
МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

МЕТОД РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЙ НЕТОЧНЫЕ ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ*

© 2008 г. Е. Г. Гольштейн

(Москва)

Отмечена связь между задачей решения вариационного неравенства и задачей отыскания неподвижной точки точечно-множественного отображения выпуклого компакта в себя. Приведены примеры вариационных неравенств, связанных с выпуклой оптимизацией, выпуклой антагонистической игрой, выпуклой некоалиционной игрой многих лиц, задачей отыскания равновесных цен. Описан итеративный метод оракульного типа решения вариационного неравенства, определяемого монотонным отображением, при наличии ошибок в откликах оракула. Установлены требования к ошибкам оракула, гарантирующие возможность отыскания ε -решения вариационного неравенства при фиксированном $\varepsilon > 0$. Получена оценка сверху для числа итераций метода, необходимых для вычисления ε -решения вариационного неравенства.

1. ВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Пусть G — подмножество евклидова пространства E ; T — точечно-множественное отображение, которое каждой точке $z \in G$ ставит в соответствие непустое подмножество $T(z)$ пространства E . Условная запись вариационного неравенства, определяемого множеством G и отображением T , имеет вид

$$\langle T(z), z' - z \rangle \geq 0 \quad \forall z' \in G. \quad (1)$$

Под решением вариационного неравенства (1) понимается такая точка $z^* \in G$, что при некотором $t^* \in T(z^*)$ неравенство $\langle t^*, z' - z^* \rangle \geq 0$ справедливо для всех точек $z' \in G$. Если, в частности, отображение T является точечно-точечным, т.е. множество $T(z)$ состоит из единственной точки для любого $z \in G$, то запись (1) приобретает точный смысл. Множество всех решений вариационного неравенства (1) обозначим Z^* .

В дальнейшем при анализе вариационного неравенства (1) будем опираться на следующие допущения относительно множества G и отображения T .

Допущение А. Множества G и $T(z)$ при любом $z \in G$ выпуклые компакты; множества $T(z)$, $z \in Z$, равномерно ограничены; отображение T полунепрерывно сверху на G , т.е. если любые последовательности $z_k \in G$ и $t_k \in T(z_k)$ сходятся, соответственно, к точкам z_0 и t_0 , то $t_0 \in T(z_0)$.

Допущение Б. Отображение T является монотонным, т.е. при любых $z', z'' \in G$ и $t' \in T(z')$, $t'' \in T(z'')$ имеет место неравенство

$$\langle t' - t'', z' - z'' \rangle \geq 0. \quad (2)$$

Заметим, что из допущения А вытекает

$$L = \sup_{t \in T(z), z \in G} |t| < \infty. \quad (3)$$

Покажем, что допущение А обеспечивает разрешимость вариационного неравенства (1), т.е. непустоту множества Z^* .

Рассмотрим сначала случай, когда отображение T является точечно-точечным. Введем отображение проектирования $Q_G(z)$, которое каждой точке $z \in E$ ставит в соответствие проекцию z на множество G , и рассмотрим точечно-точечное отображение $T'(z) = Q_G(z - T(z))$, $z \in G$. Отображение T' переводит выпуклый компакт G в себя и непрерывно (вследствие условия А и нерастяжимости отображения Q_G : $|Q_G(z') - Q_G(z'')| \leq |z' - z''|$), т.е. удовлетворяет условию теоремы Брауэра (Brower, 1909) о неподвижной точке. Поэтому существует такая точка $z^* \in G$, что $T'(z^*) = z^*$. Точка z^* является решением вариационного неравенства (1). Действительно, если $z^* - T(z^*) \in G$, то

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00491).

z^* — корень отображения T и поэтому содержится в Z^* . Если же $z^* - T(z^*) \notin G$, то, учитывая, что точка z^* — это проекция $z^* - T(z^*)$ на G , имеем $\langle T(z^*), z' - z^* \rangle \geq 0$ при любом $z' \in G$, т.е. $z^* \in Z^*$.

Обратимся к общему случаю точечно-множественного отображения T . Стандартная схема доказательства теоремы Какутани о неподвижной точке (Kakutani, 1941) на базе теоремы Брауэра основана на аппроксимации точечно-множественного отображения с помощью последовательности кусочно-линейных точечно-точечных отображений. Эта схема позволяет установить непустоту Z^* , используя доказанную разрешимость вариационного неравенства (1) для любого точечно-точечного отображения T , удовлетворяющего допущению А.

Заметим, что задача отыскания неподвижной точки точечно-множественного отображения выпуклого компакта в себя в предположениях теоремы Какутани является частным случаем задачи решения вариационного неравенства (1) при соблюдении требования А. Действительно, пусть T — точечно-множественное отображение выпуклого компакта G в себя, удовлетворяющее требованиям теоремы Какутани. Введем отображение $\bar{T}(z) = z - T(z)$, $z \in \text{int}G$, которое, очевидно, подчиняется допущению А, и рассмотрим вариационное неравенство (1), определяемое отображением $\bar{T}$ и компактом G . Пусть $z^* \in G$ — одно из решений этого неравенства, т.е.

$$\exists \bar{t}^* \in \bar{T}(z^*): \langle \bar{t}^*, z' - z^* \rangle \geq 0 \quad \forall z' \in G. \quad (4)$$

Из (4) и того, что $\bar{t}^* = z^* - t^*$, $t^* \in T(z^*)$, $z^* \in G$, получаем $|t^* - z^*| \leq 0$. Таким образом, $t^* = z^*$ и, значит, z^* — неподвижная точка точечно-множественного отображения T .

2. ПРИМЕРЫ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

Приведем несколько классов задач, связанных с оптимизацией и поиском равновесия, которые можно свести к вариационному неравенству (1) при отображении T , удовлетворяющем условиям А и Б.

Выпуклая оптимизация. Пусть f — выпуклая липшицева функция с постоянной $L > 0$, определенная конечными значениями на выпуклом компакте $G \subset E$ с непустой внутренностью. Сделанные допущения обеспечивают субдифференцируемость f на G . При этом, если $z \in \text{int}G$, то субдифференциал $\partial f(z)$ содержится в шаре радиуса L с центром в нуле, если же z — граничная точка G , то $\partial f(z)$ содержит элементы с нормой, не превышающей L .

Введем точечно-множественное отображение T_1 , положив при любом $z \in G$:

$$T_1(z) = \{l \in \partial f(z): \|l\| \leq L\}.$$

Из отмеченного выше вытекает непустота множества $T_1(z)$ при любом $z \in G$. Кроме того, из выпуклости и замкнутости субдифференциала $\partial f(z)$ следует, что $T_1(z)$ — выпуклый компакт при любом $z \in G$. Заметим, что отображение T_1 монотонно и полунепрерывно сверху на G . Таким образом, множество G и определенное на нем отображение T_1 удовлетворяют требованиям А, Б. Нетрудно убедиться, что множество решений вариационного неравенства (1) при $T = T_1$ совпадает с множеством точек минимума функции f на компакте G . Итак, при сделанных предположениях относительно f и G задача поиска решения вариационного неравенства (1) при $T = T_1$ эквивалентна задаче минимизации f на компакте G , причем T_1 и G удовлетворяют требованиям А, Б.

Выпуклая антагонистическая игра. Пусть G_x и G_y — выпуклые компакты с непустыми внутренностями, расположенные, соответственно, в евклидовых пространствах E_x и E_y , $G = G_x \times G_y$, $E = E_x \times E_y$. Пусть далее $f(z) = f(x, y)$, $z = (x, y)$ — вогнутая по x , выпуклая по y функция, определенная конечными значениями на G и удовлетворяющая на G условию Липшица с постоянной L . Сделанные предположения гарантируют супердифференцируемость f по x и субдифференцируемость f по y в каждой точке $z = (x, y) \in G$. При этом, если $z \in \text{int}G$, $l_x \in \partial_x f(z)$, $l_y \in \partial_y f(z)$, то $(|l_x|^2 + |l_y|^2)^{1/2} \leq L$, если же z — граничная точка G , то среди элементов множества $\partial_x f(z) \times \partial_y f(z)$ существуют такие, норма которых не превышает L .

Функция f и множество $G = G_x \times G_y$ задают антагонистическую игру Γ , в которой f — функция выигрыша первого игрока, G_x — множество стратегий первого игрока, G_y — множество стратегий второго игрока. С учетом сделанных выше предположений относительно f и G игру Γ естественно называть выпуклой.

Рассмотрим точечно-множественное отображение T_2 , определяемое для любой точки $z \in G$ соотношением

$$T_2(z) \in \{(-l_x, l_y) \in E: (l_x, l_y) \in \partial_x f(x) \times \partial_y f(z), |(l_x, l_y)| \leq L\}.$$

Из сказанного выше вытекает, что $T_2(z)$ — непустой выпуклый компакт при любом $z \in G$. Нетрудно проверить, что отображение T_2 полунепрерывно сверху на G , кроме того, T_2 является монотонным отображением (см., например (Гольштейн, Третьяков, 1989, § 1, гл. 4). Таким образом, отображение T_2 удовлетворяет допущениям А и Б. Вместе с тем, легко убедиться, что множество седловых точек функции $f(x, y)$, $x \in G_x$, $y \in G_y$, совпадает с множеством решений вариационного неравенства (1) при $T = T_2$. Итак, задача отыскания оптимальных стратегий игроков для выпуклой антагонистической игры Γ эквивалентна решению вариационного неравенства (1) при отображении T_2 , удовлетворяющем допущениям А и Б.

Выпуклая некоалиционная игра многих лиц. Некоалиционная игра Γ с $k \geq 2$ игроками задается непустыми множествами $X_i \subset E_i$ стратегий игроков и функциями $f_i(x)$ выигрышей игроков, где $x = (x_1, \dots, x_k) \in X = X_1 \times \dots \times X_k \subset E = E_1 \times \dots \times E_k$; E_i — евклидовы пространства, $1 \leq i \leq k$. Игра Γ называется *выпуклой*, если для каждого i множество X_i — выпуклый компакт, а функция $f_i(x)$ непрерывна на X и вогнута по $x_i \in X_i$ при любых фиксированных $x_t \in X_t$, $t \neq i$.

Рассмотрим любую функцию φ , зависящую от k аргументов $x_1, \dots, x_k$. Иногда бывает необходимо отметить некоторые свойства φ как функции от одного конкретного аргумента x_i . В этом случае удобно пользоваться обозначением $\hat{x}_i$, понимая под ним набор переменных $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k$. Таким образом, функция φ зависит от аргументов x_i и $\hat{x}_i$, что и отражается в обозначении $\hat{\varphi}_i(x_i, \hat{x}_i) \equiv \varphi(x_1, \dots, x_k)$.

Пусть $\hat{X}_i$ — декартово произведение множеств X_t по всем t , отличным от i . В дальнейшем будем предполагать, что при любом i функция $\hat{f}_i(x_i, \hat{x}_i) = f_i(x)$ допускает конечнозначное вогнутое по x_i продолжение на множестве $\tilde{X}_i \times \hat{X}_i$, где $X_i \subset \tilde{X}_i$, $\text{int } \tilde{X}_i \neq \emptyset$. Введем точечно-множественное отображение T_3 , которое каждой точке $x \in X \subset E$ ставит в соответствие множество

$$T_3(x) = \{l = (l_1, \dots, l_k) \in E: -l_i \in \partial_{x_i} f_i(x), 1 \leq i \leq k\},$$

где $\partial_{x_i} f(x)$ — супердифференциал функции f по x_i в точке x .

Нетрудно проверить, что множество решений вариационного неравенства (1) при $T = T_3$ совпадает с множеством точек равновесия по Нэшу игры Γ .

В силу сделанных выше предположений, множество $T_3(x)$ является непустым выпуклым компактом при любом $x \in X$, причем отображение T_3 полунепрерывно сверху на выпуклом компакте X . Следовательно, это отображение удовлетворяет допущению А. Что же касается допущения Б, то для игр Γ , не являющихся антагонистическими, оно, к сожалению, в общем случае не выполняется, т.е. в общем случае отображение T_3 не является монотонным.

Предположим, что функции выигрыша f_i игры Γ удовлетворяют двум дополнительным условиям.

В1. Функция суммарного выигрыша всех игроков $f(x) = \sum_{i=1}^k f_i(x)$ вогнута и супердифференцируема на X .

В2. Функция выигрыша $f_i(x) \equiv \hat{f}_i(x_i, \hat{x}_i)$ игрока i выпукла и субдифференцируема по $\hat{x}_i \in \hat{X}_i$ при любом фиксированном $x_i \in X$, $1 \leq i \leq k$.

Согласно А.С. Немировскому, условия В1 и В2 гарантируют выполнение требования Б для отображения T_3 , порождаемого выпуклой игрой Γ .

Приведем доказательство этого утверждения в предположении дифференцируемости функций $\hat{f}_i(x_i, \hat{x}_i)$ по $x_i \in X_i$ при любом $\hat{x}_i \in \hat{X}_i$, $1 \leq i \leq k$, т.е. в предположении, что отображение T_3 является точечно-точечным.

Пусть x^1, x^2 — две произвольные точки множества X , $l^1 = (l_1^1, \dots, l_k^1) \in \partial f(x^1)$, $l^2 = (l_1^2, \dots, l_k^2) \in \partial f(x^2)$. Согласно В1 и определению супердифференциала вогнутой функции f ,

$$\sum_{i=1}^k \langle l_i^1 - l_i^2, x_i^1 - x_i^2 \rangle \leq 0, \quad (5)$$

$$f(x) \leq f(x^1) + \sum_{i=1}^k \langle l_i^1, x_i - x_i^1 \rangle, \quad f(x) \leq f(x^2) + \sum_{i=1}^k \langle l_i^2, x_i - x_i^2 \rangle, \quad x \in X. \quad (6)$$

Пусть далее

$$m_{i,i}^1 \in \partial_{\hat{x}_i} \hat{f}(x_i^1, \hat{x}_i^1), \quad \hat{m}_i^1 = (m_{1,i}^1, \dots, m_{i-1,i}^1, m_{i+1,i}^1, \dots, m_{k,i}^1) \in \partial_{\hat{x}_i} \hat{f}(x_i^2, \hat{x}_i^1),$$

$$m_{i,i}^2 \in \partial_{\hat{x}_i} \hat{f}(x_i^2, \hat{x}_i^2), \quad \hat{m}_i^2 = (m_{1,i}^2, \dots, m_{i-1,i}^2, m_{i+1,i}^2, \dots, m_{k,i}^2) \in \partial_{\hat{x}_i} \hat{f}(x_i^2, \hat{x}_i^2).$$

В силу В2, а также определений субдифференциалов $\partial_{\hat{x}_i} \hat{f}(x_i, \hat{x}_i)$ и супердифференциалов $\partial_{\hat{x}_i} \hat{f}(x_i, \hat{x}_i)$ имеем для $i = 1, \dots, k$:

$$-\sum_{t \neq i} \langle m_{t,i}^1 - m_{t,i}^2, x_t^1 - x_t^2 \rangle + \langle m_{i,i}^1 - m_{i,i}^2, x_i^1 - x_i^2 \rangle \leq 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_i(x_i, \hat{x}_i^1) &\leq f_i(x^1) + \langle m_{i,i}^1, x_i - x_i^1 \rangle, & x_i \in X_i, \\ \hat{f}_i(x_i, \hat{x}_i^2) &\leq f_i(x^2) + \langle m_{i,i}^2, x_i - x_i^2 \rangle, \\ -\hat{f}_i(x_i^1, \hat{x}_i) &\leq -f_i(x^1) - \langle \hat{m}_i^1, \hat{x}_i - \hat{x}_i^1 \rangle, & \hat{x}_i \in \hat{X}_i. \\ -\hat{f}_i(x_i^2, \hat{x}_i) &\leq -f_i(x^2) + \langle \hat{m}_i^2, \hat{x}_i - \hat{x}_i^2 \rangle, \end{aligned} \quad (8)$$

Положим $n_i^1 = 0.5(l_i^2 + m_{i,i}^1 - \sum_{t \neq i} m_{t,i}^1)$, $n_i^2 = 0.5(l_i^2 + m_{i,i}^2 - \sum_{t \neq i} m_{t,i}^2)$. Складывая неравенство (5) и неравенства (7) при $i = 1, \dots, k$, получаем

$$\sum_{i=1}^k \langle n_i^1 - n_i^2, x_i^1 - x_i^2 \rangle \leq 0. \quad (9)$$

Покажем, что

$$n_i^1 = \partial_{x_i} f_i(x^1), \quad n_i^2 = \partial_{x_i} f_i(x^2), \quad 1 \leq i \leq k. \quad (10)$$

При любом фиксированном i ($1 \leq i \leq k$) из неравенств (6) вытекает

$$\hat{f}(x_i, \hat{x}_i^1) \leq f(x^1) + \langle l_i^1, x_i - x_i^1 \rangle, \quad \hat{f}(x_i, \hat{x}_i^2) \leq f(x^2) + \langle l_i^2, x_i - x_i^2 \rangle, \quad x_i \in X_i, \quad (11)$$

а из неравенств (8) следует

$$\begin{aligned} \hat{f}_i(x_i, \hat{x}_i^1) &\leq f_i(x^1) + \langle m_{i,i}^1, x_i - x_i^1 \rangle, \\ \hat{f}_i(x_i, \hat{x}_i^2) &\leq f_i(x^2) + \langle m_{i,i}^2, x_i - x_i^2 \rangle, \\ -\hat{f}_i(x_i, \hat{x}_i^1) &\leq -f_i(x^1) - \langle \hat{m}_i^1, \hat{x}_i - \hat{x}_i^1 \rangle, \\ -\hat{f}_i(x_i, \hat{x}_i^2) &\leq -f_i(x^2) + \langle \hat{m}_i^2, \hat{x}_i - \hat{x}_i^2 \rangle, \\ x_i &\in X_i, \quad t \neq i, \quad i = 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (12)$$

Вспоминая, что $f(x) = \sum_{i=1}^k f_i(x)$, из (11) и (12) получаем для $i = 1, \dots, k$:

$$\hat{f}_i(x_i, \hat{x}_i^1) \leq f_i(x^1) + \langle n_i^1, x_i - x_i^1 \rangle, \quad \hat{f}_i(x_i, \hat{x}_i^2) \leq f_i(x^2) + \langle n_i^2, x_i - x_i^2 \rangle, \quad x_i \in X_i. \quad (13)$$

Неравенство (13) с учетом дифференцируемости функции f_i по x_i приводит к (10), откуда в силу (9) и определения отображения T_3 вытекает монотонность T_3 .

Таким образом, задача отыскания точек равновесия по Нэшу выпуклой игры Γ многих лиц оказывается эквивалентной задаче поиска решения вариационного неравенства (1) при отображении $T = T_3$, удовлетворяющем условию А, а в некоторых случаях (например, при соблюдении дополнительных требований В1, В2) и условию Б.

Задача отыскания цен, обеспечивающих равновесие спроса и предложения. Допустим, что имеется n различных товаров в количествах $a_i > 0$, $1 \leq i \leq n$, $a = (a_1, \dots, a_n)$. Обозначим через p_i цену товара i . Выбор цен p_i , $1 \leq i \leq n$, ограничен условиями

$$\sum_{i=1}^n a_i p_i = c_0, \quad p_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (14)$$

где $c_0 > 0$ — фиксированная стоимость имеющегося набора товаров a . Товары, составляющие набор a , покупаются по ценам p_i потребителями, число которых N . Каждый потребитель имеет свою функцию предпочтения $f_j(x^j)$, где j — номер потребителя, $x^j = (x_1^j, \dots, x_n^j)$ — покупаемый им набор товаров. Предполагается, что потребитель j располагает денежными средствами в количестве $\alpha^j c_0$ ($\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$, $\alpha_j > 0$, $j = 1, \dots, N$) единиц и производит свой выбор путем максимизации функции предпочтения $f_j(x^j)$ при соблюдении бюджетного условия $\sum_{i=1}^n p_i x_i^j = \alpha_j c_0$, естественного требования $x_i^j \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, и мало ограничительного условия $x_i^j \leq d_i^j$, $i = 1, \dots, n$, где d_i^j — произвольные числа, превышающие $\alpha_j a_i$. Пусть S — множество векторов цен $p = (p_1, \dots, p_n)$, удовлетворяющих ограничениям (14), $S_j(p) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \geq 0 : \sum_{i=1}^n p_i x_i = \alpha_j c_0, x_i \leq d_i^j, i = 1, \dots, n\}$, $X_j^*(p) = \{x^* \in S_j(p) : f_j(x^*) = \max_{x \in S_j(p)} f_j(x)\}$, $1 \leq j \leq N$. В дальнейшем предполагается, что функции предпочтения $f_j(x)$ непрерывны и квазивогнуты на положительном ортанте $x \geq 0$.

Введем точечно-множественное отображение T_4 , которое каждой точке $p \in S$ ставит в соответствие множество

$$T_4(p) = -\sum_{j=1}^N X_j^*(p).$$

В силу приведенных выше предположений, S и $T_4(p)$ при любом $p \in S$ — выпуклые компакты, причем отображение T_4 полунепрерывно сверху на S . Таким образом, отображение T_4 , определенное на симплексе S , удовлетворяет условию А.

Рассмотрим вариационное неравенство (1) при $T = T_4$, $G = S$, которое имеет вид

$$\langle T_4(p), p' - p \rangle \geq 0 \quad \forall p' \in S. \quad (15)$$

Покажем, что любое решение p^* вариационного неравенства (15) обеспечивает равновесие спроса и предложения, т.е. является вектором равновесных цен. Действительно, если p^* — решение вариационного неравенства (15), то существует такой вектор $x^* \in T_4(p^*)$, что $\langle x^*, p' - p^* \rangle \leq 0 \quad \forall p' \in S$. Следовательно, p^* — оптимальный план задачи линейного программирования

$$\langle x^*, p \rangle \longrightarrow \max, \quad p \in S. \quad (16)$$

Из (16) и ограничений (14), определяющих вид симплекса S , имеем

$$\frac{x_i^*}{a_i} = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i^*}{a_i} = t^*, \quad \text{если } p_i^* > 0. \quad (17)$$

Учитывая (17) и то, что $p^* \in S$, имеем

$$\langle p^*, x^* \rangle = t^* \langle p^*, a \rangle = t^* c_0. \quad (18)$$

Но $x^* = \sum_{j=1}^n x^{*j}$, причем $\langle p^*, x^{*j} \rangle = \alpha_j c_0, j = 1, \dots, N$. Следовательно, $\langle p^*, x^* \rangle = \sum_{j=1}^N \langle p^*, x^{*j} \rangle = c_0 \sum_{j=1}^N \alpha_j = c_0$. Отсюда и из (18) вытекает, что $t^* = 1$ и согласно (17):

$$x^* \leq a, \quad x_i^* = a_i, \quad \text{если } p_i^* > 0. \quad (19)$$

Итак, при векторе цен p^* , являющемся решением вариационного неравенства (15), суммарный выбор товаров всех потребителей удовлетворяет требованию равновесия между платежеспособным спросом и предложением (19).

Как отмечалось выше, точно-множественное отображение T_4 удовлетворяет требованиям А. В общем случае отображение T_4 не монотонно, т.е. не удовлетворяет требованию Б. Однако, как показано в (Митюшин, Полтерович, 1978), при соблюдении некоторых дополнительных требований к функциям предпочтений f_j отображение T_4 удовлетворяет условию Б.

3. МЕТОД РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ ПРИ НЕТОЧНЫХ ОТКЛИКАХ ОРАКУЛА

В работе (Гольштейн, 2002) описан итеративный метод оракульного типа решения вариационного неравенства, которое порождается точно-множественным отображением T , удовлетворяющим условиям А и Б. Предполагалось, что выпуклый компакт G , на котором определено отображение T , содержится в некотором выпуклом многограннике $M \subset E$, среди точек которого ведется поиск искомого решения, причем G и T задаются с помощью вспомогательного алгоритма, называемого *оракулом*. На каждой итерации метода происходит одно обращение к оракулу, связанное с очередной точкой $x \in M$. В ответ на это обращение оракул либо находит гиперплоскость, отделяющую точку x от компакта G ($x \notin G$), либо вычисляет один из элементов множества $T(x)$ ($x \in G$). При анализе сходимости метода существенно использовалось допущение о том, что все отклики оракула не содержат ошибок. Вместе с тем, в ряде случаев (например, при декомпозиционном анализе оптимизационных задач) оракул, являясь достаточно трудоемким численным алгоритмом, определяет требуемую информацию с ошибками, величина которых зависит от времени работы соответствующего алгоритма. Этот и следующий разделы данной работы посвящены описанию и анализу сходимости варианта метода, приведенного в (Гольштейн, 2002), который использует неточные отклики оракула.

Метод решения вариационного неравенства (1) зависит от параметра $\lambda \in (0, 1)$ (например, можно считать $\lambda = 0.5$) и реализуется в виде серии однотипных итераций. Перед началом итерации $k \geq 2$ считаются известными уже найденные ранее точки $z_i \in M, 1 \leq i \leq k-1$. В качестве z_1 можно принять любую точку многогранника M . На каждой итерации метода (за исключением, может быть, последней) производится одно обращение к оракулу, которому передается точка $z_k \in M$, где k — номер итерации. Если $z_i \notin G$, то в качестве отклика оракул выдает приближенное значение $\tilde{a}_i$ ($|\tilde{a}_i| = 1$) единичного вектора a_i , удовлетворяющего условию

$$\max_{z \in G} \langle a_i, z - z_i \rangle \leq 0, \quad (20)$$

причем $|\tilde{a}_i - a_i| \leq \delta$. Если же $z_i \in G$, то оракул вычисляет приближенное значение $\tilde{t}_i$ некоторого элемента $t_i \in T(z_i)$, причем $|\tilde{t}_i - t_i| \leq \delta$. Неотрицательное число δ определяет точность работы оракула.

Разобьем множество $I(k) = \{1, \dots, k-1\}$ номеров итераций, предшествующих итерации k , на два непересекающихся подмножества $I_1(k)$ и $I_2(k)$, положив:

$$I_1(k) = \{i \in I(k): z_i \in G\}, \quad I_2(k) = \{i \in I(k): z_i \notin G\}.$$

Информация, накопленная до начала итерации k , позволяет ввести задачу линейного программирования $\mathcal{A}_k$ с переменными z и τ вида

$$\begin{aligned} \tau &\longrightarrow \max, \quad z \in M, \\ \langle \tilde{t}_i, z_i - z \rangle &\geq |\tilde{t}_i| \tau, \quad i \in I_1(k), \\ \langle \tilde{a}_i, z_i - z \rangle &\geq \tau, \quad i \in I_2(k). \end{aligned} \quad (21)$$

Итерация k начинается с решения задачи $\mathcal{A}_k$ и двойственной задачи $\tilde{\mathcal{A}}_k$. Пусть Δ_k — максимальное значение линейной формы задачи $\mathcal{A}_k$ (как будет показано ниже, $\Delta_k > 0$), а $\mu_i \geq 0$ ($i \in I(k)$) — соответствующие компоненты оптимального плана задачи $\tilde{\mathcal{A}}_k$.

Если $\Delta_k \leq \varepsilon_1$, где положительное число ε_1 выбирается заранее, то итерация k заканчивается и является последней. При обосновании метода будет установлено, что при $\Delta_k \leq \varepsilon_1$ число $\sum_{i \in I_1(k)} \mu_i$ положительно. Поэтому может быть найдена точка $z_k^* = \sum_{i \in I_1(k)} \mu_i z_i / \sum_{i \in I_1(k)} \mu_i$, которая принимается в качестве приближенного решения вариационного неравенства (1). Если же $\Delta_k > \varepsilon_1$, то итерация k продолжается.

Пусть $M_k(t) \subset E$ — выпуклый многогранник, определяемый ограничениями задачи (21) на переменную z при фиксированном значении $t \leq \Delta_k$. Продолжение итерации k связано с отысканием очередной точки z_k , в качестве которой берется решение задачи квадратичного программирования

$$|z - z_{k-1}| \longrightarrow \min, \quad z_k \in M_k(\lambda \Delta_k), \quad (22)$$

где $\lambda \in (0, 1)$ — параметр метода. После вычисления точки z_k происходит обращение к оракулу. Если $z_k \in G$ и модуль найденного оракулом вектора $\tilde{t}_k$ не превышает ε_2 (положительное число ε_2 выбирается заранее), то итерация k является последней, а в качестве приближенного решения вариационного неравенства (1) принимается точка $z_k^* = z_k$. В противном случае переходят к итерации $k + 1$.

При обосновании метода положительные параметры ε_1 и ε_2 будут точно определены.

4. АНАЛИЗ СХОДИМОСТИ МЕТОДА

Прежде всего, докажем, что в случае $\text{int } M \neq \emptyset$ числа Δ_k положительны при любом $k \geq 2$. Очевидно, что для этого достаточно установить непустоту внутренности многогранника $M_k(0)$, определяемого системой ограничений задачи (20) при $t = 0$. Последнее докажем, используя индукцию по k . Действительно, непустота $M_2(0)$ вытекает из того, что $\text{int } M \neq \emptyset$. Если допустить непустоту $\text{int } M_k(0)$, то $\Delta_k > 0$ и, следовательно, $M_k(\lambda \Delta_k) \subset \text{int } M_k(0)$, а, значит, точка $z_k \in M_k(\lambda \Delta_k)$ содержится в $\text{int } M_k(0)$. Многогранник $M_{k+1}(0)$ представляет собой пересечение $M_k(0)$ и полупространства, граничная гиперплоскость которого проходит через точку z_k . Поэтому включение $z_k \in \text{int } M_k(0)$ влечет непустоту $\text{int } M_{k+1}$.

Для измерения близости любой точки $z \in G$ к множеству Z^* решений вариационного неравенства (1) в (Гольштейн, 2002) была использована функция $\Delta(z)$, задаваемая соотношением

$$\Delta(z) = \sup_{t \in T(z), z' \in G} \langle t', z - z' \rangle, \quad z \in E. \quad (23)$$

Из (23) следует, что $\Delta(z)$ — неотрицательная выпуклая функция. Если отображение T удовлетворяет условию А, то Δ принимает конечное значение во всех точках $z \in E$, а, значит, является непрерывной на E функцией. Как отмечалось выше, условие А гарантирует непустоту и компактность множества Z^* . Можно показать, что при соблюдении условий А и Б множество Z^* — непустой выпуклый компакт. В (Гольштейн, 2002) было установлено следующее свойство функции Δ : если множество G и отображение T удовлетворяют условиям А, Б, то функция Δ обращается в нуль на множестве Z^* и принимает положительное значение в любой точке G , не принадлежащей Z^* . Таким образом, при выполнении условий А, Б любая последовательность точек $z_k \in G$, для которой $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta(z_k) = 0$, сходится к множеству Z^* решений вариационного неравенства (1).

Анализ поведения метода, описанного в разд. 3, начнем с оценки близости точки z_k^* к Z^* , которая при определенных условиях вычисляется методом на итерации k , в зависимости от максимального значения Δ_k линейной формы задачи (21) и величины $\delta \geq 0$, характеризующей точность работы оракула.

Лемма 1. Пусть отображение T и множество G удовлетворяют условиям А, Б, множество G содержит шар радиуса $r > 0$, d — диаметр многогранника M . Если величины Δ_k и δ настолько малы что

$$\Delta_k + d\delta < r, \quad (24)$$

то множество $I_1(k) \neq \emptyset$ и $\sum_{i \in I_1(k)} \mu_i > 0$, причем

$$\Delta(z_k^*) \leq \frac{(L+1)(\Delta_k + d\delta)d}{r}, \quad (25)$$

где $z_k^* = \sum_{i \in I_1(k)} \mu_i z_i / \sum_{i \in I_1(k)} \mu_i$, $\mu_i \geq 0$ ($i \in I(k)$) — соответствующие компоненты оптимального плана задачи $\tilde{\mathcal{A}}_k$, величина L определяется соотношением (3).

Доказательство. Учитывая вид (21) задачи $\mathcal{A}_k$ и то, что числа $\mu_i \geq 0$, $i \in I(k)$, составляют оптимальный план двойственной задачи $\tilde{\mathcal{A}}_k$, имеем

$$\sum_{i \in I_1(k)} \mu_i \langle \tilde{t}_i, z_i - z \rangle + \sum_{i \in I_2(k)} \mu_i \langle \tilde{a}_i, z_i - z \rangle \leq \Delta_k \quad \forall z \in M, \quad (26)$$

причем

$$\sum_{i \in I_1(k)} |\tilde{t}_i| \mu_i + \sum_{i \in I_2(k)} \mu_i = 1. \quad (27)$$

Пусть $G(\alpha)$ — множество точек, содержащихся в G вместе со своей α -окрестностью, $\alpha > 0$. Очевидно, что $G(\alpha) \neq \emptyset$ при любом $\alpha \leq r$.

Если точка $z' \in G(\alpha)$, $0 < \alpha \leq r$, то $\langle a_i, z_i - z' \rangle \geq \alpha$, $i \in I_2(k)$, где a_i удовлетворяет неравенству (20), $|a_i - \tilde{a}_i| \leq \delta$. Следовательно, для любой точки $z' \in G(\alpha)$ имеем

$$\langle \tilde{a}_i, z_i - z' \rangle \geq \alpha - d\delta, \quad i \in I_2(k). \quad (28)$$

Из (26)–(28) вытекает, что неравенство

$$\sum_{i \in I_1(k)} \mu_i \langle \tilde{t}_i, z_i - z' \rangle \leq \Delta_k - (1 - \gamma_k)(\alpha - d\delta) \quad (29)$$

справедливо для любой точки $z' \in G(\alpha)$, $0 < \alpha \leq r$, где $\gamma_k = \sum_{i \in I_1(k)} |\tilde{t}_i| \mu_i$.

Пусть z^0 — центр шара радиуса r , содержащегося в G . Тогда из (29) при $\alpha = r$ с учетом (24) имеем

$$\sum_{i \in I_1(k)} \mu_i \langle \tilde{t}_i, z_i - z^0 \rangle < \gamma_k(r - d\delta). \quad (30)$$

Если допустить, что $\sum_{i \in I_1(k)} \mu_i = 0$, то $\mu_i = 0$, $i \in I_1(k)$, $\gamma_k = 0$ и неравенство (30) неверно. Следовательно, условие (4) влечет за собой положительность $\sum_{i \in I_1(k)} \mu_i$ и, в частности, непустоту множества $I_1(k)$.

Воспользуемся неравенством (29) при $\alpha = \Delta_k + d\delta < r$. Тогда для любой точки $z' \in G(\Delta_k + d\delta)$ имеем

$$\sum_{i \in I_1(k)} \mu_i \langle \tilde{t}_i, z_i - z' \rangle \leq \gamma_k \Delta_k. \quad (31)$$

Вектор $\tilde{t}_i$ является приближенным значением некоторого вектора $t_i \in T(z_i)$, причем $|t_i - \tilde{t}_i| \leq \delta$, $i \in I_1(k)$. Поэтому $|\tilde{t}_i| \leq |t_i| + \delta \leq L + \delta$, где L определено соотношением (3). Учитывая это, получаем из (31)

$$\sum_{i \in I_1(k)} \mu_i \langle \tilde{t}_i, z_i - z' \rangle / \sum_{i \in I_1(k)} \mu_i \leq (L + \delta) \Delta_k \quad \forall z' \in G(\Delta_k + d\delta). \quad (32)$$

Оценка (32) с учетом того, что $|t_i - \tilde{t}_i| \leq \delta$, $i \in I_1(k)$, приводит к неравенству

$$\sum_{i \in I_1(k)} \mu_i \langle t_i, z_i - z' \rangle / \sum_{i \in I_1(k)} \mu_i \leq (L + \delta) \Delta_k + d\delta \quad (33)$$

для любой точки $z' \in G(\Delta_k + d\delta)$.

Используя (33), установим оценку сверху для левой части (33) при любом $z' \in G$.

Пусть $z \in G$, z^0 — центр шара радиуса r , содержащегося в G . Легко проверяется, что точка $z' = z(1 - (\Delta_k + d\delta)/r) + z^0(\Delta_k + d\delta)/r \in G(\Delta_k + d\delta)$ и, значит, для нее справедливо неравенство (33). Далее, $z' - z = (\Delta_k + d\delta)(z^0 - z)/r$ и поэтому

$$|z' - z| \leq (\Delta_k + d\delta)(d - r)/r. \quad (34)$$

Из (33) и (34) с учетом того, что $|t_i| \leq L$, $i \in I_1(k)$, получаем

$$\sum_{i \in I_1(k)} \mu_i \langle t_i, z_i - z \rangle / \sum_{i \in I_1(k)} \mu_i \leq (L + \delta) \Delta_k + d\delta + L(\Delta_k + d\delta)(d - r)/r \quad \forall z \in G. \quad (35)$$

Заметим, что в силу условия (24) $\delta < r/d < 1$. Поэтому, несколько огрубив оценку (35), имеем

$$\sum_{i \in I_1(k)} \mu_i \langle t_i, z_i - z \rangle / \sum_{i \in I_1(k)} \mu_i \leq (L + 1)(\Delta_k + d\delta)d/r \quad \forall z \in G. \quad (36)$$

Используем (36) для оценки величины $\Delta(z_k^*)$, характеризующей уклонение точки $z_k^* = \sum_{i \in I_1(k)} \mu_i z_i / \sum_{i \in I_1(k)} \mu_i$ от множества Z^* решений вариационного неравенства (1). Имеем

$$\Delta(z_k^*) = \max_{t \in T(z), z \in G} \langle t, z_k^* - z \rangle = \max_{t \in T(z), z \in G} \sum_{i \in I_1(k)} \mu_i \langle t, z_i - z \rangle / \sum_{i \in I_1(k)} \mu_i. \quad (37)$$

Из условия Б следует, что для любых $z \in G$ и $t \in T(z)$:

$$\langle t, z_i - z \rangle \leq \langle t_i, z_i - z \rangle, \quad i \in I_1(k). \quad (38)$$

Искомая оценка (25) вытекает из (36)–(38).

Согласно установленной леммой 1 оценке (25), близость точки z_k^* к множеству решений вариационного неравенства (1) зависит от величины $\delta \geq 0$, характеризующей точность откликов оракула, и максимального значения Δ_k линейной формы задачи $\mathcal{A}_k$, меняющейся от итерации к итерации. Формулируемое ниже утверждение гарантирует стремление чисел Δ_k к нулю со скоростью, независимой от точности работы оракула.

Лемма 2. Если $|\tilde{t}_i| > 0$, $i \in I_1(k)$, то

$$\Delta_k \leq \frac{d}{\lambda(1 - \lambda^2)^{1/2}} k^{-1/2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (39)$$

Лемма 2 является частным случаем более общего утверждения из (Бэр, Гольштейн, Соколов, 2000, лемма 4) при $Q = M$ и

$$P^k = \{z \in E: \langle b_i, z \rangle + \beta_i \leq 0, 1 \leq i \leq k-1\},$$

где

$$b_i = \begin{cases} \tilde{t}_i / |\tilde{t}_i|, & i \in I_1(k), \\ \tilde{a}_i, & i \in I_2(k), \end{cases} \quad \beta_i = \begin{cases} -\langle \tilde{t}_i, z_i \rangle / |\tilde{t}_i|, & i \in I_1(k), \\ -\langle \tilde{a}_i, z_i \rangle, & i \in I_2(k). \end{cases}$$

Анализ сходимости метода решения вариационного неравенства (1), описанного в разд. 3, основан на леммах 1, 2.

Пусть ε — произвольное неотрицательное число. Под ε -решением вариационного неравенства (1) условимся понимать любую точку $z \in G$, для которой $\Delta(z) \leq \varepsilon$, где функция $\Delta(z)$ определена соотношением (23). Отмеченные ранее свойства функции $\Delta(z)$ показывают, что при стремлении ε к нулю ε -решение вариационного неравенства (1), для которого выполнены условия А,

Б, сходится к множеству Z^* решений этого неравенства. Как показывают приводимые ниже рассуждения, при соблюдении определенных соотношений между $\varepsilon > 0$ и величиной $\delta > 0$, характеризующей точность работы оракула, метод, описанный в разд. 3, позволяет вычислить ε -решение вариационного неравенства (1), причем необходимое для этого число итераций метода допускает оценку, зависящую от ε и δ .

Начнем с анализа наиболее типичной ситуации, когда положительное число ε удовлетворяет требованию

$$\varepsilon < Ld. \quad (40)$$

При фиксированном $\varepsilon > 0$ точность δ работы оракула естественно считать настолько высокой, чтобы за счет уменьшения $\Delta_k > 0$ правую часть оценки (25) можно было бы сделать меньшей либо равной ε . Очевидно, что это эквивалентно требованию

$$(L+1)d^2r^{-1}\delta < \varepsilon. \quad (41)$$

При описании метода решения вариационного неравенства (1) использовались два положительных числа ε_1 и ε_2 , при помощи которых фиксировалась последняя итерация. Ниже определим их в зависимости от ε и δ .

Положим $\varepsilon_1 = r(L+1)^{-1}d^{-1}\varepsilon - d\delta$. Согласно (41), $\varepsilon_1 > 0$. Допустим, что

$$\Delta_k \leq \varepsilon_1. \quad (42)$$

Очевидно, что неравенства (40) и (42) влекут за собой требование (24) и, согласно лемме 1, $\sum_{i \in I_1(k)} \mu_i > 0$. Из (42) вытекает, что $(L+1)(\Delta_k + d\delta)dr^{-1} \leq \varepsilon$. Поэтому оценка (25) из леммы 1 указывает на то, что точка $z_k^* = \sum_{i \in I_1(k)} \mu_i z_i / \sum_{i \in I_1(k)} \mu_i$ является ε -решением вариационного неравенства (1).

Положим $\varepsilon_2 = d^{-1}\varepsilon - \delta$. Заметим, что при соблюдении (41) число ε_2 положительно. Если $z_k \in G$, $|\tilde{t}_k - t_k| \leq \delta$, $t_k \in T(z_k)$, причем $|\tilde{t}_k| \leq \varepsilon_2$, то $|t_k| \leq \varepsilon_2 + \delta$ и с учетом монотонности отображения T (условие Б) имеем

$$\Delta(z_k) = \max_{t \in T(z), z \in G} \langle t, z_k - z \rangle \leq \max_{z \in G} \langle t_k, z_k - z \rangle \leq (\varepsilon_2 + \delta)d = \varepsilon,$$

т.е. точка $z_k = z_k^*$ является ε -решением вариационного неравенства (1).

Пусть $k(\varepsilon)$ — номер последней итерации метода, которая заканчивается вычислением ε -решения вариационного неравенства (1), где ε удовлетворяет условиям (40) и (41). Для получения верхней оценки для $k(\varepsilon)$ достаточно определить такое минимальное целое число k , при котором правая часть неравенства (39) оказывается не большей, чем ε_1 . Очевидно, таким числом является $\lfloor d^2\lambda^{-2}(1 - \lambda^2)^{-1}\varepsilon_1^{-2} \rfloor$, где при любом вещественном a под $\lfloor a \rfloor$ понимается наименьшее целое число, большее либо равное a . Таким образом,

$$k(\varepsilon) \leq \lfloor d^2\lambda^{-2}(1 - \lambda^2)^{-1}\varepsilon_1^{-2} \rfloor. \quad (43)$$

Рассмотрим теперь случай грубой точности определения ε -решения вариационного неравенства (1), когда

$$\varepsilon \geq Ld. \quad (44)$$

Учитывая определение (23) функции $\Delta(z)$ и (3) числа L , можно заключить, что при соблюдении (44) любая точка $z \in G$ является ε -решением вариационного неравенства (1). Поэтому в данном случае $k(\varepsilon)$ — минимальное целое k , при котором $z_k \in G$. Согласно лемме 1, $k(\varepsilon) \leq k - 1$, если соблюдается условие (24). Выполнения условия (24) за счет уменьшения $\Delta_k > 0$ можно добиться лишь при соблюдении требования

$$d\delta < r. \quad (45)$$

Используя лемму 2, выберем минимальное целое число k , при котором правая часть неравенства (39) окажется меньше, чем $r - d\delta > 0$. Таким числом будет $\lfloor d^2\lambda^{-2}(1 - \lambda^2)^{-1}(r - d\delta)^{-2} \rfloor$, где при любом

вещественном a под $[a]$ понимается максимальное целое число, не большее, чем a . Поэтому при соблюдении (45)

$$k(\varepsilon) \leq [d^2 \lambda^{-2} (1 - \lambda^2)^{-1} (r - d\delta)^{-2}]. \quad (46)$$

Собирая воедино все проведенные выше рассуждения, получаем следующее утверждение о сходимости метода решения вариационного неравенства (1), описанного в разд. 3.

Теорема. Пусть точечно-множественное отображение T и множество $G \subset M \subset E$, определяющие вариационное неравенство (1), удовлетворяют требованиям A и B , M — выпуклый многогранник диаметра d , G содержит шар радиуса r , E — евклидово пространство. Итеративный метод оракульного типа решения вариационного неравенства (1), описанный в разд. 2, позволяет для любого $\varepsilon > 0$ при соблюдении приведенных ниже требований к точности δ откликов оракула найти ε -решение этого неравенства за $k(\varepsilon)$ итераций. При этом $k(\varepsilon)$ допускает следующую оценку сверху:

1) если ε удовлетворяет неравенству (40), а δ настолько мало, что соблюдается (41), то упомянутая оценка имеет вид (43), где $\varepsilon_1 = r(L + 1)^{-1} d^{-1} \varepsilon - d\delta$, L определяется соотношением (3), $\lambda \in (0, 1)$ — параметр метода;

2) если ε и δ подчиняются требованиям (44), (45), то верхняя оценка для $k(\varepsilon)$ имеет вид (46).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Бэр К., Гольштейн Е.Г., Соколов Н.А. (2000): Об использовании метода уровней для минимизации выпуклых функций, не все значения которых конечны // *Экономика и мат. методы*. Т. 36. № 4.
- Гольштейн Е.Г. (2002): Метод решения вариационных неравенств, определяемых монотонными отображениями // *Журнал вычислительной мат. и мат. физики*. Т. 42. № 7.
- Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В. (1989): Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации. М.: Физматлит.
- Митюшин Л.Г., Полтерович В.М. (1978): Критерий монотонности функций спроса // *Экономика и мат. методы*. Т. 14. № 1.
- Brower L.E.J. (1909): On Continuous Vector Distributions of Surfaces // *Amsterdam Proc.* Vol. 11. Continued in 1910. Vol. 12, 13.
- Kakutani S. (1941): A Generalization of Brower's Fixed Point Theorem // *Duke Math J.* Vol. 8. № 3.

Поступила в редакцию
09.11.2007 г.

The Method for Solving Variational Inequalities, Using the Imperfect Data

Ye. G. Golshtein

The connection between solving variational inequality and finding the fixed element of the point-to-set mapping from convex compact to itself is established. Examples of variational inequalities relating to the convex optimization, convex antagonistic game, convex many-person non-coalition game, the problem to find equilibrium prices are given. We describe an iterative method of the Oracle type for solving variational inequality defined by the monotone mapping under Oracle mistakes. We set the requirement to Oracle mistakes which guarantee to find ε -solution to variation inequality (with given $\varepsilon > 0$). The upper-bound for number of iterations necessary for calculating ε -solution to variation inequality is obtained.