}$ *существенных управляющих переменных при* $y = \hat{x}$ *должно выполняться равенство*

$$\frac{\partial}{\partial c}[u(y, c) + N'(y)f(y, c)]\bigg|_{c = E(y)} = 0 \in {}^*R^n \tag{11}$$

(*частные производные* $\partial/\partial c$ *берутся только по существенным переменным*), *представляющее собой вековое уравнение относительно неподвижной точки* $y \in O \subset X$. *При этом в точке* $y = \hat{x}$ *имеют место равенства*

$$\begin{aligned} &а)\ G(y) = N(y),\\ &б)\ G'(y) = N'(y). \end{aligned} \tag{12}$$

Замечание 1. С точки зрения практического применения, “рецепт” получения векового уравнения состоит в том, что для нахождения неподвижной точки надо локализовать ее в некоторой окрестности O, провести в этой окрестности очистку переменных управления, вычислить функцию (10) и записать условие максимума в правой части ЯГБ-уравнения (4) в дифференциальной форме (11), используя в качестве $G'(y)$ производную $N'(y)$ (т.е. действуя так, как будто равенство $G(y) = N(y)$ выполняется не только в самой неподвижной точке $y = \hat{x}$, но и в ее окрестности).

В следующих разделах будут рассмотрены два варианта канонической задачи 1, для которых на основе теоремы 1 будут получены более продвинутые результаты. Для удобства применения запишем вековое уравнение (11) в развернутой форме. Учитывая, что число существенных управляющих переменных совпадает с размерностью n фазового пространства, полагаем $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $\tilde{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ и тогда (11) запишется в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial c_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial N}{\partial y_j}\frac{\partial f_j}{\partial c_i}\bigg|_{c = E(y)} = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{13}$$

Отметим, что (13) представляет собой систему n уравнений с n неизвестными, поэтому в нормальном случае она должна иметь решение и притом единственное (в локальной окрестности O).

2. МОДЕЛЬ С ОДНИМ РАСПРЕДЕЛЯЕМЫМ ПРОДУКТОМ

Рассматриваемая в этом разделе модель является схематичным обобщением на многомерный случай двухфакторной модели работы (Кетова, Сабирова, 2006), использованной в прогнозно-аналитических расчетах по Удмуртской Республике[3].

Производственный блок модели описывается функцией $F(x)$, $x = (x_j) \in R^n_+$, аргумент x интерпретируется как вектор ресурсов, а (скалярное) значение $Y = F(x) \geq 0$ как объем производимого продукта. Продукт Y распределяется на неотрицательные части $Y = c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j$, из которых c_0 идет на потребление, а остальные части инвестируются в соответствующие фондообразующие отрасли, производящие ресурсы. Последнее означает, что динамика ресурсов описывается соотношениями

$$\dot{x}_j = c_j - \gamma_j x_j, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{14}$$

где $\gamma_j > 0$ – некоторые постоянные (строго положительные), отражающие амортизацию (выбытие) ресурсов. Критериальный функционал модели – интегральная дисконтированная полезность потребления:

$$Cr(\zeta) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} U(c_0(t))dt \longrightarrow \max_{\zeta} =: G(a). \tag{15}$$

[3] Описываемое многомерное обобщение предложено в дипломной работе О.Р. Сабировой; там же было получено (другими методами – на основе принципа максимума Понтрягина) уравнение для неподвижной точки в форме (22).

Таким образом, задача состоит в максимизации критерия (15) при эволюционных соотношениях (14) в фазовом пространстве R_n^+ и ограничениях на управляемые переменные $c = (c_1, ..., c_n)$:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \le F(x), \quad c_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{16}$$

Эта задача имеет каноническую форму задачи 1 с критериальной функцией

$$u(x, c) = U(c_0) = U\left(F(x) - \sum_{j=1}^{n} c_j\right) \tag{17}$$

и эволюционной функцией

$$f = (f_1, \ldots, f_n), \quad f_j(x, c) := c_j - \gamma_j x_j, \quad j = 1, \ldots, n; \tag{18}$$

ее информационный паспорт задается четверкой $\{F, U, \gamma = (\gamma_j), \alpha\}$.

2.1. Выпуклая модель. В выпуклых моделях экономики функция полезности U неотрицательна, возрастает и выпукла вверх на R_+. Особое значение в данной работе имеют условия, накладываемые на производственную функцию F. Предполагается, что она относится к классу $\mathcal{F}$ функций F, определенных на неотрицательном ортанте R_n^+ и характеризуемых тремя "классическими" свойствами.

Свойство 1. **Монотонность.** $F(x)$ монотонно возрастает по каждой координате вектора x, при этом $F(0) = 0$ (и, следовательно, F – неотрицательная функция).

Свойство 2. **Выпуклость.** F выпукла вверх на всем ортанте R_n^+.

При этих условиях стандартными методами (Беленький, 2004; Мельников, 2005) легко доказать, что потенциальная функция G описываемой модели также обладает свойствами 1, 2.

Свойство 3. **Убывающая эффективность.** Обозначим

$$\mu(x) := F(x)/|x|, \quad |x| := \left[\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right]^{1/2}, \quad x \in R_n^+$$

($|x|$ – евклидова норма вектора x), тогда выполняются условия:

$$\begin{aligned} &\text{а)}\ \lim_{x \to 0} \mu(x) = \infty, \\ &\text{б)}\ \lim_{x \to \infty} \mu(x) = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Важным частным случаем производственной функции класса $\mathcal{F}$ является положительно однородная функция F со свойствами 1, 2 и показателем однородности $\theta \in (0, 1)$. Условие однородности означает выполнение соотношения

$$F(\lambda x) = \lambda^{\theta} F(x) \ \forall (x \in R_+^n, \lambda \ge 0). \tag{20}$$

Замечание 2. В линейных моделях типа Неймана–Гейла функция F однородная первой степени ($\theta = 1$). В этом случае условия (19) не выполняются, и неподвижной точки нет, а есть магистральный (неймановский) луч максимального сбалансированного роста.

Лемма 1. *В выпуклой модели с описанными свойствами потенциальная функция G существует, и оптимальная стратегия обладает неподвижной точкой* $\hat{x}$.

Доказательство. Существование функции G доказано в (Мельников, 2005). Покажем существование точки $\hat{x}$. Из (19б) вытекает, что существует шаровой компакт $X \subset R_n^+$ (достаточно большого радиуса $r = |x|$) такой, что при любых управлениях фазовые траектории, начинающиеся в граничных точках компакта X, ведут строго внутрь этого компакта. Действительно, умножая равенство (14) на x_j и суммируя по j, имеем

$$r\dot{r} = \frac{1}{2}(\dot{r^2}) = \sum_{j=1}^{n}\dot{x}_j x_j = \sum_{j=1}^{n}[c_j x_j - \gamma_j x_j^2] \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{n}[F(x)x_j - \gamma_j x_j^2] \le (n\mu(x) - \gamma_{min})|x|^2, \quad \gamma_{min} := \min_j \gamma_j.$$

Если радиус шара $r = |x|$ достаточно велик, то в силу (19б) правая часть отрицательна, что означает $\dot{r} < 0$, т.е. траектории ведут внутрь шара.

Взяв произвольное положительное h, рассмотрим отображение ω_h: $x \longrightarrow x + hf(x, S(x))$; при достаточно малом h компакт X переходит при данном отображении в себя. Кроме того, в выпуклой модели отображение $x \longrightarrow S(x)$, определяемое формулой (5), полунепрерывно сверху и выпуклозначно; таким же будет и отображение ω_h. В силу теоремы Какутани (Карлин, 1964, Приложение B2) отображение ω_h имеет неподвижную точку, которая по построению является корнем уравнения (7). ■

В силу доказанной леммы описанную модель назовем моделью *с ограниченными траекториями* (ОТ-модель).

Гипотеза. Есть основания полагать, что в выпуклой модели выполнение векового уравнения (11) (в развернутой форме – (13)) является не только необходимым, но и достаточным условием того, что y является неподвижной, и притом устойчивой, точкой. Однако показать это строго пока не удалось.

2.2. Вековое уравнение в финальной форме. Для нахождения неподвижной точки применим теорему 1. Поскольку число управляемых переменных совпадает с размерностью фазового пространства, эти переменные существенны в смысле п. 1.2; поэтому их очистку производить не нужно, следовательно, не требуется и локализация неподвижной точки. Применяя формулы (8), (10), находим:

$$E_j(y) = \gamma_j y_j, \quad j = 1, \ldots, n, \quad N(y) = \frac{1}{\alpha}U\left(F(y) - \sum_{j=1}^{n}\gamma_j y_j\right);$$

вековое уравнение (13) принимает вид

$$-U'(c_0) + \frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^{n}U'(c_0)\left[\frac{\partial F}{\partial y_j} - \gamma_j\right]\frac{\partial f_j}{\partial c_i}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{21}$$

где c_0 – объем потребления в стационарном состоянии. Учитывая, что под знаком суммы множитель $\partial f_j/\partial c_i$ отличен от нуля только при $j = i$ (и при этом равен 1), приводим вековое уравнение (21) (сокращая на общий множитель $U'(c_0)$) к виду

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = \alpha + \gamma_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{22}$$

Замечание 3. Из (22) следует, что прибавление к функции F произвольной постоянной не меняет неподвижную точку.

2.3. Примеры. Рассмотрим типичные для моделей экономических систем примеры производственных функций.

Пример 1. Функция Кобба–Дугласа. Эта функция наиболее часто используется в качестве производственной функции; она задается n-мерным параметром $\nu = (\nu_j) \in R_+^n$ и имеет вид

$$F(x) = A\prod_{j=1}^{n}x_j^{\nu_j}, \quad x \in R_+^n \ (A = \text{const} > 0). \tag{23}$$

Это однородная функция с показателем однородности $\theta := \sum_{j=1}^{n} \nu_j$; в выпуклой модели $\theta < 1$. Для функции (23) уравнение (22) приобретает вид:

$$(\nu_i/y_i)F(y) = \alpha + \gamma_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{24}$$

и решается в явной форме. Обозначая через K неизвестное пока значение $K := F(y)$, имеем из (24):

$$y_i = K\varepsilon_i, \quad \varepsilon_i := \nu_i/(\alpha + \gamma_i), \quad i = 1, \ldots, n; \tag{25}$$

в векторной форме $y = K\varepsilon$, где $\varepsilon = (\varepsilon_i)$. Поэтому, согласно (20), $F(y) = K^{\theta}F(\varepsilon)$, откуда находим значение неизвестной константы

$$K = F(y) = K^{\theta}F(\varepsilon) \Rightarrow K = F^{1/(1-\theta)}(\varepsilon). \tag{26}$$

Формулы (25), (26) дают явное выражение для стационарного состояния в рассматриваемой модели.

Пример 2. Модифицированная CES-функция. Функции этого класса (постоянной эластичности замещения, Constant Elastisity Substitution) подробно описаны в (Клейнер, 1986). На пространстве R_+^n CES-функция задается неотрицательным вектором $b = (b_j) \in R_+^n$ и скаляром $\rho \neq 0$ (произвольного знака); она имеет вид

$$\Phi(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} b_j x_j^{\rho}\right)^{1/\rho}, \quad x \in R_+^n. \tag{27}$$

При любом значении ρ эта функция монотонно возрастает по x; при $\rho \leq 1$ функция Φ выпукла вверх, при $\rho > 1$ – вниз. Поскольку в статье рассматриваются функции, выпуклые вверх, считаем $\rho \leq 1$.

Функция (27) однородна первой степени и используется в линейно-однородных моделях. Чтобы понизить степень однородности, модифицируем функцию (27) и рассмотрим производственную функцию

$$F(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} b_j x_j^{\rho}\right)^{\beta}, \quad x \in R_+^n, \tag{28}$$

в которой заданные параметры β, ρ удовлетворяют условию

$$\theta := \beta\rho \in (0, 1). \tag{29}$$

Так как $F = \Phi^{\theta}$, то F – возрастающая по x функция, однородная степени θ; кроме того, она выпукла вверх в силу следующей леммы.

Лемма 2. О суперпозициях (Беленький, 2007, лемма 10.1). *Пусть $\Phi: X \longrightarrow R_+$ – выпуклая функция на множестве $X \subseteq R_+^n$ и $\varphi(s)$, $s \in R_+$, – возрастающая выпуклая вверх функция. Тогда сложная функция $F(x) := \varphi(\Phi(x))$ выпукла вверх.*

Действительно, в нашем случае $\varphi(s) = s^{\theta}$, и в силу (29) все условия леммы выполнены.

Таким образом, функция (28) принадлежит классу $\mathcal{F}$. Найдем стационарную точку соответствующей ОТ-модели; имеем $\partial F/\partial x_i = \theta Q^{\beta-1} b_i x_i^{\rho-1}$, $Q := \sum_{j=1}^{n} b_j x_j^{\rho}$. Равенства (22) эквивалентны следующим:

$$y_i = K\varepsilon_i, \quad K := Q^{1-\beta}/\theta, \quad \varepsilon_i := (b_i/(\alpha + \gamma_i))^{1/(1-\rho)}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{30}$$

Далее действуем, как и в примере 1; $F(y) = K^{\theta}F(\varepsilon)$, откуда с учетом (20) получаем

$$K = Q^{1-\varepsilon}/\theta = F^{1/\beta-1}(y)/\theta = K^{\theta/(1/\beta-1)}F^{1/\beta-1}(\varepsilon)/\theta = K^{\rho-\theta}F^{1/\beta-1}(\varepsilon)/\theta,$$

тогда

$$K = [F^{1/\beta-1}(\varepsilon)/\theta]^{1/(1-\rho+\theta)}. \tag{31}$$

Этот пример аналогичен примеру 1, и формулы (31), (30) дают явное решение.

2.4. Однородная производственная функция общего вида. Рассмотренные примеры допускают обобщение на случай произвольной однородной производственной функции класса $\mathcal{F}$ с показателем однородности $\theta < 1$. Формула (22) дает значение для градиента функции F:

$$\operatorname{grad} F(y) = h, \quad h = (h_i), \quad h_i := \alpha + \gamma_i. \tag{32}$$

Оказывается, что для однородной функции можно обратить соотношение (32), т.е. выразить аргумент y через значение градиента h. Для этого надо воспользоваться теорией ratio-сопряжения (Беленький, 2006б) для класса W функций Φ со свойствами С1, С2 (п. 2.1) и однородных первой степени.

Приведем здесь необходимые факты этой теории. Если $\Phi(x) \in W$, то ее сопряженная функция $\Phi^*(p)$ определяется на дуальном пространстве $^*R^n$ ковекторов p (см. сноску 1)

$$\Phi^*(p) := \sup\{\lambda | \lambda\Phi(x) \le px \ \forall x \in R^n_+\} = \inf_{x \in R^n_+} \frac{px}{\Phi(x)}. \tag{33}$$

Функция Φ^* обладает теми же свойствами, что и функция Φ (т.е. $\Phi^* \in W$), поэтому можно взять второе сопряжение Φ^{**}. Имеют место факты:

1) $\Phi^{**} = \Phi$;

2) условия

$$p = \operatorname{grad} \ln \Phi(x), \quad x = \operatorname{grad} \ln \Phi^*(p) \tag{34}$$

эквивалентны.

Используя эти факты, проведем следующее построение. Для однородной степени θ производственной функции $F(x)$ положим $\Phi(x) := F^{1/\theta}(x)$, тогда $\Phi \in W$. Из (32) имеем

$$\operatorname{grad} \ln \Phi(y) = \frac{1}{\theta} \operatorname{grad} \ln F(y) = \frac{1}{\theta F(y)} \operatorname{grad} F(y) = \frac{h}{\theta F(y)} =: q;$$

из (34) следует, что

$$y = \operatorname{grad} \ln \Phi^*(q) = \frac{\operatorname{grad} \Phi^*(q)}{\Phi^*(q)}. \tag{35}$$

Так как функция Φ^* однородна первой степени, то, во-первых, $\Phi^*(q) = \Phi^*(h)/\theta F(y)$, а во-вторых, $\operatorname{grad}\Phi^*$ является вектор-функцией нулевой степени однородности, и поэтому $\operatorname{grad}\Phi^*(q) = \operatorname{grad}\Phi^*(h)$. Следовательно, (35) можно записать в виде:

$$y = \frac{\theta}{\Phi^*(h)} F(y) \operatorname{grad} \Phi^*(h) = F(y)\varepsilon, \quad \varepsilon := \theta \operatorname{grad} \ln \Phi^*(h). \tag{36}$$

Обозначив $K := F(y)$, находим из (36) с учетом (20):

$$K = F(y) = F(K\varepsilon) = K^\theta F(\varepsilon) \Rightarrow K = F^{1/(1-\theta)}(\varepsilon). \tag{37}$$

Таким образом, процедура отыскания неподвижной точки выглядит следующим образом:

1) определяем функцию $\Phi := F^{1/\theta}$;

2) по формуле (33) получаем сопряженную функцию Φ^*;

3) вычисляем вектор ε, определенный в (36), для ковектора h, заданного в (32);

4) рассчитываем константу K по формуле (37);

5) находим вектор y (стационарное состояние $\hat{x}$) по формуле $\hat{x} = y = K\varepsilon$ (см. (36)).

Отметим, что данной процедурой неподвижная точка $\hat{x} = y$ определяется однозначно. Применим изложенную общую схему к решению следующего примера.

Пример 3. Функция комплектности степени $\theta < 1$. Функция комплектности[4] на ортанте R^n_+ задается эталонным вектором $b \in R^n_+$ по формуле

$$\Lambda(x) := \max\{\lambda | \lambda b \le x\} = \min_{j = 1, \dots, n} x_j/b_j \tag{38}$$

[4] Термин Л.В. Канторовича; другое ее название – функция Леонтьева.

(неравенство между векторами понимается в покоординатном смысле). Это очень важная функция в теории линейных моделей экономической динамики (см. (Беленький, 2006б)); в (Беленький, 2002, лекция 12) для функции (38) предложено название *векторная дробь* и введено обозначение “x/b”; в частности, имеет место соотношение

$$x \geq \Lambda(x)b \quad \forall x \in R^n_+. \tag{39}$$

Для построения ОТ-модели возьмем в качестве производственной функции $F := \Lambda^\theta$, $\theta < 1$. Нетрудно убедиться, что $F \in \mathcal{F}$. Действуя в соответствии с описанной выше процедурой, находим:

1) $\Phi = \Lambda$;

2) сопряженнная функция (с учетом (39)): $\Phi^*(p) = \inf\limits_{x \in R^n_+}(px/\Lambda(x)) \geq \inf\limits_{x \in R^n_+}(\Lambda(x)pb/\Lambda(x)) = pb$, и поскольку при $x = b$ достигается равенство, то $\Phi^*(p) = pb$;

3) вектор ε (формула (36))

$$\operatorname{grad}\ln\Phi^*(p) = \frac{b}{pb} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\theta}{hb}b,$$

h вычисляется по формуле (32);

4) константа K (формула (37)): так как вектор ε пропорционален b, то с учетом (20) и $F(b) = 1$ имеем

$$K = F^{1/(1-\theta)}(\varepsilon) = F^{1/(1-\theta)}\frac{\theta b}{hb} = \left(\frac{\theta}{hb}\right)^{\theta/(1-\theta)};$$

5) стационарное состояние:

$$\hat{x} = y = K\varepsilon = (\theta/hb)^{1/(1-\theta)}b. \tag{40}$$

Замечание 4. Прямое применение формул (22) в этом примере невозможно, так как функция F недифференцируема (в обычном смысле); аппарат сопряженных функций имеет дело с операцией дифференцирования в обобщенном смысле. Однако результат (40) может быть получен применением теоремы 1 к редуцированной одномерной модели.

В самом деле, при производственной функции (38) система выходит из (любого) начального состояния на эталонный луч (проходящий через эталонный вектор b) и движется вдоль этого луча. Поэтому стационарная точка может быть найдена в одномерной модели движения вдоль эталонного луча, т.е. по закону $x_t = \lambda_t b$, где координата λ_t – скалярная фазовая переменная. Считая, что $\xi := \dot{\lambda}$ является (единственной) управляемой переменной, из эволюционных соотношений (14) получаем:

$$\xi b_j = c_j - \lambda\gamma_j b_j \Rightarrow c_j = (\xi + \lambda\gamma_j)b_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Поскольку в силу (20)

$$F(x) = F(\lambda b) = \Lambda^\theta(\lambda b) = \lambda^\theta, \tag{41}$$

критериальная функция (17) имеет вид:

$$u(\lambda, \xi) = U(\lambda^\theta - (B\xi + \lambda\gamma b)), \quad B := \sum_{j=1}^n b_j. \tag{42}$$

Таким образом, одномерная модель описывается производственной функцией (41), критериальной функцией (42) и эволюционным соотношением $\dot{\lambda} = \xi =: f(\lambda, \xi)$. Применяя к этой модели теорему 1, находим (считая скалярную координату y точкой остановки):

$$E(y) = 0, \quad N(y) = \frac{1}{\alpha}U(y^\theta - y\gamma\beta);$$

одномерное вековое уравнение (13) дает:

$$-BU'(c_0) + \frac{1}{\alpha}U'(c_0)(\theta y^{\theta-1} - \gamma b) = 0$$

(здесь c_0 – то же, что и в (21)). Отсюда получаем

$$\theta y^{\theta-1} = \alpha B + \gamma b = hb,$$

где вектор h определен в (32); это приводит к (40).

3. МОДЕЛЬ МЕЖОТРАСЛЕВОГО ТИПА С АМОРТИЗАЦИЕЙ

Этот вариант модели подобен леонтьевской схеме межотраслевого баланса. Здесь список продуктов отождествлятся со списком ресурсов. Это означает, что рассматривается изолированная экономика (без внешних связей), в которой все ресурсы, необходимые для производства, воспроизводятся в самой системе. Таким образом, фазовым пространством модели является пространство продуктов-ресурсов R_+^n. Модель открыта по потреблению: трудовые ресурсы считаются не лимитирующими и не включаются в список ресурсов; поэтому вектор потребления c выделяется в балансовых соотношениях отдельно. Как и в разд. 2, время непрерывно и критериальным функционалом модели выступает интегральная дисконтированная полезность потребления

$$Cr(\zeta) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} U(c_t) dt \longrightarrow \max_{\zeta} =: G(a). \tag{43}$$

В отличие от (15) функция полезности $U(c)$ имеет своим аргументом вектор $c \in \dot{R}_+^n$; предполагаем, что данная функция обладает свойствами C1, C2 (п. 2.1). Эволюционное соотношение модели имеет вид:

$$\dot{x} = F(x) - \Gamma x - c, \quad x \in R_+^n, \tag{44}$$

где $x \in R_+^n$ – вектор ресурсов; $Y := F(x) \in \dot{R}_+^n$ – вектор производимых продуктов; $\Gamma = \mathrm{diag}(\gamma)$ – n-мерная диагональная матрица с коэффициентами γ_j амортизации (выбытия) ресурсов (предполагаем, что все компоненты вектора γ строго положительны); c – вектор потребления, компоненты c_j которого рассматриваются как переменные управления.

В состоянии x множество допустимых управлений определяется независимо по каждой компоненте:

$$d_j(x) := \begin{cases} R_+, & \text{если} \quad x_j > 0, \\ [0, F_j(x)], & \text{если} \quad x_j = 0, \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{45}$$

Таким образом, перед нами каноническая задача 1 с критериальной функцией $u(x, c)) := U(c)$ и эволюционной функцией $f(x, c) := F(x) - \Gamma x - c$. Информационный паспорт модели по сути тот же, что в разд. 2, это четверка $\{F, U, \Gamma, \alpha\}$.

В модели межотраслевого баланса функция F задается матрицей выпуска $B(n \times n)$, т.е. $F(x) := Bx$. К соответствующей модели применима магистральная теория; здесь же, как и в разд. 2, будем рассматривать выпуклую ОТ-модель, предполагая, что все компоненты вектора $F = (F_k)$ принадлежат классу $\mathcal{F}$.

3.1. Вековое уравнение. Как и в разд. 2, в выпуклой модели справедлива лемма 1; для данного случая доказательство полностью сохраняется. По-прежнему число переменных управления совпадает с размерностью фазового пространства. Применяя формулы (8), (10), находим

$$E(y) = F(y) - \Gamma y, \quad N(y) = U(E(y))/\alpha. \tag{46}$$

Вековое уравнение, учитывая, что $\partial f_j/\partial c_i$ отлично от нуля только для $j = i$ (и при этом равно –1), имеет вид

$$\left.\frac{\partial U}{\partial c_i}\right|_{c = E(y)} - \frac{\partial N}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{47}$$

или, с учетом (46), в векторной форме –

$$\mathrm{grad}_c U(c)_{c = E(y)} = \mathrm{grad}_y U[E(y)]/\alpha. \tag{48}$$

Если ввести матрицу $D(n \times n)$ с элементами $d_{ki} := \partial E_k(y)/\partial y_i$ и обозначить $v \ := \operatorname{grad} U|_{c = E(y)}$, то относительно y уравнение (48) можно записать в виде

$$vD = \alpha v, \quad y \in R^n_+ \tag{49}$$

(умножение слева, так как v является ковектором). Отметим, что это система n уравнений с n неизвестными.

Ввиду (46), $D = M - \Gamma$, где M – матрица с элементами $m_{ki} := \partial F_k(y)/\partial y_i$, причем в силу свойства C1 функции F матрица **F** неотрицательная, и (49) удобно записать в форме

$$vM = v(\alpha I + \Gamma), \tag{50}$$

где I – единичная матрица[5]. Если преобразовать (50) к виду

$$vH = v, \quad H := M(\alpha I + \Gamma)^{-1}, \tag{51}$$

то ковектор v является левым собственным вектором неотрицаельной матрицы H, отвечающим собственному значению единица. Так как функция U обладает свойством C1, то v – неотрицательный вектор, поэтому из (51) следует, что спектральный радиус матрицы H равен единице (Карлин, 1964, разд. 8.2).

Итак, если уравнение (49) (или, что эквивалентно, (50), (51)) имеет решение и справедлива гипотеза, высказанная в п. 2.1, то это решение определяет стационарную точку $\hat{x}$ описанной модели.

Пример 4. Рассмотрим иллюстративный пример, в котором удается получить решение векового уравнения в окончательной явной форме. Пусть функция полезности линейная: $U(c) = vc$, $c \in R^n_+$, где ковектор $v \in {}^*R^n$ фиксирован (задан). В этом случае $\operatorname{grad} U(c) = v = \text{const}$. В качестве компонент производственной функции $F = (F_k)$ возьмем

$$F_k(x) = (b_k x)^{\theta_k}, \quad k = 1, \ldots, n, \quad x \in R^n_+,$$

где b_k – строка k заданной неотрицательной матрицы $B = (b_{ki})$, а показатель однородности $\theta_k < 1$ (свой для каждой компоненты); тогда элементы матрицы M таковы:

$$f_{ki} = \theta_k (b_k y)^{\theta_k - 1} b_{ki}.$$

Если ввести ковектор

$$\xi = (\xi_k) \in {}^*R^n, \quad \xi_k := \theta_k (b_k y)^{\theta_k - 1} v_k, \tag{52}$$

то уравнение (50) можно записать в виде

$$\xi B = v(\alpha I + \Gamma). \tag{53}$$

В этом линейном уравнении (относительно ξ) правая часть – известный ковектор, определитель $\det(B)$ обязан быть отличным от нуля (ибо в противном случае отображение $x \longrightarrow F(x)$ было бы вырожденным). Следовательно, уравнение (53) имеет единственное решение

$$\xi = vL, \quad L := (\alpha I + \Gamma) B^{-1}. \tag{54}$$

Вектор ξ, вообще говоря, не обязан быть положительным, но если $\xi \in R^n_+$, то далее, из (52) имеем

$$b_k y = (\theta_k v_k / \xi_k)^{1/(1-\theta_k)} =: z_k, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{55}$$

или, в векторной форме, $By = z$, $z = (z_k) \in R^n_+$, откуда

$$y = B^{-1} z. \tag{56}$$

Итак, если векторы (54), (56) неотрицательные, то они однозначно определяют неподвижную точку $\hat{x} = y$, которая, возможно (а при выполнении гипотезы п. 2.1, то наверняка), является стационарным состоянием в данном примере.

[5] Интересно сопоставить это с уравнением (22).

Приведем два числовых варианта расчета по полученным формулам, показывающих, что решение может существовать, а может и не существовать. Рассматривается двумерная модель ($n = 2$) с функцией полезности $U(c) = c_1 + c_2$ (т.е. $v = (1, 1)$) и исходными данными:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \theta_1 = \theta_2 = 0{,}5.$$

Вариант 1. $\alpha = 0.4$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1.6$. По формуле (54) находим

$$\alpha I + \Gamma = \begin{pmatrix} 1{,}4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 2{,}8 & -1{,}4 \\ -2{,}0 & 2{,}0 \end{pmatrix}, \quad \xi = 0{,}2(4, 3),$$

а затем по формулам (55), (56) –

$$z = 0{,}25\left(\frac{1}{\xi_1^2}, \frac{1}{\xi_2^2}\right) = \frac{25}{576}(9, 16), \quad y = \frac{25}{576}(2, 7).$$

Оба вектора ξ, y положительные, значит, решение существует.

Вариант 2. $\alpha = 0.2$, $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 1$. Проведя аналогичные вычисления, получаем:

$$\alpha I + \Gamma = \begin{pmatrix} 2{,}2 & 0 \\ 0 & 1{,}2 \end{pmatrix} \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 4{,}4 & -2{,}2 \\ -1{,}2 & 1{,}2 \end{pmatrix}, \quad \xi = (3{,}2, -1).$$

Так как вектор ξ неположителен, решения нет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Беленький В.З. (1979): Оптимальное развитие производства при стационарно растущем спросе // *Экономика и мат. методы.* Т. XIV. Вып. 4.

Беленький В.З. (1991): Вековое уравнение для неповижных точек оптимальной стратегии стационарного уравнения Беллмана // *Экономика и мат. методы.* Т. XXVII. Вып. 5.

Беленький В.З. (2002): Количественный анализ в моделях экономики (лекции для студентов). М.: Экономический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, ТЕИС.

Беленький В.З. (2004): Теорема о стационарном решении обобщенной модели Рамсея–Касса–Купманса. В сб.: "*Анализ и моделирование экономических процессов*". Вып. 1. М.: ЦЭМИ РАН.

Беленький В.З. (2006а): О понятии "потенциал экономической системы" // *Экономическая наука современной России.* Т. 8. № 1.

Беленький В.З. (2006б): Операция ratio-сопряжения и ее применение в линейно-однородных моделях экономики // *Экономика и мат. методы.* Т. 42. № 2.

Беленький В.З. (2006в): Оптимальное управление: принцип максимума и динамическое программирование. М., Ижевск: R&C Dynamics.

Беленький В.З. (2007): Оптимизационные модели экономической динамики. М.: Наука.

Беленький В.З., Кетова К.В. (2006): Вековое уравнение для устойчивой неподвижной точки стационарной динамической конечномерной модели ЭД в непрерывном времени. В сб. "*Анализ и моделирование экономических процессов*". Вып. 3. М.: ЦЭМИ РАН.

Беленький В.З., Сластников А.Д. (1997): Модель оптимального инвестирования проекта новой технологии // *Экономика и мат. методы*. Т. 33. № 3.

Карлин С. (1964): Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир.

Кетова К.В. (2004): Оптимальное распределение капиталовложений с учетом демографического прогноза. Диссертация. ДС К212.065.02. Ижевск: ИжГТУ.

Кетова К.В., Сабирова О.Р. (2006): Макромодель развития региона с учетом повышения качества трудовых ресурсов. В сб. "*Анализ и моделирование экономических процессов*". Вып. 3. М.: ЦЭМИ РАН.

Клейнер Г.Б. (1986): Производственные функции. М.: Фин. и стат.

Мельников Н.Б. (2005): Существование и единственность функции цены в многомерной модели Рамсея // *Вестник МГУ.* Сер. 15. Вычислительная мат. и кибернетика. № 3.

Поступила в редакцию
22.03.2007 г.

Stationary States in the Dynamic Models with Bounded Trajectories

V. Z. Belenky, K. V. Ketova, O. R. Sabirova

The problem of finding stationary states in dynamic models with bounded trajectories is considered. Its solution is given on the base the "secular" equation for the fixed-points of optimal strategy, previously developed by the authors. For two variants of model (monoproduct – section 2, and multiproduct – section 3) the finite explicit formula for searched states is obtained.