ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2008, том 44, № 3, с. 111–116

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

ДВУХЭТАПНАЯ ЗАДАЧА СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ

© 2008 г. **А. В. Зыкина, О. Н. Канева, С. Б. Огородников**

(Омск)

Используется стохастический подход к учету и анализу рисков в модели формирования портфелей, которая строится на основе двухэтапной задачи стохастического программирования.

Проблемам, возникающим в ходе работы с ценными бумагами, посвящено большое число работ, например (Ширяев, 1998). Установлено, что риск при операциях с ценными бумагами можно снизить, если формировать портфель ценных бумаг. В общем случае задача формирования портфеля состоит в выборе такого распределения средств между активами, при котором показатели портфеля по ожидаемой доходности и риску устраивают инвестора. Экономическая эффективность работы системы формирования и сопровождения портфелей ценных бумаг в большинстве случаев определяется качеством аппарата, используемого для математического обеспечения системы.

1. ДВУХЭТАПНАЯ ЗАДАЧА СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Классическая постановка двухэтапной задачи линейного стохастического программирования имеет вид (Юдин, 1974, с. 152):

$$\min_x M_\omega \{c(\omega)x + \min_y [d(\omega)y]\} \tag{1}$$

при условиях

$$A(\omega)x + B(\omega)y = b(\omega), \quad y \geq 0, \tag{2}$$

$$x \in X, \tag{3}$$

где ω – случайная величина, которая определяет состояние природы и является элементом вероятностного пространства (Ω, F, P), задаваемого непустым множеством элементарных событий Ω, σ-алгеброй F подмножеств Ω и вероятностной мерой P на F; $c(\omega)$ – случайный n-мерный вектор, описывающий затраты, связанные с реализацией предварительного плана $x = (x_1, ..., x_n)$ в состоянии природы ω; $A(\omega)$ – матрица размерности $m \times n$, которая вместе со случайным m-мерным вектором $b(\omega)$ задает ограничения исходной стохастической задачи для двухэтапной задачи (1)–(3) в виде $A(\omega)x = b(\omega)$; $y = y(\omega)$ – случайный r-мерный вектор, который вместе с $(r \times m)$-матрицей $B(\omega)$ позволяет скорректировать невязки, возникающие в ограничениях $A(\omega)x = b(\omega)$ после реализации предварительного плана x; $d(\omega)$ – случайный r-мерный вектор, задающий штрафные коэффициенты реализации коррекции $y = y(\omega)$; X – некоторое непустое множество из R^n, определенное ограничениями, не зависящими от ω.

Если задача (1)–(3) интерпретируется в терминах планирования производства, а $A(\omega)$ – матрица основных технологических способов, то $B(\omega)$ – матрица аварийных технологических способов, устанавливающих возможные пути компенсации обнаруженных невязок.

Процесс решения задачи (1)–(3) разбивают на два этапа. На первом этапе выбирается предварительный план $x \in X$. Затем фиксируются реализация случайной величины ω и соответствующие значения элементов $c(\omega)$, $d(\omega)$, $A(\omega)$, $B(\omega)$, $b(\omega)$. На втором этапе вычисляется план компенсации y согласно условиям (2). Это делается таким образом, чтобы обеспечить минимальное значение штрафа $d(\omega)y$ за невязки, возникающие при реализации предварительного плана x.

Рассмотрим постановку двухэтапной задачи, в которой выбор плана-компенсации y подчиняется условиям (Канева, 2005, с. 53):

$$A(\omega)x - b(\omega) \le B(\omega)y, \quad y \ge 0, \tag{4}$$

$$y(A(\omega)x - b(\omega)) = yB(\omega)y. \tag{5}$$

Задача (4)–(5) является линейной задачей дополнительности $LCP(B, q)$ относительно переменных y при фиксированных x и ω с заданной матрицей $B = B(\omega)$ и правой частью $q = A(\omega) - b(\omega)$ (Базара, Шетти, 1982, с. 450). Если неравенства в (4) понимать покоординатно как сопряженные неравенства, то условия (5) – это классические условия дополняющей нежесткости (в каждой паре сопряженных неравенств из (4) есть хотя бы одно равенство).

В терминах планирования производства получаем следующую интерпретацию задачи (4)–(5):

– компоненты вектора $[A(\omega)x - b(\omega)]^+$ задают объем дефицита по каждому виду ресурса, который может возникнуть при известном плане x и при реализации состояния природы ω;

– компоненты вектора y определяют план-компенсацию дефицита по каждому виду ресурса;

– элемент $b_{ij}(\omega)$ матрицы $B(\omega)$ задает объем закупки ресурса i при плане-компенсации $y = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, где единица стоит на месте j.

Штраф за реализацию плана компенсации y будем задавать в виде функции

$$yd(\omega, x) = y(A(\omega)x - b(\omega)). \tag{6}$$

Тогда задача второго этапа при принятом плане x и известном значении ω состоит в минимизации затрат (6) при условиях (4)–(5). В результате получаем следующую постановку двухэтапной задачи стохастического программирования:

$$\min_x M_\omega \{c(\omega)x + \min_y [y(A(\omega)x - b(\omega))]\} \tag{7}$$

при условиях

$$B(\omega)y \ge A(\omega)x - b(\omega), \quad y \ge 0, \tag{8}$$

$$y(A(\omega)x - b(\omega)) = yB(\omega)y, \tag{9}$$

$$x \in X. \tag{10}$$

Наличие ограничения (9) в задаче (7)–(10) придает компонентам вектора y свойства двойственных переменных, что позволяет проводить компенсацию невязок на пределе совместности.

2. МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ

Под портфелем подразумевается совокупность ценных бумаг (m видов), купленных на некоторую фиксированную сумму S в объемах $Q_1, ..., Q_m$. Структурой портфеля $(x_1, ..., x_n)$ называется распределение капитала S между составляющими портфель акциями и облигациями, т.е. ценовая доля для каждого вида ценных бумаг в портфеле: $x_i = Q_i s_i / S$, $i = 1, ..., m$, где s_i – стоимость ценной бумаги i.

Основной задачей в процессе формирования оптимального портфеля ценных бумаг является распределение инвестором капитала по различным альтернативным вложениям с целью максимизации доходности. Любое вложение капитала связано не только с ожиданием получения дохода, но и с постоянной опасностью проигрыша, а значит, в оптимизационных задачах по выбору портфеля ценных бумаг необходимо учитывать риск.

Одной из первых работ, посвященных формированию оптимального портфеля ценных бумаг, является опубликованная в 1952 г. фундаментальная работа Г. Марковица о диверсификации портфеля ценных бумаг (Ширяев, 1998), где он ставит задачу выбора оптимального портфеля из набора ценных бумаг, рассматриваемого на одном периоде действия доходностей при знании распределений и взаимозависимостей доходностей. Выбранный портфель должен удовлетворять требованиям желаемой доходности $r = M\rho$ (средняя доходность портфеля) и допустимого риска $\sigma^2(x) = M(\rho - r)^2$ – совокупным характеристикам портфеля (здесь $\rho = \frac{\partial}{\partial t}\ln S$ – мгновенная доходность портфеля). Имея эти две характеристики (среднюю доходность портфеля и его риск), можно формулировать различные оптимизационные задачи выбора наилучшего портфеля в зависимости от критерия оптимальности.

Будем рассматривать задачу выбора оптимального портфеля для инвестора, желающего минимизировать риск. Обычно финансовые инструменты, которые имеют минимальный риск, имеют также минимальную доходность. Поэтому в оптимизационную задачу введем ограничение, гарантирующее минимальную желаемую доходность. В результате получается задача:

$$\min xWx, \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i r_i \geq r^0, \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{13}$$

где W – матрица, элементами которой являются $w_{ij} = M(\rho_i - r_i)(\rho_j - r_j) = \mathrm{cov}(\rho_i, \rho_j)$ – коэффициенты ковариации между доходностями ρ_i и ρ_j активов i и j; $r_i = M(\rho_i)$ – средняя доходность актива i; r^0 – заданный уровень доходности портфеля.

3. МОДИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ

Рассмотрим следующую модификацию задачи (11)–(13). Будем использовать не среднюю прогнозируемую доходность акции, а саму доходность акции – случайную величину ρ_i, $i = 1, \ldots, m$, тогда задачу стохастического программирования получим в виде (Канева, 2005, с. 73):

$$\min xWx, \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \rho_i \geq r^0, \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{16}$$

Далее, пусть d_i – желаемый доход по каждой акции отдельно и $r_i^0 = d_i/S$, $i = 1, \ldots, m$, тогда получаем задачу:

$$\min xWx, \tag{17}$$

$$x_i \rho_i \geq r_i^0, \tag{18}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{19}$$

Конечно, замена ограничения (15) системой (18) сужает допустимую область, но такая модификация модели позволяет инвестору более избирательно и целенаправленно управлять структурой портфеля.

Будем рассматривать полученную задачу как задачу двухэтапного стохастического программирования, где ограничениями первого этапа являются условия (19). Тогда решением задачи первого этапа будет вектор x, удовлетворяющий условию (19) и минимизирующий целевую функцию (17). После реализации случайных величин условия (18) могут нарушиться и возникнуть невязки, определяемые как $[r_i^0 - x_i r_i]^+$. В этом случае неотрицательная компонента i вектора y задает число мероприятий по компенсации невязок, образовавшихся из-за невыполнения условия i из (18). За реализацию плана компенсации взимается штраф $y(r_0 - xR)$. Здесь R – диагональная матрица размером $m \times m$, на диагонали которой стоят случайные величины ρ_i, $i = 1, \ldots, m$. При этом план компенсации y должен удовлетворять условиям:

$$By \geq r^0 - xR, \quad y \geq 0, \quad yBy = y(r^0 - xR).$$

Весь описанный выше процесс решения можно записать в виде задачи:

$$\min_x [xWx + M_\rho\{\min_y [y(r^0 - xR)]\}], \tag{20}$$

$$By \geq r^0 - xR, \quad y \geq 0, \tag{21}$$

$$yBy = y(r^0 - xR), \tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{23}$$

Содержательно данную задачу можно интерпретировать следующим образом. В ходе прогнозирования делается предположение о распределении случайных величин ρ_i, рассчитывается матрица ковариации W, задается вектор $r^0 = (r_1^0, \ldots, r_m^0)$ желаемого уровня доходности, который должен быть получен от каждого вида акций в портфеле. Далее составляется предварительный план – план первого этапа. Затем по реализации случайных составляющих ограничений задачи вычисляются невязки, возникшие из-за нарушения неравенств (18), и вводится план компенсации, который задает мероприятия по устранению возникших отклонений. Решение задачи второго этапа состоит в выборе плана, который обеспечил бы минимальные затраты на его реализацию. Матрицу B можно интерпретировать как аварийную технологическую матрицу, элементы b_{ij} которой представляют объем средств, которые компенсируют невязку i при условии, что проводится одно мероприятие по устранению невязки j.

Условия существования решений таких задач исследованы в работе (Канева, 2005, с. 54). При поиске предварительного плана основная проблема состоит в том, чтобы для него при всех возможных реализациях случайных величин существовало бы решение задачи второго этапа. Процесс решения задачи итеративен, и на каждом шаге исходный план x^0 последовательно уточняется путем учета различных возможных вариантов реализаций случайных величин. Таким образом, в процессе решения задачи учитываются варианты реализации случайных величин ρ_i и выбирается оптимальная структура портфеля.

Алгоритм решения задачи (20)–(23) изложен в (Канева, 2005, с. 58). Решение задачи проводится с помощью метода обобщенных стохастических квазиградиентов. Метод обобщенных стохастических квазиградиентов не предполагает дифференцируемости целевой функции задачи и не требует задания стохастических характеристик случайных параметров условий задачи. Для итеративного решения задачи используется последовательность реализаций случайных величин, входящих в функции ограничений и в целевую функцию.

4. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для проведения численного эксперимента был реализован прототип торговой системы, предназначенной для формирования портфелей ценных бумаг. Система состоит из двух блоков: "менеджер прогнозов" (отвечает за получение прогнозных значений доходностей акций) и "менеджер портфелей" (отвечает за формирование портфелей).

В блоке "менеджер прогнозов" реализован метод LGAP (Загоруйко, 1999, с. 130). Применение данного метода дает возможность получать в качестве результата прогноза набор возможных значений курса акций в будущем. Кроме того, при прогнозировании курса некоторой ценной бумаги алгоритм позволяет учитывать в качестве факторов, влияющих на ее стоимость, курсы других ценных бумаг. С помощью выборки возможных значений курса восстанавливается плотность вероятности будущего курса ценной бумаги. Восстановленная плотность вероятности используется для формирования генератора случайных величин, а генератор случайных величин – при итеративном процессе решения задачи двухэтапного стохастического программирования. В разработанной системе для построения генератора случайных величин проводится параметрическое восстановление плотности вероятности на основании предположения о нормальности распределения ρ_i и непараметрическом восстановлении плотности вероятности случайных величин ρ_i.

Результаты формирования портфелей ценных бумаг

Используемая модель	Средняя доходность	Среднеквадратичное отклонение	Минимальное значение	Максимальное значение
Одноэтапная задача на основе модели Марковица	1.0119	0.0226	0.9620	1.0640
Двухэтапная задача с параметрическим восстановлением плотности вероятности	1.0071	0.0216	0.9597	1.0447
Двухэтапная задача с непараметрическим восстановлением плотности вероятности	1.0075	0.0212	0.9623	1.0447
Базовый портфель	1.0091	0.0232	0.9594	1.0479

В блоке “менеджер портфелей” осуществляется формирование портфелей, хранение созданных портфелей и расчет статистики. Для этого были использованы модель Марковица и двухэтапная модель. В качестве периода инвестирования был выбран краткосрочный период – 4 дня. Для проверки применимости методов в ходе вычислительного эксперимента произведено составление 74 портфелей для дат, начиная с 17.01.2005 г. и заканчивая 29.04.2005 г.

Эффективность составления портфеля ценных бумаг проверялась путем сравнения их с рыночным, *базовым* портфелем (портфель, составленный из того же перечня ценных бумаг, но бумаги входят в него в равных пропорциях). В связи с этим в процессе проведения эксперимента составления портфеля для каждой модели была собрана статистика по средней доходности составленных портфелей. Результаты сравнения, минимальные и максимальные значения доходностей по каждой модели и среднеквадратическое отклонение, вычисленное по результатам моделирования, приведены в таблице.

Эксперимент показал, что наилучший результат по доходности дает модель Марковица (т.е. решение одноэтапной задачи стохастического программирования), наихудший результат – двухэтапная модель с параметрическим восстановлением плотности вероятности при принятии гипотезы о нормальном законе распределения доходности ценной бумаги.

Модель Марковица (среди трех рассмотренных) обладает наибольшим риском, наименьшим риском – двухэтапная модель стохастического программирования и непараметрического восстановления плотности вероятности. Применение двухэтапного подхода к решению задач стохастического программирования приводит к уменьшению риска порядка 10%. Это дает основания заключить, что использование предложенного математического аппарата позволяет эффективно учитывать и минимизировать риски, возникающие при работе с ценными бумагами.

Рассмотренные модели и алгоритмы реализованы в прототипе торговой системы, с помощью которого был проведен численный эксперимент. Результаты эксперимента позволяют сделать вывод об эффективности применения предложенных моделей двухэтапных задач стохастического программирования. Эксперимент показал, что эти модели при формировании портфелей дают меньшие показатели доходности, но в то же время имеют меньший риск, чем модели Марковица или базового портфеля. Результаты исследования могут применяться при разработке систем механической и автоматической торговли.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Базара М., Шетти К. (1982): Нелинейное программирование: теория и алгоритмы. М.: Мир.

Загоруйко Н.Г. (1999): Прикладные методы анализа данных и знаний. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики.

Канева О.Н. (2005): Формирование портфеля ценных бумаг. В сб. “*Военная техника, вооружение и технологии двойного применения*”. Материалы III Международного технологического конгресса. Омск: ОмГУ.

Канева О.Н. (2005): Двухэтапная задача линейного стохастического программирования. В сб.: “*Прикладная математика и информационные технологии*”. Омск: Изд-во ОмГТУ.

Нурминский Е.А. (2000): Математические основы теории финансовых рынков. Владивосток: Изд-во Дальневосточного ун-та.

Ширяев А.Н. (1998): Основы стохастической финансовой математики. М.: ФАЗИС.

Юдин Д.Б. (1974): Математические методы управления в условиях неполной информации. М.: Сов. радио.

Поступила в редакцию
16.02.2006 г.

The Two-Phase Task of the Stochastic Programming for Shaping Securities Portfolio Structure

A.V. Zikhina, O.N. Kaneva, S.B. Ogorodnikov

The stochastic approach is used for the account and risk analysis in the portfolio model. The model is built up on the two-phase task of the stochastic programming.