
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ОБМЕНА

© 2008 г. Б. Е. Бродский

(Москва)

В отличие от теории экономического равновесия по Вальрасу, базирующейся на гипотезах “социального плановика” и экзогенности цен (price-taking behavior), модели экономического обмена, рассмотренные в данной работе, основаны на предположении о том, что экономические агенты формируют рыночные цены обмениваемых благ, сопоставляя с ними субъективные цены этих благ в процессе обмена. Рассмотрены следующие модели: элементарный экономический обмен, модели “ошибок рынка”, а также общие модели экономического обмена, основанного на рыночных ценах обмениваемых благ. Доказаны теоремы о существовании устойчивого равновесия в этих моделях обмена, описываемых динамическими системами обыкновенных дифференциальных уравнений (объемы спроса и предложения, рыночные цены благ) при обычных предположениях о характере обратных функций спроса и предложения.

В центре большинства конвенциональных гипотез и мифов об экономическом поведении находится человеческое Эго, озабоченное максимизацией личной выгоды и осуществляющее выбор в условиях ограниченных ресурсов. “Методологический индивидуализм” является одним из краеугольных камней экономического подхода к описанию человеческого поведения. Образ homo economicus — это удобная идеализация, ментальная модель, позволяющая абстрагироваться от всех сложных аспектов человеческой индивидуальности и сосредоточиться на мотивах и характере деятельности Эго. Согласно классическому определению Л. Роббинса, экономика — это наука, изучающая “аллокацию редких ресурсов, которые могут иметь альтернативные способы употребления” (Robbins, 1935, ch. 1, p. 1–23).

Основная проблема в теории рационального выбора — это возможность согласования индивидуальных предпочтений и эгоистических мотивов поведения на основе механизмов рыночной координации и самоорганизации. При этом экономический универсум представляется как сеть рыночных обменов, *самоорганизующихся* в концепциях неоклассической школы либо функционирующих в соответствии с формальными или неформальными *институтами* в современных концепциях институционалистов.

Концепция общего экономического равновесия Л. Вальраса базируется на гипотезе “price-taking behavior” (поведение, принимающее цены) экономических агентов. В экономике Эрроу–Дебре (Arrow, Debreu, 1954; McKenzie, 1954) экзогенность цен обмениваемых благ порождает необходимость введения в модель искусственных переменных типа “избыточного спроса” на эти блага. С описанием свойств этих переменных связаны некоторые затруднения, с которыми столкнулась современная теория общего экономического равновесия (Sonnenschein, 1973; Debreu, 1974).

В частности, Х. Зонненшайн показал, что любая непрерывная функция, удовлетворяющая закону Вальраса, может быть представлена как функция избыточного спроса в модели чистого обмена с квазивогнутыми функциями полезности участников. Из теоремы Зонненшайна следует, что без дополнительных предположений о функции полезности нельзя предсказать направления изменений эндогенных переменных при вариации экзогенных переменных рассматриваемой модели (Полтерович, 1999).

В современной теории общего экономического равновесия эти трудности отчасти обходятся за счет детализации свойств функций полезности агентов. В работе (Макаров, 1981) сформулированы общие предположения, обеспечивающие существование общего экономического равновесия в модели Эрроу–Дебре. Различные обобщения этой модели проанализированы в монографиях (Макаров, Рубинов, 1973; Makarov, Rubinov, Levin, 1995).

Вместе с тем повышенный исследовательский интерес к моделям общего и частичного экономического равновесия зачастую заслоняет тот очевидный факт, что равновесие возникает в системах экономического обмена, исследованию которых посвящено гораздо меньше работ.

Экономический обмен может порождать как равновесные, так и неравновесные траектории эволюции переменных системы.

Целью работы является анализ моделей экономического обмена без гипотез “социального плановика” и экзогенности цен. Именно в этой постановке удастся исследовать процесс порождения рыночных цен обмениваемых экономических благ, а в более общей ситуации — процесс возникновения институциональных ценностей и норм в ходе экономического обмена.

Заметим, что в отличие от модели общего экономического равновесия Эрроу–Дебре, в которой динамика цен зависит от искусственных переменных типа “избыточного спроса” (excess demand) на блага, в рассматриваемых моделях экономического обмена рыночные цены благ являются полностью эндогенными и их динамика зависит только от фазовых переменных динамической системы (включая объемы потребления и предложения благ).

1. ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ОБМЕН

Проанализируем “спонтанный рыночный порядок”, возникающий в результате элементарного рыночного обмена между поставщиком и потребителем некоторого экономического блага. Пусть на рынке экономического блага A действуют два экономических агента: потребитель и производитель этого блага. Обозначим через A^c , A^s — объемы спроса и предложения со стороны этих агентов, соответственно; p_c , p_s — субъективные цены обмениваемого блага для потребителя и производителя; p_m^c , p_m^s — рыночные цены обмениваемого блага для потребителя и производителя, соответственно.

Субъективные цены обмениваемого блага для потребителя и производителя могут быть представлены обратными функциями спроса и предложения:

$$p_c = p_c(A^c, I^c), \quad p_s = p_s(A^s, I^s), \quad (1)$$

где I^c , I^s — бюджет потребителя и производителя, соответственно. Для простоты изложения зависимость обратных функций спроса и предложения от бюджета потребителя и производителя в данной работе не учитывается (так как данная зависимость не влияет на принципиальные выводы).

На содержательном уровне смысл этих зависимостей состоит в том, что субъективные цены обмениваемого блага для потребителя и производителя оказываются связанными с объемами потребления и производства этих благ. Отметим, что в современной неоклассической теории существуют два метода получения обратных функций спроса и предложения: первый — основан на теории поведения потребителя и производителя с использованием аппарата функций полезности и производственных функций. Второй — направлен на “прямое” моделирование функций спроса и предложения (Самуэльсон, 1956). Субъективные цены обмениваемых благ могут трактоваться как *revealed preferences* (выявленные предпочтения), т.е. измеренные в некоторой интервальной ценовой шкале субъективные установки экономических агентов относительно ценности обмениваемых благ.

Функция моделирования M состоит в том, что потребитель и поставщик “моделируют” рыночную цену экономического блага. Это означает, что процесс экономического обмена в рассматриваемой системе опосредован некоторой “общей ценностью” — рыночной ценой обмениваемого блага, формируемой в результате обоюдного соглашения (контракта, договорного процесса) экономических агентов. В общем случае $p_m^c \neq p_m^s$, т.е. рыночная цена блага для потребителя и поставщика различна. Но вначале исследуем случай рынка с полной информацией и нулевыми трансакционными издержками, для которого $p_m^c = p_m^s = p_m$, где p_m — единая рыночная цена блага, представляющая собой общую ценность для участников рыночного обмена.

Функция управления R для подсистем C (потребитель) и S (производитель) состоит в регулировании объема спроса A^c и предложения A^s с целью уменьшения различий между субъективной ценностью блага и его рыночной ценой, т.е.

$$\dot{A}^c = k^c(p_c(A^c) - p_m), \quad k^c > 0, \quad (2)$$

$$\dot{A}^s = k^s(p_s(A^s) - p_m), \quad k^s < 0. \quad (3)$$

где $\dot{A} = dA/dt$; t — время в рассматриваемой системе.

Интерпретация этих уравнений такова: если субъективная цена блага для потребителя выше текущей рыночной цены этого блага, то объем потребления блага увеличивается; и наоборот, если субъективная цена блага для поставщика выше рыночной цены этого блага, сложившейся на данный момент, то объем поставок будет уменьшаться. Например, если потребитель субъективно ценит какое-либо благо, а стоит оно на рынке весьма дешево, то потребитель будет стремиться увеличить объем покупок блага на этом рынке. Напротив, если издержки по производству некоторого продукта у производителя значительно ниже цены за этот продукт, предлагаемой на рынке, то данный производитель будет стремиться увеличить поставки своей продукции на этот рынок.

Для дальнейшего изложения важно дать обоснование динамических уравнений (2)–(3) исходя из критерия максимизации прибыли потребителя и производителя.

Рассмотрим последовательность принятия решений потребителем по выбору оптимального объема потребления некоторого продукта в течение N последовательных (дискретных) тактов времени $t = 1, \dots, N$. Условие максимизации прибыли потребителя за N тактов выглядит следующим образом:

$$\sum \Delta A_t^c (p_c(A_{t-}^c + \Delta A_t^c) - p_m) \longrightarrow \max_{\Delta A_t^c, t=1, \dots, N}. \quad (4)$$

Поясним смысл этого критерия. На такте t потребитель сталкивается с проблемой выбора величины ΔA_t^c — прироста объема потребления блага A , исходя из диспаритета субъективной и рыночной цены этого блага в момент t : если субъективная цена блага p_c выше рыночной цены этого блага p_m , сложившейся в момент t , то потребителю выгодно увеличить объем потребления этого блага на величину ΔA_t^c ; при этом он получает прирост субъективной прибыли $\Delta A_t^c (p_c(A_{t-}^c + \Delta A_t^c) - p_m)$. В противном случае потребитель отказывается от приобретения блага A и кумулированный объем потребления этого блага A_t начинает уменьшаться (в простейшем случае полагаем, что потребитель может сбрасывать излишек блага A в объеме ΔA_t^c).

Тогда из критерия (4) получаем следующее условие первого порядка, описывающее локально-оптимальный выбор потребителя в момент t :

$$\Delta A_t^c = -(p_c(A_t^c) - p_m)/p'_c(A_t^c),$$

которое в непрерывном времени переходит в уравнение

$$\dot{A}_t^c = -(p_c(A_t^c) - p_m)/p'_c(A_t^c). \quad (5)$$

Обратим внимание, что уравнение (5) совпадает с уравнением (2) при $k^c = -1/p'_c(A_t^c)$. Заметим также, что для обычных ниспадающих функций спроса $k^c > 0$. Следовательно, *интуиция, продиктованная соображениями общей теории систем, дает правильное описание объекта, подтверждаемое экономическими реалиями*. Однако, как правило, производные $p'_c(\cdot)$ точно неизвестны, и поэтому имеет смысл рассматривать простое правило (2) с произвольным коэффициентом $k^c > 0$.

Для обоснования уравнения (3), описывающего динамику объема поставок блага A , используем критерий максимизации субъективной прибыли производителя:

$$\sum_{t=1}^N \Delta A_t^s (p_m - p_s(A_{t-}^s + \Delta A_t^s)) \longrightarrow \max_{\Delta A_t^s, t=1, \dots, N}, \quad (6)$$

откуда получим:

$$\dot{A}_t^s = -(p_s(A_t^s) - p_m)/p'_s(A_t^s). \quad (7)$$

Обратим внимание, что уравнение (7) совпадает с (3) при $k^s = -1/p'_s(A_t^s)$. Для обычных возрастающих функций предложения $k^s < 0$.

Функция адаптации в этой системе состоит в коррекции рыночной цены блага в зависимости от текущей ситуации рыночного обмена. Если объем спроса превышает объем предложения, то

рыночная цена блага будет повышаться, и наоборот:

$$\dot{p}_m = \alpha(A^c - A^s), \quad \alpha > 0. \quad (8)$$

Для обоснования уравнения (8) рассмотрим критерий минимизации потерь обмена, который в данной ситуации элементарного экономического обмена принимает вид:

$$\sum_{t=1}^N |\Delta p_m^t (A^c(p_m^{t-1} + \Delta p_m^t) - A^s(p_m^{t-1} + \Delta p_m^t))| \longrightarrow \min_{\Delta p_m^t, t=1, \dots, N}. \quad (9)$$

Поясним смысл критерия (9). На такте t изменение рыночной цены Δp_m^t будет определяться потерями обмена $|\Delta p_m^t (A^c(p_m^{t-1} + \Delta p_m^t) - A^s(p_m^{t-1} + \Delta p_m^t))|$. В частности, если $A^c(p_m^t) > A^s(p_m^t)$, то для уменьшения потерь обмена при обычных функциях спроса и предложения выгодно увеличить рыночную цену (т.е. $\Delta p_m^t > 0$). Напротив, если $A^c(p_m^t) < A^s(p_m^t)$, то потери обмена будут снижаться при уменьшении рыночной цены (т.е. $\Delta p_m^t < 0$).

Заметим, что принцип “методологического индивидуализма” не позволяет объяснить феномен изменения рыночной цены с целью уменьшения потерь обмена. В самом деле, для потребителя выгодна низкая рыночная цена, тогда как поставщик заинтересован в высоких рыночных ценах. Только “кооперативный импульс”, т.е. стремление участников поддерживать процесс обмена и не допустить распада рынка, приводит к тому, что рыночная цена приходит в движение с целью уменьшения потерь обмена. Другими словами, даже исследование элементарного экономического обмена позволяет обнаружить ограниченность принципа “методологического индивидуализма” и модели “homo economicus”.

Формально приращения объемов спроса и предложения связаны с изменением рыночной цены зависимостями вида:

$$\Delta A^s(p_m) = \Delta p_m / p'_s(A^s); \quad \Delta A^c(p_m) = \Delta p_m / p'_c(A^c).$$

С учетом этих зависимостей из критерия (9) получаем следующее условие первого порядка, описывающее локально-оптимальный выбор рыночной цены p_m :

$$\dot{p}_m = -(A^c(p_m) - A^s(p_m)) / (1/p'_c(A^c) - 1/p'_s(A^s)). \quad (10)$$

Заметим, что уравнение (10) совпадает с (8) при

$$\alpha = (1/p'_s(A^s) - 1/p'_c(A^c))^{-1}. \quad (11)$$

В уравнении (11) предполагается, что обратные функции спроса и предложения непрерывно дифференцируемы по соответствующим аргументам. Таким образом, элементарный экономический обмен может быть описан следующей системой уравнений:

$$\dot{A}^c = k^c(p_c(A^c) - p_m), \quad k^c > 0, \quad (12)$$

$$\dot{A}^s = k^s(p_s(A^s) - p_m), \quad k^s < 0, \quad (13)$$

$$\dot{p}_m = \alpha(A^c - A^s), \quad \alpha > 0, \quad (14)$$

где в локально-оптимальном случае коэффициенты равны $k^c = -1/p'_c(A^c)$, $k^s = -1/p'_s(A^s)$, $\alpha = (1/p'_s(A^s) - 1/p'_c(A^c))^{-1}$.

Допустим для простоты, что эта система имеет единственную стационарную точку $A_*^c = A_*^s = A_*$, $p_c(A_*) = p_s(A_*) = p_m^*$. Это допущение справедливо для обычных функций спроса и предложения блага A (убывающих и возрастающих, соответственно).

Для исследования устойчивости этого равновесия рассмотрим окрестность стационарной точки (A_*, A_*, p_m^*) . Пусть $a^c = A^c - A_*$, $a^s = A^s - A_*$, $q^s = p_m - p_m^*$. Покажем, как линеаризуется

система (12)–(14) в окрестности стационарной точки на примере уравнения (12):

$$\dot{a}^c = \Delta k^c(p_c(A_*) - p_m^*) + k^c(A_*)(p'_c(A_*)a^c - q^s),$$

где Δk^c — приращение коэффициента $k^c(A^c)$ в окрестности стационарной точки.

Поскольку $p_c(a_*) = p_m^*$, то получим $\dot{a}^c = k^c(A_*)(p'_c(A_*)a^c - q^s)$. Линеаризованная система имеет вид:

$$\dot{q} = Jq, \quad q = (A^c - A_*, A^s - A_*, p_m - p_m^*), \quad (15)$$

$$J = \begin{bmatrix} k^c \frac{dp_c}{dA^c} & 0 & -k^c \\ 0 & k^s \frac{dp_s}{dA^s} & -k^s \\ \alpha & -\alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

а значения коэффициентов k^c , k^s , α и производных $\frac{dp_c}{dA^c}$, $\frac{dp_s}{dA^s}$ взяты в стационарной точке A_* , A_* , p_m^* .

Условия устойчивости положения равновесия могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} k^c \frac{dp_c}{dA^c} + k^s \frac{dp_s}{dA^s} &< 0, \\ \frac{dp_c}{dA^c} - \frac{dp_s}{dA^s} &< 0, \\ k^c k^s \frac{dp_c}{dA^c} \frac{dp_s}{dA^s} \left(k^c \frac{dp_c}{dA^c} + k^s \frac{dp_s}{dA^s} \right) &< \alpha (k^s)^2 \frac{dp_s}{dA^s} - \alpha (k^c)^2 \frac{dp_c}{dA^c}. \end{aligned} \quad (17)$$

Эти условия будут выполнены, если $dp_c/dA^c < 0$, $dp_s/dA^s > 0$, т.е. в случае “нормального” блага. При этом точка равновесия A_* , A_* , p_m^* системы (12)–(14) является устойчивым фокусом.

Заметим, что условия (17) позволяют установить *асимптотическую устойчивость по Ляпунову* положения равновесия A_* , A_* , p_m^* . В дальнейшем выражение “положение равновесия устойчиво” следует понимать как “устойчиво по Ляпунову” или “асимптотически устойчиво по Ляпунову” в зависимости от выполненных условий.

Этот вывод совпадает с анализом устойчивости частичного микроэкономического равновесия, проведенным Вальрасом и Маршаллом. Однако в ситуациях, когда кривая предложения имеет отрицательный наклон ($dp_s/dA^s < 0$) или кривая спроса — положительный наклон ($dp_c/dA^c > 0$, благо Гиффена), условия устойчивости (17) положения равновесия могут нарушаться. Известно, что подходы Вальраса и Маршалла к анализу устойчивости в этой ситуации приводят к совершенно различным результатам. Вместе с тем, описанный выше подход объединяет преимущества вальрасианского и маршаллианского анализа устойчивости частного экономического равновесия, поскольку в уравнениях (12)–(14) одновременно меняются и объемы, и цены блага для потребителя и производителя, и позволяет сформулировать более точные условия устойчивости равновесия.

Проведенный анализ элементарного экономического обмена приводит к следующим выводам. Гипотеза *price-taking behavior*, обычно формулируемая при теоретическом анализе систем частного и общего экономического равновесия, далеко не соответствует реальности. Субъективные ценности обмениваемого блага для потребителя и поставщика непрерывно корректируются в процессе рыночного обмена и постоянно сравниваются с рыночной ценой обмениваемого блага. Эта рыночная цена формируется в процессе экономического или символического обмена. Таким образом, “спонтанный порядок человеческого сотрудничества” (Найек, 1989) появляется в результате координации субъективных ценностей на основе “общей ценности” — рыночной цены обмениваемого блага.

Как известно, биржа и фондовый рынок являются одними из фундаментальных институтов чистого рыночного капитализма. Приведенная выше модель экономического обмена идеально соответствует особенностям биржевой торговли: действительно, рыночная цена товара формируется здесь в процессе биржевой торговли и координации субъективных ценностей обмениваемого товара у покупателя и поставщика. Это дает нам основания утверждать, что описанная модель отражает весьма существенные черты процесса экономического обмена.

2. “ОШИБКИ” РЫНКА

2.1. Трансакционные издержки. Ранее был рассмотрен простейший вариант аддитивных трансакционных издержек, которые возникают в ситуациях слабых несовершенств информации о рыночных ценах обмениваемых благ и приводят к сдвигу равновесия обмена. В реальности же часто возникают более серьезные нарушения равновесия обмена. Эти ситуации вызваны тем, что между двумя основными субъектами экономического обмена — поставщиком и потребителем блага — вклинивается некоторое промежуточное звено “посредник”, которое может существенно искажать ценовые сигналы, циркулирующие в системе обмена.

Продemonстрируем этот феномен на примере простейшей системы “поставщик—потребитель” с трансакционными издержками мультипликативного типа, возникающими вследствие маржи, взимаемой посредником за совершенную сделку. Эта система описывается моделью, в которой переменная $t > 1$ отражает эффект влияния трансакционных издержек на рыночную цену блага для потребителя:

$$\begin{aligned}\dot{A}^c &= k^c(p_c(A^c) - tp_m), \quad k^c > 0, \quad t > 1, \\ \dot{A}^s &= k^s(p_s(A^s) - p_m), \quad k^s < 0, \\ \dot{p}_m &= \alpha(A^c - A^s), \quad \alpha > 0.\end{aligned}\tag{18}$$

Равновесная точка в системе (18) определяется из условий: $p_c(A_*) = tp_s(A_*)$, $A^c = A^s = A_*$.

Отсюда видно, что трансакционные издержки мультипликативного типа приводят к снижению объемов сделок между экономическими агентами и общему росту цен. Равновесие обмена смещается от совершенно конкурентного E_1 к равновесию трансакционной ловушки E_2 . Покажем, что равновесие E_2 является устойчивым. Матрица линеаризованной системы имеет вид:

$$J = \begin{pmatrix} k^c \frac{dp_c}{dA^c} & 0 & -tk^c \\ 0 & k^s \frac{dp_s}{dA^s} & -k^s \\ \alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $a_1 = k^c dp_c/dA^c$, $a_2 = k^s dp_s/dA^s$. Запишем характеристический полином рассматриваемой системы:

$$|\lambda E - J| = \lambda^3 - \lambda^2(a_1 + a_2) + \lambda(a_1 a_2 - \alpha k^s + \alpha + k^c) + (a_1 \alpha k^s - a_2 \alpha t k^c).$$

Очевидно, что условия устойчивости Гурвица:

$$\begin{aligned}-a_1 - a_2 &> 0, \\ -(a_1 + a_2)a_1 a_2 + a_2 \alpha k^s - a_1 \alpha t k^c &> 0, \\ a_1 k^s - a_2 t k^c &> 0\end{aligned}$$

выполнены для любого $t > 1$. Равновесие E_2 является устойчивым. Таким образом, трансакционные издержки в системе экономического обмена приводят к устойчивому сдвигу положения равновесия от точки эффективной рыночной аллокации ресурсов.

2.2. Моральный риск (moral hazard). Другой известный случай “market failure” также легко интерпретировать в рамках структуралистского анализа. Ситуация “морального риска” возникает в системе “производитель—потребитель”, когда экономический агент (производитель некоторо-

го ресурса) склонен завышать объемы поставок ресурса, используя неполноту информации в системе обмена. Эта ситуация описывается моделью:

$$\begin{aligned}\dot{A}^c &= k^c(p_c(A^c) - p_m), \quad k^c > 0, \\ \dot{A}^s &= k^s(p_s(A^s) - p_m), \quad k^s < 0, \\ \dot{p}_m &= \alpha(A^c - hA^s), \quad \alpha > 0, \quad h > 1.\end{aligned}\tag{19}$$

Здесь A^s — фактический объем поставок ресурса агентом, $hA^s > A^s$ — демонстрируемый объем поставок ресурса, h — некоторый ненаблюдаемый параметр. Равновесная точка в системе (19) определяется из уравнения $p_c(hA^*) = p_s(A^*)$.

Отсюда видно, что в ситуации морального риска объемы сделок между экономическими агентами также снижаются, а уровень цен сделок падает. Устойчивость нового равновесия E_2 проверяется непосредственно по аналогии с предыдущим случаем. Следовательно, эффект морального риска ведет к образованию институциональной ловушки.

2.3. Ухудшающий отбор (adverse selection). Пожалуй, именно ситуация ухудшающего отбора наиболее наглядно иллюстрирует сложность поиска общих социальных ценностей — рыночных цен обмениваемых благ. Эта ситуация типична для *неполных рынков*, когда потребитель не может дифференцировать блага различного типа и вынужден формировать свои субъективные предпочтения с учетом априорных предположений о структуре рынка. Классический пример ситуации обратного выбора — рынок “лимонов” (подержанных автомобилей, которые могут оказаться вполне приемлемого качества либо совсем плохими, т.е. “лимонами”). В работе (Akerlof, 1970) было показано, что в большинстве ситуаций этот рынок деградирует, поскольку на нем остаются только продавцы “лимонов”. Причина распада подобных плохо сегментированных рынков заключается в невозможности формирования общей для покупателей и продавцов рыночной цены обмениваемых благ и, соответственно, в отсутствии рыночного равновесия.

Рассмотрим интерпретацию ситуации обратного выбора в рамках структуралистского метода. Как отмечалось выше, в ситуациях неполных рынков потребитель вынужден модифицировать свои субъективные предпочтения с учетом того, что на рынке присутствуют блага различного типа (например, высокого и низкого качества). В частности, в модели рынка “лимонов” обратная функция потребительского спроса будет зависеть не только от общего объема спроса, но и от субъективной оценки доли “лимонов” на рынке γ^c . При возрастании γ^c объем спроса будет уменьшаться.

Будем предполагать, что объемы предложения нормальных благ (A) и “лимонов” (L) равны, соответственно, Q_A^s и Q_L^s ; общий объем потребительского спроса на рынке — Q^c ; обратные функции спроса и предложения — $p^c(Q^c, \gamma^c)$, $p_A^s(Q_A^s)$, $p_L^s(Q_L^s)$, соответственно; рыночная цена — p_m . Тогда рассматриваемый рынок описывается следующей формальной моделью:

$$\begin{aligned}\dot{Q}^c &= k^c(p^c(Q^c, \gamma^c) - p_m), \quad k^c > 0, \\ \dot{Q}_A^s &= k_A^s(p_A^s(Q_A^s) - p_m), \quad k_A^s < 0, \\ \dot{Q}_L^s &= k_L^s(p_L^s(Q_L^s) - p_m), \quad k_L^s < 0, \\ \dot{p}_m &= \alpha(Q^c - Q_A^s - Q_L^s), \quad \alpha > 0.\end{aligned}\tag{20}$$

Равновесная точка в системе (20) определяется из условий $Q^c = Q_A^s + Q_L^s$, $p_L^s(Q_L^s) = p_A^s(Q_A^s) = p^c(Q^c, \gamma^c) = p_m$. Покажем, что эти условия не выполняются при естественных предположениях о характере функций спроса и предложения благ. В самом деле, поскольку стоимость качественных благ намного выше стоимости “лимонов”, то для любого Q имеем

$$p_A^s > p_L^s,\tag{21}$$

$$dp_A^s/dQ < dp_L^s/dQ.\tag{22}$$

Условие (22) означает, что при уменьшении рыночной цены предложение качественных благ будет сокращаться резче, чем предложение “лимонов”.

При условиях (21)–(22) $Q_L^s > Q_A^s$, и поэтому субъективная оценка доли “лимонов” на рынке γ^c будет возрастать, а кривая рыночного спроса смещаться вниз и влево от исходного положения $p^c(Q_A^s + Q_L^c, 0)$. При этом рыночная цена p_m падает, а количество качественных благ Q_A^s на рынке сокращается быстрее объема предложения “лимонов” Q_L^s , вследствие чего субъективная оценка доли “лимонов” γ^c будет и дальше возрастать, что приведет к увеличению сдвига кривой рыночного спроса $p^c(Q_A^s + Q_L^s, \gamma^c)$ вниз и влево. В результате этих “мысленных экспериментов” субъекты экономического обмена не могут прийти к взаимоприемлемому соглашению о рыночной цене p_m в данной ситуации, и рынок деградирует: на нем остаются только продавцы “лимонов”.

Следует отметить характерную черту рассмотренной ситуации, которая обычно “затушевывается” при традиционном неоклассическом анализе феномена ухудшающего отбора. Это — особая роль субъективных ожиданий экономических агентов (оценок γ^c), которые являются компонентом *функции моделирования* на данном неполном рынке. По сути дела, неполные рынки — это переходная форма экономического обмена от совершенно конкурентных рынков к рынкам несовершенной конкуренции, которые характеризуются отсутствием общих институциональных ценностей у агентов экономического обмена и особой ролью механизмов формирования субъективных ожиданий агентов.

3. ОБЩАЯ МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ОБМЕНА

3.1. Базовая модель. В предыдущем разделе были проанализированы основные факторы, затрудняющие поиск общих ценностей в процессах экономического обмена. Нередко в силу воздействия этих факторов процесс обмена, основанный на общих ценностях обмениваемых благ, становится невозможным, и экономические агенты вынуждены прибегать к другим механизмам координации своих предпочтений: олигополистическому обмену, основанному на координации взаимных ожиданий агентов, монополистическому обмену, основанному на механизме власти, и др. Анализ этих механизмов — предмет другой работы. В данной статье сосредоточимся на проблемах общего равновесия в системах экономического обмена, основанного на ценностях. То есть изначально предполагаем, что агенты пытаются координировать свои субъективные предпочтения на основе поиска общих ценностей обмениваемых благ. Основной задачей в этом разделе является изучение условий, при которых подобный экономический обмен может приводить к успеху, т.е. существованию устойчивого равновесия в системе обмена.

Будем исследовать экономические системы с произвольным количеством обмениваемых благ и произвольным количеством участников обмена — потребителей или поставщиков обмениваемых благ.

Рассмотрим вначале *базовую задачу*, характеризующуюся множественностью агентов и благ при единственном (репрезентативном) поставщике благ. Введем следующие переменные: количества благ $A, B, C, \dots$ как в аспекте спроса на эти блага, так и в аспекте предложения этих благ; субъективные цены обмениваемых благ, которые будут трактоваться как обратные функции спроса на блага $A, B, C, \dots$ (например, $p_A^1 = p_A^1(A_1^c, B_1^c, \dots)$ — обратная функция спроса на благо A со стороны агента 1); обратные функции предложения благ $A, B, \dots$ (например, $p_A^s = p_A^s(A^s, B^s, \dots)$ — обратная функция предложения блага A); рыночные цены благ $A, B, \dots$, формируемые в процессе экономического обмена: $p_A^m, p_B^m, \dots$

Отметим, что эти рыночные цены не являются внешними (экзогенными) по отношению к рассматриваемой системе обмена; они формируются (возникают) в процессе экономического обмена и, в отличие от модели Эрроу–Дебре, не задаются с использованием искусственных переменных типа “избыточного спроса” на блага.

Возьмем вначале наиболее простой случай: 2 агента (потребителя), 1 благо. Динамика потребления блага A экономическими агентами 1 и 2 описывается уравнениями:

$$\dot{A}_1^c = k_1(p_A^1(A_1^c) - p_A^m), \quad k_1 > 0, \quad (23)$$

$$\dot{A}_2^c = k_2(p_A^2(A_2^c) - p_A^m), \quad k_2 > 0. \quad (24)$$

Экономический смысл уравнений (23) и (24) состоит в том, что если субъективная цена блага A для экономического агента выше рыночной цены этого блага, то объем потребления блага A этим агентом увеличивается, и наоборот. С другой стороны, объем предложения блага A имеет вид:

$$\dot{A}^s = k_A^s(p_A^s(A^s) - p_A^m), \quad k_A^s < 0. \quad (25)$$

Проясним экономический смысл уравнения (25): если цена предложения блага A (p_A^s) выше рыночной цены этого блага (p_A^m), сложившейся в процессе обмена, то объем предложения A^s этого блага начинает уменьшаться. На содержательном уровне это означает, что если большинство экономических агентов “недооценивают” благо A^s , т.е. средние издержки его производства значительно выше той цены, которую можно получить от его реализации, то большинство производителей блага A сворачивают объемы его производства.

И наконец, рыночная цена блага A (p_A^m) определяется величиной рассогласования между суммарным объемом потребления $A_1^c + A_2^c$ и производства A^s блага A , т.е.

$$\dot{p}_A^m = \alpha(A_1^c + A_2^c - A^s), \quad \alpha > 0. \quad (26)$$

Экономический смысл уравнения (26) состоит в том, что если объем потребления блага A выше объема предложения этого блага, то рыночная цена блага A начинает повышаться, и наоборот. Таким образом, рассматриваемая система экономического обмена имеет вид:

$$\dot{A}_1^c = k_1^c(p_A^1(A_1^c) - p_A^m), \quad (27)$$

$$\dot{A}_2^c = k_2^c(p_A^2(A_2^c) - p_A^m), \quad (28)$$

$$\dot{A}^s = k_A^s(p_A^s(A^s) - p_A^m), \quad (29)$$

$$\dot{p}_A^m = \alpha(A_1^c + A_2^c - A^s). \quad (30)$$

Как и в разд. 1, устанавливаем, что в ситуации локально-оптимального выбора объемов потребления и производства благ, а также рыночной цены в рассматриваемой системе значения коэффициентов равны:

$$k_1^c = -1/(p_A^1(A_1^c))', \quad k_2^c = -1/(p_A^2(A_2^c))', \quad k_A^s = -1/(p_A^s(A^s))', \quad \alpha = (k_1^c + k_2^c - k_A^s)^{-1}.$$

Согласование индивидуальных предпочтений в данной системе экономического выбора можно формально интерпретировать как наличие единственного устойчивого положения равновесия в системе (27)–(30). Требование устойчивости равновесия является существенным, поскольку в случае неустойчивости любое малое изменение индивидуальных предпочтений приводит к распаду системы.

Равновесная точка (A_1^*, A_2^*) в системе (27)–(30) определяется из условий $p_A^1(A_1^*) = p_A^2(A_2^*)$, $p_A^s(A_1^* + A_2^*) = p_A^1(A_1^*)$.

При обычных предположениях о характере кривых обратных функций спроса и предложения (монотонное убывание кривых спроса и монотонное возрастание кривых предложения по своим аргументам) решение этой системы уравнений в общей ситуации существует. Действительно, из уравнения $p_A^1(A_1^*) = p_A^2(A_2^*)$ следует, что A_2^* является монотонно возрастающей функцией A_1^* . Тогда левая часть уравнения $p_A^s(A_1^* + A_2^*) = p_A^1(A_1^*)$ — монотонно убывающая функция A_1^* , а правая часть — монотонно возрастает по A_1^* . Поэтому в общей ситуации равновесная точка в системе (27)–(30) существует.

Устойчивость этого положения равновесия проверяется для системы, линеаризованной в окрестности (A_1^*, A_2^*) :

$$\dot{q} = Jq, \quad q = (A_1^c - A_1^*, A_2^c - A_2^*, A^s - A_1^* - A_2^*, p_A^m - p_A^*), \quad (31)$$

$$J = \begin{pmatrix} k_1^c dp_A^1/dA_1^c & 0 & 0 & -k_1^c \\ 0 & k_2^c dp_A^2/dA_2^c & 0 & -k_2^c \\ 0 & 0 & k_A^s dp_A^s/dA^s & -k_A^s \\ \alpha & \alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Условия Гурвица устойчивости характеристического полинома для системы (31)–(32) проверяются непосредственно. Анализ этих условий свидетельствует о том, что при $dp_A^1/dA_1^c < 0$, $dp_A^2/dA_2^c < 0$, $dp_A^s/dA^s > 0$, т.е. в ситуации нормальных благ, положение равновесия системы (27)–(30) будет устойчивым. Следовательно, для достаточно широкого класса кривых индивидуальных предпочтений, характеризующихся монотонным убыванием обратных функций спроса и монотонным возрастанием обратных функций предложения, существует устойчивое положение равновесия в системе (27)–(30).

Полученный результат допускает различные обобщения на системы с произвольным числом участников. Рассмотрим вначале модель экономического обмена с n агентами (потребителями), одним обмениваемым благом и одним репрезентативным поставщиком блага. Введем следующие переменные: $A_1^c, \dots, A_n^c$ – объем спроса на благо A для каждого агента; A^s – объем предложения блага A ; $p_1, \dots, p_n$ – индивидуальные функции спроса на благо A для каждого агента, участвующего в обмене; p_A^s – обратная функция предложения блага A ; p_A^m – рыночная цена блага A .

Для описания исследуемой ситуации экономического обмена воспользуемся моделью, являющейся прямым обобщением модели (27)–(30):

$$\begin{aligned} \dot{A}_1^c &= k_1^c(p_1(A_1^c) - p_A^m), \quad \dots, \quad \dot{A}_n^c = k_n^c(p_n(A_n^c) - p_A^m), \\ \dot{A}^s &= k_A^s(p_A^s(A^s) - p_A^m), \quad \dot{p}_A^m = \alpha(A_1^c + \dots + A_n^c - A^s). \end{aligned} \quad (33)$$

Как и ранее, в ситуации локально-оптимального выбора объемов потребления и производства блага A , а также рыночной цены блага значения коэффициентов равны

$$\begin{aligned} k_1^c &= -1/(p_1^1(A_1^c))', \quad \dots, \quad k_n^c = -1/(p_n^n(A_n^c))', \\ k_A^s &= -1/(p_A^s(A^s))', \quad \dots, \quad \alpha = (k_1^c + \dots + k_n^c - k_A^s)^{-1}. \end{aligned}$$

Равновесная точка в системе (33) определяется из условий

$$p_1(A_1^*) = \dots = p_n(A_n^*) = p_A^s(A_1^* + \dots + A_n^*).$$

Поясним, как решается эта система из n уравнений с n неизвестными $A_1^*, \dots, A_n^*$. Вначале из первых $n - 1$ уравнений для каждого значения A_1^* определяются значения $A_2^* = f_2(A_1^*)$, $\dots$, $A_n^* = f_n(A_1^*)$. При этом для монотонно убывающих кривых спроса функции $f_2, \dots, f_n$ монотонно возрастают по своему аргументу. Затем полученные значения подставляются в уравнение $p_1(A_1^*) = p_A^s(A_1^* + \dots + A_n^*)$. Правая часть этого уравнения является монотонно возрастающей функцией от A_1^* (композицией монотонно возрастающих функций от A_1^*), а левая часть монотонно убывает по A_1^* . Поэтому в общей ситуации это уравнение имеет единственное решение A_1^* . Таким образом, для монотонно убывающих функций спроса и монотонно возрастающей функции предложения существует единственное решение рассматриваемой системы.

Устойчивость положения равновесия $(A_1^*, \dots, A_n^*)$, согласно теореме Ляпунова, проверяется для системы, линеаризованной в окрестности положения равновесия, где ввиду гладкости

производных функций спроса и предложения можно положить

$$k_1^c = -1/(p_A^1(A_1^c))'_{A_n^*}, \dots, k_n^c = -1/(p_A^n(A_n^c))'_{A_n^*},$$

$$k_A^s = -1/(p_A^s(A^s))'_{A^*}, \alpha = (k_1^c + \dots + k_n^c - k_A^s)^{-1}.$$

Непосредственная проверка условий устойчивости характеристического полинома линеаризованной системы является чрезвычайно сложной задачей. Поэтому для доказательства устойчивости системы (33) будем использовать подход, основанный на методе математической индукции.

Первый шаг индукции — устойчивость системы (33) при $n = 1$ — уже доказан в разд. 1. Для индукционного перехода предположим, что устойчивость системы (33) установлена для всех $k \leq n$ и докажем это утверждение для $k = n + 1$. В этом случае система приобретает вид:

$$\begin{aligned} \dot{A}_1^c &= k_1^c(p_1(A_1^c) - p_A^m), \\ &\dots \\ \dot{A}_n^c &= k_n^c(p_n(A_n^c) - p_A^m), \\ \dot{A}_{n+1}^c &= k_{n+1}^c(p_{n+1}(A_{n+1}^c) - p_A^m), \\ \dot{A}^s &= k_A^s(p_A^s(A^s) - p_A^m), \\ \dot{p}_A^m &= \alpha(A_1^c + \dots + A_n^c + A_{n+1}^c - A^s). \end{aligned} \quad (34)$$

Пусть $A = A_n^c + A_{n+1}^c$. Сложив уравнения предыдущей системы, относящиеся к потребителям с номерами n и $n + 1$, приведем систему к виду:

$$\begin{aligned} \dot{A}_1^c &= k_1^c(p_1(A_1^c) - p_A^m), \\ &\dots \\ \dot{A} &= (k_n^c + k_{n+1}^c)(p_c(A_n^c, A_{n+1}^c) - p_A^m), \\ \dot{A}^s &= k_A^s(p_A^s(A^s) - p_A^m), \\ \dot{p}_A^m &= \alpha(A_1^c + \dots + A - A^s), \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$\alpha = (k_1^c + \dots + (k_n^c + k_{n+1}^c) - k_A^s)^{-1}, \quad p_c(A_n^c, A_{n+1}^c) = (k_n^c p_c^n(A_n^c) + k_{n+1}^c p_c^{n+1}(A_{n+1}^c)) / (k_n^c + k_{n+1}^c).$$

Рассмотрим функцию $f(A_n^c, A_{n+1}^c) = k_n^c p_c^n(A_n^c) + k_{n+1}^c p_c^{n+1}(A_{n+1}^c)$. Необходимо показать, что в окрестности равновесной точки (A_n^*, A_{n+1}^*) линейная часть функции f зависит от дифференциала суммы $A_n^c + A_{n+1}^c$. Действительно, в силу определения коэффициентов k_n^c, k_{n+1}^c имеем $\partial f / \partial A_n^c|_{A_n^*} = -1$, $\partial f / \partial A_{n+1}^c|_{A_{n+1}^*} = -1$, поэтому $\Delta p_c(A_n^c, A_{n+1}^c) = -\Delta A / (k_n^c + k_{n+1}^c)$.

Теперь линеаризованная в окрестности положения равновесия система (41) сводится к случаю системы при $k = n$, устойчивость которой выполнена по предположению индукции. Осталось показать устойчивость компонент объекта A :

$$\dot{A}_n^c = k_n^c(p_n(A_n^c) - p_A^m), \quad \dot{A}_{n+1}^c = k_{n+1}^c(p_{n+1}(A_{n+1}^c) - p_A^m). \quad (36)$$

В самом деле, величина p_A^m не выходит из ε -трубки вокруг равновесной точки p_A^* для малого $\varepsilon > 0$, а каждое из характеристических уравнений для зависимостей в (36) имеет отрицательный вещественный корень. Поэтому переменные (A_n^c, A_{n+1}^c) устойчивы по Ляпунову. Второй шаг индукции завершен.

Рассмотрим теперь *общую ситуацию экономического обмена*, т.е. случай n агентов выбора и k благ. Введем следующие переменные, характеризующие эту систему: $A_1^i, \dots, A_n^i$ — объемы спроса на благо i со стороны агентов $1, \dots, n$; $A_s^1, \dots, A_s^k$ — объемы предложения благ $1, \dots, k$; $p_i^j(A_i^j, A_i^{-j})$ — обратная функция спроса на благо j со стороны агента i , где $A_i^{-j} = \{A_i^1, \dots, A_i^{j-1}, A_i^{j+1}, \dots, A_i^k\}$; $p_s^i(A_s^i)$ — обратная функция предложения блага $i = 1, \dots, k$; $p_m^1, \dots, p_m^k$ — рыночные цены благ $1, \dots, k$, формируемые в процессе экономического обмена. Подчеркнем, что обратные функции спроса на каждое обмениваемое благо в данной ситуации зависят от объема потребления этого блага и от объемов потребления других обмениваемых благ.

Тогда данная ситуация экономического обмена описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{A}_1^i &= k_1^i(p_1^i(A_1^i, A_1^{-i}) - p_m^i), \\ &\dots \\ \dot{A}_n^i &= k_n^i(p_n^i(A_n^i, A_n^{-i}) - p_m^i), \\ A_s^i &= k_s^i(p_s^i(A_s^i) - p_m^i), \\ \dot{p}_m^i &= \alpha_i(A_1^i + \dots + A_n^i - A_s^i), \end{aligned} \quad (37)$$

где $i = 1, \dots, k$. В локально-оптимальном случае, как и ранее, имеем:

$$k_j^i = -1/(p_j^i(A_j^i, \dots))'_{A_j^i}, \quad k_s^i = -1/(p_s^i(A_s^i))'_{A_s^i}, \quad \alpha_i = (k_1^i + \dots + k_n^i - k_s^i)^{-1}.$$

Равновесная точка в этой системе определяется из уравнений:

$$p_1^i(A_1^i, A_1^{-i}) = \dots = p_n^i(A_n^i, A_n^{-i}) = p_s^i(A_1^i + \dots + A_n^i), \quad i = 1, \dots, k.$$

Покажем, как решается эта система уравнений. Введем следующие обозначения: $X = (A_1^1, \dots, A_1^k)$, $Y_2 = (A_2^1, \dots, A_2^k)$, ..., $Y_n = (A_n^1, \dots, A_n^k)$. Вектора X и Y_2 связаны между собой системой из k уравнений:

$$p_1^1(X) = p_2^1(Y_2), \dots, p_1^k(X) = p_2^k(Y_2), \quad (38)$$

или $P_1(X) = P_2(Y_2)$.

Если матрица частных производных $(P_2)'_{Y_2}$ невырождена, то в некоторой окрестности равновесной точки существует единственное решение $Y_2 = F_2(X)$. Аналогично для любого $i = 2, \dots, n$: $Y_i = F_i(X)$ и каждая координата вектора Y_i является функцией от X : $A_2^i = f_2^i(X)$, ..., $A_n^i = f_n^i(X)$. Подставив эти значения в уравнение $p_1^i(X) = p_s^i(A_s^i)$, получим:

$$p_1^i(X) = p_s^i(A_1^i + f_2^i(X) + \dots + f_n^i(X)), \quad i = 1, \dots, k. \quad (39)$$

Рассмотрим вектор-функции $P_1 = (p_1^1, \dots, p_1^k)'$, $P_s = (p_s^1, \dots, p_s^k)'$. Для того чтобы система (39) из k уравнений с k неизвестными $A_1^1, \dots, A_1^k$ имела решение, необходимо предположить (по аналогии с предыдущим случаем монотонных обратных функций спроса и предложения), что выполнены условия “общего положения”, которые формально сводятся к условиям теоремы Брауэра о неподвижной точке. Более конкретно, предполагается, что $X \in \mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ — замкнутое, ограниченное, выпуклое множество, а отображение $G = P_1^{-1} P_s$ является непрерывным отображением множества $\mathcal{X}$ в себя.

Обсудим это условие. Для существования отображения G достаточно предположить, что все рассматриваемые переменные (объемы и функции спроса и предложения, рыночные цены обмениваемых благ) имели единую область определения и значений, что достигается соответствующей перенормировкой исходных переменных. Для непрерывности отображения G достаточно

предположить непрерывность всех обратных функций спроса и предложения по своим аргументам, что обычно выполнено в реальных задачах.

Исследуем теперь устойчивость положения равновесия в системе (37). Матрица J системы, линеаризованной в окрестности положения равновесия, является “почти блочной” с k блоками, соответствующими подсистемам спроса и предложения для каждого из k благ, и “внеблочными” элементами, образованными “перекрестными” частными производными обратных функций спроса на блага $i = 1, \dots, k$ по объемам спроса на другие блага, например $\partial p_1^1 / \partial A_1^2$.

Достаточные условия устойчивости этой системы будем анализировать по следующей схеме. Во-первых, по теореме Важевского устойчивость линеаризованной системы с матрицей J будет определяться собственными значениями эрмитово-симметризованной матрицы $S = 0.5(J + J^*)$, которая допускает представление $S = A + E$, где $A = T\Lambda T^{-1}$ — диагонализуемая матрица, порожденная основными k блоками рассматриваемой системы, T — ортогональная матрица, а E — эрмитова матрица, порожденная всеми “внеблочными” элементами (т.е. перекрестными частными производными обратных функций спроса на блага). Пусть $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{kn})$ — собственные значения матрицы A . По обобщенной теореме Гершгорина (Horn, Johnson, 1989, theorem 6.3.2, p. 436) для любого собственного значения $\hat{\lambda}$ матрицы S найдется одно из чисел λ_i такое, что $|\hat{\lambda} - \lambda_i| \leq \|E\|$. Поэтому при достаточной малости нормы матрицы E , образованной перекрестными частными производными обратных функций спроса, устойчивость матрицы J будет определяться собственными значениями эрмитово-симметризованной матрицы $A = 0.5(B + B^*)$, соответствующей “чисто блочной” матрице B из k рассматриваемых благ. Однако устойчивость этой “чисто блочной” матрицы B для любых коэффициентов $k_1^i, \dots, k_n^i, \alpha_i, i = 1, \dots, k$, устанавливается совершенно аналогично рассмотренному выше случаю одного блага. Поскольку характеристические показатели Ляпунова матриц A и B совпадают, линеаризованная система с матрицей A будет также устойчивой. Поэтому справедлива теорема.

Теорема 1. Пусть для системы (37) выполнены: приведенное выше условие “общего положения” и условие ограниченности “перекрестных” частных производных функций спроса:

$$V = \|\partial p_i^j / \partial A_i^m\|, \quad U = \min\{|\lambda_i| \neq 0, 1 \leq i \leq k \times n\}, \quad 0 < V < U, \quad (40)$$

где λ_i — собственные значения эрмитово-симметризованной матрицы $A = 0.5(B + B^*)$, соответствующей блочно-диагональной матрице B с k блоками для k обмениваемых благ. Тогда в ситуации “нормальных” благ (ниспадающие функции обратного спроса на блага и возрастающие функции предложения благ) существует устойчивое положение равновесия в системе (37).

3.2. Теория общего экономического равновесия. Далее рассмотрим перспективу построения теории общего экономического равновесия, основанную на следующей идее. В отличие от концепции общего равновесия Л. Вальраса, базирующейся на гипотезе “price-taking behavior” экономических агентов, развиваемый далее подход основан на представлении о том, что экономические агенты активно формируют рыночные цены обмениваемых благ, сопоставляя с ними субъективные цены этих благ в процессе обмена.

В отличие от вальрасианского подхода в анализируемых далее моделях общего равновесия все переменные являются эндогенными, включая рыночные цены обмениваемых благ, и поэтому теоретические затруднения, с которыми сталкиваются вальрасианские теории общего равновесия, не возникают здесь априори.

Исследуем вначале наиболее простой случай: 2 блага — A и B , 2 поставщика благ A и B , 1 потребитель благ A и B . Эта система описывается моделью:

$$\begin{aligned} \dot{A}^c &= k_A^c(p_A^c(A^c, B^c) - p_A^m), & \dot{A}^s &= k_A^s(p_A^s(A^s) - p_A^m), & \dot{p}_A^m &= \alpha(A^c - A^s), \\ \dot{B}^c &= k_B^c(p_B^c(B^c, A^c) - p_B^m), & \dot{B}^s &= k_B^s(p_B^s(B^s) - p_B^m), & \dot{p}_B^m &= \beta(B^c - B^s). \end{aligned} \quad (41)$$

Равновесные точки системы (41) удовлетворяют условиям:

$$A^s = A^c = A^*, \quad B^s = B^c = B^*, \quad p_A^c(A^*, B^*) = p_A^s(A^*) = p_A^*, \quad p_B^c(B^*, A^*) = p_B^s(B^*) = p_B^*.$$

Как и раньше, в случае монотонно убывающих функций спроса p^c и монотонно возрастающих функций предложения p^s для каждого B^* существует единственная точка $A^* = A^*(B^*)$, определяемая из уравнения $p_A^c(A^*, B^*) = p_A^s(A^*)$. Подставляя это значение в уравнение $p_B^c(B^*, A^*) = p_B^s(B^*)$,

получим $p_B^c(B^*, A^*(B^*)) = p_B^s(B^*)$. Правая часть этого уравнения монотонно возрастает по B^* , тогда как его левая часть является монотонно убывающей функцией от B^* . Как и в предыдущих случаях, предполагаем, что существует решение этого уравнения в общей ситуации. Для единственности этого решения достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\frac{\partial p_B^c}{\partial B^*} < 0, \quad \frac{\partial p_B^c}{\partial A^*} < 0, \quad \frac{\partial p_B^s}{\partial B^*} > 0.$$

Таким образом, при достаточно общих и естественных условиях, наложенных на функции p_A^c , p_B^c , p_A^s , p_B^s , существует единственная равновесная точка в системе (37).

Для исследования устойчивости этого равновесия рассмотрим линеаризованную систему:

$$\dot{q} = (A^c - A^*; A^s - A^*; p_A^m - p_A^*; B^c - B^*; B^s - B^*; p_B^m - p_B^*), \quad \dot{q} = Jq,$$

$$J = \begin{pmatrix} k_A^c \partial p_A^c / \partial A^c & 0 & -k_A^c k_A^c \partial p_A^c / \partial B^c & 0 & 0 \\ 0 & k_A^s \partial p_A^c / \partial A^s & -k_A^s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_B^c \partial p_B^c / \partial A^c & 0 & 0 & k_B^c \partial p_B^c / \partial B^c & 0 & -k_B^c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_B^s \partial p_B^c / \partial B^s & -k_B^s \\ 0 & 0 & 0 & \beta & -\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица J является “почти блочной” с блоками, соответствующими рынкам благ A и B . Используя рассуждения, аналогичные приведенным выше при доказательстве устойчивости системы (43), убеждаемся, что достаточные условия устойчивости этой системы имеют вид:

$$\partial p_A^c / \partial A^c < 0, \quad \partial p_B^c / \partial B^c < 0, \quad \partial p_A^s / \partial A^s > 0, \quad \partial p_B^s / \partial B^s > 0,$$

$$|k_A^c \partial p_A^c / \partial B^c + k_B^c \partial p_B^c / \partial A^c| < \min(|\lambda_i| \neq 0, i = 1, \dots, 6),$$

где λ_i — собственные значения “чисто блочной” матрицы, соответствующей рынкам благ A и B .

В частности, при $k_A^c = k_B^c = 1$, $k_A^s = k_B^s = -1$ второе условие значительно упрощается:

$$|\partial p_A^c / \partial B^c + \partial p_B^c / \partial A^c| < 1.$$

Эти условия вновь означают, что при естественных предположениях относительно функций спроса и предложения для благ A и B , а также перекрестных частных производных функций спроса существует устойчивая равновесная аллокация в системе экономического обмена (41).

Условия существования единственного устойчивого равновесия в этой системе были рассмотрены столь подробно потому, что данное равновесие является основой для исследования рынков несовершенной конкуренции.

Обобщение этих результатов на случай с k благами проводится следующим образом. Пусть $A_1^c, \dots, A_k^c$ — объемы потребления благ $1, \dots, k$; $A_1^s, \dots, A_k^s$ — объемы поставок благ $1, \dots, k$ независимыми поставщиками; $p_i^c(A_i^c, A_{-i}^c)$ — обратная функция спроса на благо $i = 1, \dots, k$, где $A_{-i}^c = \{A_1^c, \dots, A_{i-1}^c, \dots, A_{i+1}^c, A_k^c\}$; $p_i^s(A_i^s)$ — обратная функция предложения блага $i = 1, \dots, k$; p_i^m — рыночная цена блага i , формируемая в процессе обмена. Тогда рассматриваемая ситуация экономического обмена описывается моделью вида:

$$\dot{A}_i^c = k_i^c(p_i^c(A_i^c, A_{-i}^c) - p_i^m), \quad \dot{A}_i^s = k_i^s(p_i^s(A_i^s) - p_i^m), \quad p_i^m = \alpha_i(A_i^c - A_i^s), \quad (42)$$

где $i = 1, \dots, k$. В локально-оптимальном случае имеем следующие значения коэффициентов:

$$k_i^c = -1/(p_i^c(A_i^c, A_{-i}^c))'_{A_i^c}, \quad k_i^s = -1/(p_i^s(A_i^s))'_{A_i^s}, \quad \alpha_i = (k_i^c - k_i^s)^{-1}.$$

Равновесные точки в системе (42) определяются из уравнений $p_i^s(A_i^*) = p_i^c(A_i^*, A_{-i}^*)$, $i = 1, \dots, k$.

В ситуации “общего положения”, например в случае монотонно убывающих по A_i^* непрерывных функций спроса и монотонно возрастающих, непрерывных по A_i^* функций предложения, отображающих единый носитель всех переменных на себя, существует решение $A_i^* = g_i(A_{-i}^*)$, $i = 1, \dots, k$. Другими словами, для вектора равновесных объемов спроса $X = (A_1^*, \dots, A_k^*)$ можно записать:

$$X = G(X), \quad (43)$$

где отображение G является непрерывным.

В ситуации “общего положения” существует решение (43), соответствующее равновесной аллокации благ в системе (42).

Для исследования устойчивости положения равновесия рассмотрим линеаризованную систему с “почти блочной” матрицей J с диагональными блоками $J_1, \dots, J_k$, соответствующими рынкам благ 1, ..., k :

$$J_i = \begin{pmatrix} k_i^c \partial p_i^c / \partial A_i^c & 0 & -k_i^c \\ 0 & k_i^s \partial p_i^s / \partial A_i^s & -k_i^s \\ \alpha_i & -\alpha_i & 0 \end{pmatrix}$$

и “внеблочными” элементами вида $\partial p_i^c / \partial A_j^c$, $i \neq j$. Доказательство сформулированной ниже теоремы 2 повторяет идеи, использованные при доказательстве теоремы 1: переход к эрмитово-симметризованной матрице $S = 0.5(J + J^*)$, применение неравенства Важевского и теоремы Гершгорина для анализа условий устойчивости и собственных значений.

Теорема 2. Пусть выполнены условие “общего положения” и условие ограниченности “перекрестных” частных производных функций спроса:

$$V = \|k_i^c \partial p_i^c / \partial A_j^c + k_j^c \partial p_j^c / \partial A_i^c\|, \quad U = \min\{|\lambda_i| \neq 0, i = 1, \dots, 3 \times k\}, \quad 0 < V < U,$$

где λ_i — собственные значения эрмитово-симметризованной матрицы $A = 0.5(B + B^*)$, соответствующей блочно-диагональной матрице B с k блоками для k обмениваемых благ. Тогда существует устойчивое положение равновесия в системе экономического обмена (42).

3.3. Общая теория экономического обмена, основанного на ценностях. В этом пункте будет рассмотрена общая ситуация экономического обмена, в которой k обмениваемых благ, n потребителей благ и m поставщиков благ. Особенностью модели обмена является то обстоятельство, что в процессе экономического обмена социальные агенты “моделируют” ситуацию обмена посредством рыночных цен экономических благ.

Введем следующие обозначения: D_j^i — объем потребления некоторого блага i потребителем j ; S_j^i — объем поставок некоторого блага i поставщиком j ; d_j^i — субъективная цена потребления блага i потребителем j ; s_j^i — субъективная цена предложения блага i поставщиком j ; p_i — рыночная цена обмениваемого блага i ; $i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, n$.

Вначале предположим, что субъективные цены потребления и предложения каждого блага зависят только от объемов потребления и предложения этого блага, соответственно. Уравнения системы обмена при этом запишутся следующим образом: для каждого $i = 1, \dots, k$:

$$\begin{aligned} \dot{D}_1^i &= k_{1i}^c(d_1^i(D_1^i) - p_i), \dots, \dot{D}_n^i = k_{ni}^c(d_n^i(D_n^i) - p_i), \\ \dot{S}_1^i &= k_{1i}^s(s_1^i(S_1^i) - p_i), \dots, \dot{S}_m^i = k_{mi}^s(s_m^i(S_m^i) - p_i), \\ \dot{p}_i &= \alpha_i(D_1^i + \dots + D_n^i - S_1^i - \dots - S_m^i), \end{aligned} \quad (44)$$

где, как и выше, в локально-оптимальном случае значения коэффициентов равны:

$$k_{ji}^c = -1/(d_j^i(D_j^i))'_{D_j^i}, \quad k_{ji}^s = -1/(s_j^i(S_j^i))'_{S_j^i}, \quad \alpha_i = (k_{1i}^c + \dots + k_{ni}^c - k_{1i}^s - \dots - k_{mi}^s)^{-1}.$$

Условия равновесия для системы (44) запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, k \quad p_i &= d_1^i(D_1^i) = \dots = d_n^i(D_n^i), \\ p_i &= s_1^i(S_1^i) = \dots = s_m^i(S_m^i), \quad D_1^i + \dots + D_n^i = S_1^i + \dots + S_m^i. \end{aligned} \quad (45)$$

Предположим, что функции спроса $d_j^i(\cdot)$ монотонно убывают, а функции предложения $s_j^i(\cdot)$ монотонно возрастают по своему аргументу. Тогда для равновесных объемов спроса и предложения D_j^i, S_j^i имеем:

$$D_j^i = f_j^i(D_1^i), \quad j = 2, \dots, n, \quad S_l^i = g_l^i(D_1^i), \quad l = 1, \dots, m \quad (46)$$

где функции $f_j^i(\cdot)$ монотонно возрастают, а функции $g_l^i(\cdot)$ монотонно убывают по своему аргументу. Подставив эти зависимости в третье условие в системе (45), получим:

$$D_1^i + f_2^i(D_1^i) + \dots + f_n^i(D_1^i) = g_1^i(D_1^i) + \dots + g_m^i(D_1^i). \quad (47)$$

Левая часть равенства (47) является монотонно возрастающей функцией аргумента D_1^i , а правая часть — монотонно убывающей функцией того же аргумента. Поэтому в ситуации “общего положения” существует единственное решение уравнения (43) $(D_1^i)^*$, по которому определяются все равновесные значения объемов спроса и предложения, а также равновесные цены обмениваемых благ в исследуемой системе обмена. Таким образом, показано, что при естественных предположениях о функциях спроса и предложения в системе существует единственное равновесие.

Разберемся с устойчивостью найденного положения равновесия. Матрица J линеаризованной системы (44) является блочной с k блоками вида:

$$J_i = \begin{pmatrix} k_{1i}^c dd_1^i/dD_1^i & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -k_{1i}^c \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & k_{ni}^c dd_n^i/dD_n^i & 0 & \dots & 0 & -k_{ni}^c \\ 0 & \dots & 0 & k_{1i}^s ds_1^i/dS_1^i & \dots & 0 & -k_{1i}^s \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & k_{mi}^s ds_m^i/dS_m^i & -k_{mi}^s \\ \alpha_i & \dots & \alpha_i & -\alpha_i & \dots & -\alpha_i & 0 \end{pmatrix}.$$

Каждый блок матрицы J аналогичен рассмотренному в п. 3.1 случаю за исключением того, что в данной модели число поставщиков благ возрастает до m . Поэтому идея доказательства устойчивости матрицы J сохраняется прежней: используем двойную индукцию по параметрам n и m . Детали доказательства полностью аналогичны п. 3.1.

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть обратные функции спроса $d_j^i(\cdot)$ монотонно убывают, а обратные функции предложения $s_j^i(\cdot)$ монотонно возрастают по своим аргументам. Тогда существует единственное устойчивое положение равновесия в общей системе обмена (44).

Была рассмотрена наиболее простая ситуация, когда функции спроса и предложения обмениваемых благ зависят только от объемов спроса и предложения соответствующего блага. В более

сложной ситуации эти функции зависят также от объемов спроса и предложения других благ, например:

$$\begin{aligned}\forall i = 1, \dots, k \quad \dot{D}_1^i &= k_{1i}^c(d_1^i(D_1^i, D_1^{-i}) - p_i), \dots, \quad \dot{D}_n^i = k_{ni}^c(d_n^i(D_n^i, D_n^{-i}) - p_i), \\ \dot{S}_1^i &= k_{1i}^s(s_1^i(S_1^i, S_1^{-i}) - p_i), \dots, \quad \dot{S}_m^i = k_{mi}^s(s_m^i(S_m^i, S_m^{-i}) - p_i), \\ \dot{p}_i &= \alpha_i(D_1^i + \dots + D_n^i - S_1^i - \dots - S_m^i),\end{aligned}\quad (48)$$

где $D_j^{-i} = (D_j^1, \dots, D_j^{i-1}, D_j^{i+1}, \dots, D_j^k)$, $S_j^{-i} = (S_j^1, \dots, S_j^{i-1}, S_j^{i+1}, \dots, S_j^k)$.

Исследование условий равновесия для системы (48) приводит к $(n + m + 1)k$ уравнениям с $(n + m + 1)k$ неизвестными. Рассуждения, аналогичные приведенным выше, но более сложные в формальном отношении, позволяют показать, что в ситуации “общего положения” существует равновесная точка для системы (48). Анализ устойчивости этого положения равновесия использует идеи, аналогичные приведенным выше для случая общего экономического равновесия. При условии относительной малости “перекрестных” частных производных функций спроса и предложения по объемам спроса и предложения альтернативных благ положение равновесия в системе (48) будет устойчивым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Демидович Б.П. (1967): Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука.
- Макаров В.Л. (2003): Исчисление институтов // *Экономика и мат. методы*. Т. 39. Вып. 2.
- Макаров В.Л., Рубинов А.М. (1973): Математическая теория экономической динамики и равновесия. М.: Наука.
- Полтерович В.М. (1998): Кризис экономической теории // *Экономическая наука современной России*. Т. 1. № 1.
- Эбеллинг Р. (1992): Роль австрийской школы в развитии мировой экономической мысли XX века // *Экономика и мат. методы*. Т. 28. Вып. 4.
- Akerlof G. (1970): The Market for “Lemons”: Qualitative Uncertainty and the Market Mechanism // *Quarterly J. of Econ.* Vol. 84.
- Arrow K., Debreu G. (1954): Existence of Equilibrium for a Competitive Economy // *Econometrica*. Vol. 25.
- Debreu G. (1974): Excess Demand Functions // *J. of Math. Econ.* Vol. 1.
- Hayek F. (1989): The Fatal Concept. Chicago: Chicago Press.
- Hodgson G. (1988): Economics and Institutions. A Manifesto for a Modern Institutional Economics. L.: Polity Press.
- Horn R., Johnson Ch. (1986): Matrix Analysis. Cambridge: Cambridge University Press.
- Makarov V.L., Rubinov A.M., Levin M.I. (1995): Mathematical Economic Theory: Pure and Mixed Types of Economic Mechanisms. Advanced Textbooks in Economics. Amsterdam: Elsevier.
- McKenzie L.W. (1954): On Equilibrium in Graham’s Model of World Trade and Other Competitive Systems // *Econometrica*. Vol. 22. № 1.
- Neumann J. von, Morgenstern O. (1944): Theory of Games and Economic Behavior. Princeton: Princeton University Press.
- North D. (1977): Markets and Other Allocation Systems in History: The Challenge of Karl Polanyi // *J. of European Econ. History*. Vol. 6.
- Polanyi K. (1971): The Great Transformation. Boston: Beacon Press.
- Polterovich V.M. (2005): Institutional Traps. In: L.R. Klein, M. Pomer “*The New Russia: Economic Transition Reconsidered*”. Stanford: Stanford University Press.
- Robbins L. (1935): An Essay on the Nature and Significance of Economic Science. London: Macmillan.
- Sonnenschein H. (1973) Do Walras’ Identity and Continuity Characterize the Class of Community Excess Demand Functions? // *J. of Econ. Theory*. Vol. 6.

Поступила в редакцию
15.02.2007 г.

Models of Economic Exchange

В. Ye. Brodsky

Unlike Walrasian theories of the general economic equilibrium based on the hypothesis of price-taking behavior of economic agents, all models of exchange considered in this paper use an assumption that agents actively form market prices of exchanged goods via adjusting subjective prices of these goods in the exchange process. The following models of exchange are considered: elementary economic exchange, “market failure” models, and general models of economic exchange based on the market prices of exchanged goods. Theorems are proved about existence of a stable equilibrium in these models of exchange described by dynamical systems of ordinary differential equations (volumes of demand and supply, market prices) under usual assumptions about inverse demand and supply functions.