

КОМПАКТНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОГО И ДЕМОГРАФИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ МИР–СИСТЕМЫ (1–1973 гг.)*

© 2008 г. А. В. Коротаев, А. С. Малков, Д. А. Халтурина

(Москва)

Показано, что предельно простые математические модели могут описывать до 99.2–99.91% вариаций экономической и демографической макродинамики Мир–Системы на протяжении большей части последних двух тысяч лет ее истории.

В 1960 г. Х. фон Ферстер, П. Мора и Л. Амиот (von Foerster, Mora, Amiot, 1960) провели статистическую оценку демографических данных и обнаружили, что кривая роста численности населения Земли N лучше всего аппроксимируется гиперболической кривой

$$N = C/(t_0 - t), \quad (1)$$

где C и t_0 – константы, причем t_0 соответствует 13 ноября 2026 г.¹ Нетрудно убедиться, что уравнение (1) является решением дифференциального уравнения

$$dN/dt = N^2/C. \quad (2)$$

Если бы Х. фон Ферстер, П. Мора и Л. Амиот имели в своем распоряжении в дополнение к данным по долгосрочной динамике численности населения мира еще и данные по динамике роста мирового ВВП за 1–1973 гг.², они могли бы определить, что общая тенденция динамики роста мирового ВВП за этот период была не просто гиперболической, а квадратично-гиперболической и практически идеально аппроксимировалась предельно простым квадратично-гиперболическим уравнением:

$$G = C/(t_0 - t)^2, \quad (3)$$

где G – мировой ВВП, $C = 17355487.3$ (в млрд. международных долл. 1990 г. в паритетах покупательной способности (ППС)), $t_0 = 2005.56$ (см. рис. 1, где черными точками нанесены оценки из (Maddison, 2001); данные по производству мирового ВВП на душу населения на 1000 г. скорректированы по (Мельянцев, 1996, 2003, 2004; Meliantsev, 2004), сплошная линия сгенерирована уравнением $G = 17749573.1/(2006 - t)^2$; параметры $C = 17749573.1$ и $t_0 = 2006$ определены методом наименьших квадратов³).

Собственно говоря, простая гиперболическая модель также неплохо отражает актуально наблюдаемую динамику мирового ВВП за 1–1973 гг., но не так хорошо, как квадратичная гиперболическая модель (см. рис. 2, где черными точками нанесены оценки из (Maddison, 2001); данные по производству мирового ВВП на душу населения на 1000 г. скорректированы по (Мельянцев, 1996, 2003, 2004; Meliantsev, 2004); сплошная линия сгенерирована уравнением $G = 227906.1/(1987 - t)$, параметры $C = 227906.1$ и $t_0 = 1987$ определены методом наименьших квадратов). Таким образом, долгосрочная динамика мирового ВВП вплоть до 1970-х годов лучше ап-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 06-06-80459, 06-06-80503, 07-06-00314).

¹ Точнее говоря, уравнение, полученное Х. фон Ферстером и его коллегами, выглядит следующим образом: $N_t = C/(t_0 - t)^{0.99}$. Однако, как было показано С. фон Хернером (von Hoerner, 1975) и С.П. Капицей (Капица, 1992, 1996, 1999), это уравнение имеет смысл использовать в следующем аппроксимированном виде $N_t = C/(t_0 - t)$.

² Впрочем, первые достаточно обоснованные оценки долгосрочной динамики ВВП за этот период были опубликованы только в (Maddison, 2001).

³ Наилучшее соответствие достигается при $C = 17355487.3$, $t_0 = 2005.56$, что соответствует “экономическому концу света 23 июля 2005 г.”, но здесь и далее авторы решили ограничиться целыми значениями годов.

Мировой ВВП (в млрд. международных долл. 1990 г. в ППС)

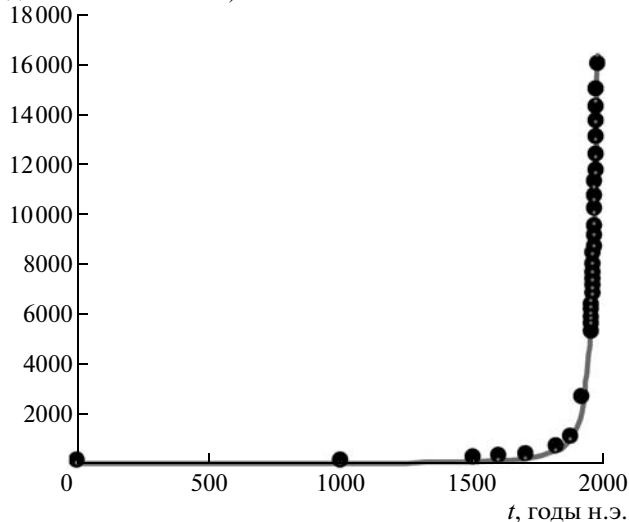


Рис. 1. Динамика мирового ВВП, 1–1973 гг.: соответствие предикций квадратичной гиперболической модели наблюдаемым данным $R = 0.9993$, $R^2 = 0.9986$, $\alpha \ll 0.0001$.

Мировой ВВП (в млрд. международных долл. 1990 г. в ППС)

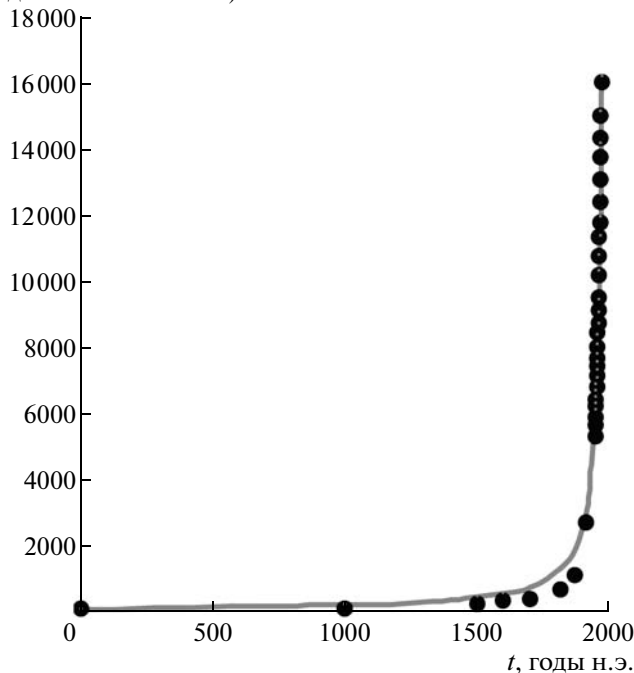


Рис. 2. Динамика мирового ВВП, 1–1973 гг.: соответствие предикций простой гиперболической модели наблюдаемым данным $R = 0.9978$, $R^2 = 0.9956$, $\alpha \ll 0.0001$.

В той или иной форме данное положение использовалось многими более поздними исследователями, например (Artzrouni, Komlos, 1985; Kremer, 1993; Komlos, Nefedov, 2002; Неведов, 2002, 2003; Nefedov, 2004; Turchin, 2003; Малков, Селунская, Сергеев, 2005; Турчин, 2007; Коротаев, Малков, Халтурина, 2007; Коротаев, Комарова, Халтурина, 2007).

проксимируется квадратичной, а не простой гиперболой.

Отметим, что простая гиперболическая модель точнее отображает долгосрочную мировую демографическую динамику за 1–1973 гг., чем динамику мирового ВВП. Действительно, хотя динамика мирового ВВП за 1–1973 гг. неплохо описывается простой гиперболической моделью типа (1) с $R = 0.9978$, $R^2 = 0.9956$, $\alpha \ll 0.0001$, но это соответствие значительно хуже наблюдаемого за то же самое время применительно к долгосрочной динамике численности населения мира с $R = 0.9996$, $R^2 = 0.9991$, $\alpha \ll 0.0001$ (см. рис. 3, где черными точками нанесены оценки из (Maddison, 2001), сплошная линия сгенерирована уравнением $N = 163158.78/(2014 - t)^2$, параметры $C = 163158.78$ и $t_0 = 2014$ определены методом наименьших квадратов).

Однако квадратичная гиперболическая модель применительно к численности населения мира значительно хуже отражает актуально наблюдаемые данные с $R = 0.9982$, $R^2 = 0.9963$, $\alpha \ll 0.0001$ (см. рис. 4, где черными точками нанесены оценки из (Maddison, 2001), сплошная линия сгенерирована уравнением $N = 33505220.7/(2065 - t)^2$, параметры $C = 33505220.7$ и $t_0 = 2065$ определены методом наименьших квадратов).

Покажем, что в 1–1973 гг. сочетание квадратично-гиперболического роста мирового ВВП с простым гиперболическим ростом численности населения мира не было ни в коей мере случайным. Ниже будет дана компактная математическая модель, объясняющая рост мирового населения и мирового ВВП для периода 1–1973 гг.

МОДЕЛЬ МИРОВОГО ДЕМОГРАФИЧЕСКОГО И ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО РОСТА М. КРЕМЕРА

Основное положение, на которое опираются модели Кремера (Kremer, 1993), было сформулировано еще в XVIII в. Т. Мальтусом (Malthus, 1978; Мальтус, 1993). Его можно переформулировать следующим образом.

Положение Мальтуса: “На протяжении большей части существования человечества рост его численности на каждый данный момент времени был ограничен потолком несущей способности земли, обусловленным наблюдаемым в данный момент времени уровнем развития жизнеобеспечивающих технологий”.

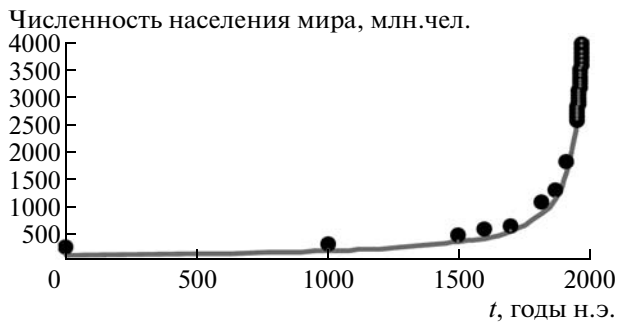


Рис. 3. Динамика численности населения мира, 1–1973 гг.: соответствие динамики, генерируемой простой гиперболической моделью наблюдаемым данным $R = 0.9996$, $R^2 = 0.9991$, $\alpha \ll 0.0001$.

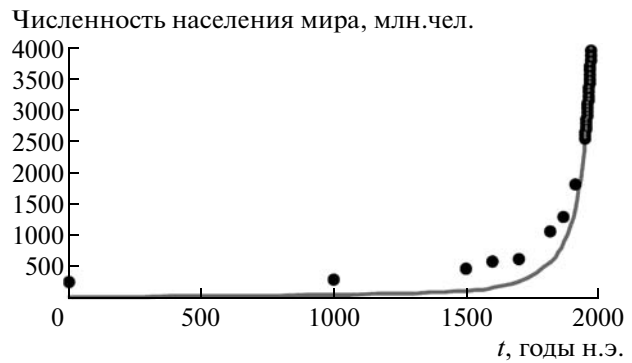


Рис. 4. Динамика численности населения мира, 1–1973 гг.: соответствие предикций квадратичной гиперболической модели наблюдаемым данным $R = 0.9982$, $R^2 = 0.9963$, $\alpha \ll 0.0001$.

Моделируя это допущение, М. Кремер исходит из того, что совокупный производимый человечеством продукт равен

$$G = TN^\alpha V^{1-\alpha},$$

где G – общий продукт; T – уровень технологии; V – используемые земельные ресурсы; α – параметр, $0 < \alpha < 1$. Фактически М. Кремер применяет функцию типа Кобба–Дугласа и сразу же уточняет, что переменная V в результате нормализации приравнивается к единице. Тогда уравнение для производимого продукта имеет вид:

$$G = rTN^\alpha, \quad (4)$$

где r , α – некоторые константы.

Далее, опираясь на положение Мальтуса, М. Кремер формулирует его следующим образом: “В упрощенной модели будем считать, что численность населения мгновенно приближается к равновесному уровню $\bar{N}$ ”. Величина $\bar{N}$ в его модели соответствует уровню населения, при котором оно производит на душу населения такой равновесный продукт $\bar{g}$, что население увеличивается, если среднедушевой продукт выше $\bar{g}$, и уменьшается, если среднедушевой продукт меньше $\bar{g}$. Таким образом, равновесный уровень населения $\bar{N}$ равен

$$\bar{N} = (\bar{g}/T)^{1/(\alpha-1)}.$$

Следовательно, уравнение для расчета численности населения фактически не является динамическим. В модели М. Кремера динамика заложена в уравнение для технологического роста. Вместе с другими исследователями (Aghion, Howitt, 1992, 1998; Grossman, Helpman, 1991; Simon, 1977, 1981, 2000; Jones, 1995, 2003, 2005; и т.д.) он исходит из предположения Э. Босеруп (Boserup, 1965) о том, что рост населения подталкивает людей к разработке новых технологий, и, в конечном счете, рост технологии пропорционален населению. Ранее данный тезис выдвигался С. Кузнецом (Kuznets, 1960) и Дж. Саймоном (Simon, 1977, 1981) в формулировке “Большее население означает большее число потенциальных изобретателей”. М. Кремер уточняет его: “При прочих равных, вероятность изобретения чего-либо одним человеком не зависит от численности населения. Таким образом, среди большого населения будет пропорционально больше людей, достаточно удачливых и сообразительных, чтобы предложить новые идеи” (Kremer, 1993, p. 685).

Насколько нам известно, данное допущение было впервые четко сформулировано одним из выдающихся экономистов XX в. С. Кузнецом (Kuznets, 1960), поэтому соответствующий тип динамики будем обозначать как “кузнецнианский”. Социально-демографические системы, где кузнецнианская популяционно-технологическая динамика сочетается с мальтузианской, будем называть “мальтузианско-кузнецнианские”.

Данное положение М. Кремер следующим образом выражает средствами математики:

$$\frac{dT}{dt}/T = bN, \quad (5)$$

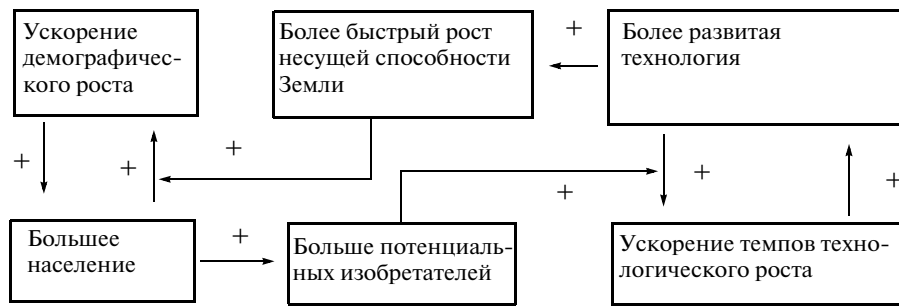


Рис. 5. Блок-схема нелинейной положительной обратной связи между технологическим развитием и демографическим ростом.

где b — средняя продуктивность работы одного изобретателя. Это подразумевает, что динамика абсолютной скорости технологического роста может быть описана уравнением:

$$\frac{dT}{dt} = bNT. \quad (6)$$

Далее М. Кремер объединяет уравнения для технологии и населения и показывает, что они генерируют ту же самую макродемографическую динамику, что и гиперболическая модель фон Ферстера (следовательно, она имеет столь же феноменальное соответствие эмпирическим данным). Однако наряду с этим она также дает и достаточно убедительное объяснение, ПОЧЕМУ на протяжении большей части человеческой истории абсолютные темпы роста численности населения мира были пропорциональны N^2 . Действительно, в обоих типах моделей рост численности населения мира, например с 10 до 100 млн. чел., приведет к росту dN/dt в 100 раз. Однако фон Ферстер и С. Капица не смогли дать вполне убедительного объяснения, почему на протяжении большей части человеческой истории тенденция dN/dt была пропорциональна N^2 .

Модель Кремера дает такое объяснение (хотя сам М. Кремер его в сколько-нибудь ясной вербальной форме так и не сформулировал). Объяснение заключается в том, что рост численности населения мира с 10 до 100 млн. чел. подразумевает, что уровень развития жизнеобеспечивающих технологий вырос приблизительно в 10 раз (так как он оказывается в состоянии поддержать существование на порядок большего числа людей). Однако десятикратный рост численности населения означает и десятикратный рост числа потенциальных изобретателей, а значит, и десятикратное повышение относительных темпов технологической динамики. Таким образом, абсолютная скорость технологического роста умножится в $10 \times 10 = 100$ раз (в соответствии с уравнением (5)). А так как N стремится к технологически обусловленному потолку несущей способности Земли, есть все основания предполагать, что и абсолютная скорость роста населения мира dN/dt будет в состоянии увеличиться в 100 раз, т.е. будет изменяться пропорционально квадрату численности населения.

Собственно говоря, модель М. Кремера дает достаточно простое объяснение гиперболической тенденции роста численности населения мира, показывая, что он является результатом действия исключительно простого механизма — механизма нелинейной положительной обратной связи второго порядка, которая, как известно, генерирует гиперболический рост, известный также как “режим с обострением” (Курдюмов, 1999; Князева, Курдюмов, 2005). В нашем случае эта нелинейная положительная обратная связь второго порядка выглядит следующим образом: технологический рост — рост потолка несущей способности Земли (расширение экологической ниши) — демографический рост — больше людей — больше потенциальных изобретателей — ускорение технологического роста — ускоренный рост несущей способности Земли — еще более быстрый демографический рост — ускоренный рост числа потенциальных изобретателей — еще более быстрый технологический рост — дальнейшее ускорение темпов роста несущей способности Земли и т.д. (рис. 5).

ДИНАМИКА МИРОВОГО РАЗВИТИЯ КАК ДИНАМИКА РАЗВИТИЯ МИР–СИСТЕМЫ

Модель М. Кремера позволяет снять одно из основных возражений против гиперболических моделей роста населения мира. Впервые познакомившись с математическими моделями роста населения мира, авторы испытали определенное недоверие по отношению к ним. Действитель-

но, их создание подразумевает, что население мира могло рассматриваться в качестве единой системы на протяжении многих тысяч лет, и уже фон Ферстер, П. Мора и Л. Амиот прямо делали это допущение: “Однако то, что может быть правильным по отношению к элементам⁴, которые из-за отсутствия между ними адекватной коммуникации должны принимать участие в соревновательной игре с (почти) нулевой суммой выигрыша, может быть неправильным для элементов⁵, обладающих системой коммуникации, которая дает им возможность образовывать коалиции, пока все элементы не оказываются столь сильно связаны между собой, что все население, с точки зрения теории игр, может рассматриваться в качестве единого игрока, ведущего игру, в которой в роли второго игрока—оппонента выступает Природа” (von Foerster, Mora, Amiot, 1960, p. 1292).

Однако имеются достаточно серьезные основания усомниться в обоснованности подобного допущения. Вплоть до самого недавнего времени (в особенности до 1492 г.) человечество не представляло собой системы в научном смысле, поскольку, например, рост населения таких регионов, как Старый Свет, Новый Свет, Австралия и Тасмания или Гавайские острова, происходил практически полностью независимо друг от друга. Очевидно, что бурные демографические процессы, происходившие на протяжении I тысячелетия н.э. в Евразии, не оказали *абсолютно* никакого влияния на синхронную демографическую динамику, например обитателей Тасмании (да и обратное влияние также было практически нулевым).

Данное возражение с достаточными основаниями приводит, например, Ю.В. Шишков в статье под симптоматическим названием “Демографические похождения физика”⁶: “И после овладения речью и письменностью человечество многие тысячи лет оставалось столь немногочисленным и разобщенным, что одни его группы не имели понятия о существовании других. Давно ли по историческим меркам европейцы и азиаты узнали о жителях Западного полушария? Как такое человечество могло быть единым информационным полем? Вряд ли Капица допускает, что песни бардов и рассказы стариков у семейного очага при отсутствии спутниковых ретрансляторов звучали на всю Ойкумену. А если бы и звучали, то на языке, непонятном для подавляющей части Ойкумены” (Шишков, 2005, с. 160).

Тем не менее картина высокодетерминированной технико-экономической, культурной и демографической динамики мира в период с 500 г. до н.э. по 1500 г. н.э. ни в коей степени не является случайной. Собственно говоря, она отражает динамику совершенно реальной системы, зародившейся в начале голоцена на Ближнем Востоке в непосредственной связи с начавшейся там аграрной (“неолитической”) революцией, постепенно охватившей весь мир. Вслед за А.Г. Франком (Frank, 1990, 1993; Frank, Gills, 1994) назовем эту систему Мир—Системой и подчеркнем, что на то, чтобы Мир—Система охватила весь мир, ушло много тысяч лет. И на протяжении большей части своего существования история Мир—Системы ни в коем случае не была тождественна “всемирной истории”.

Как было показано ранее в (Коротаев, Комарова, Халтурина, 2007; Коротаев, Малков, Халтурина, 2007), именно с развитием Мир—Системы связано наличие гиперболического тренда роста численности населения мира. Наличие гиперболического тренда свидетельствует о том, что большая часть соответствующей общности (а в последнем случае, напомним, речь идет о народонаселении мира) имела определенное системное единство, и существует достаточно данных для того, чтобы утверждать, что подобное системное единство в рассматриваемую эпоху реально наблюдалось. Действительно, авторы располагают достаточным объемом данных о систематическом распространении важнейших инноваций (доместичированных злаков, крупного и мелкого рогатого скота, лошадей, плуга, колеса, металлургии меди, бронзы, а в дальнейшем железа и т.д.) с Ближнего Востока по всей североафриканско-евразийской Ойкумене, начавшемся за много тысяч лет до нашей эры (Чубаров, 1991). В результате данных процессов эволюция обществ данного макрорегиона уже в это время не может рассматриваться как полностью независимая.

Замечание. Конечно, у нас не было бы оснований говорить о Мир—Системе, простирающейся от Атлантики до Тихого океана, даже в начале I тысячелетия н.э., если бы применялся критерий массовых товаров (“bulk-good” criterion), предложенный И. Валлерстайном (Wallerstein, 1974,

⁴ Здесь имеются в виду животные.

⁵ Здесь имеются в виду люди.

⁶ Считаем это возражение совершенно обоснованным, так как авторы гиперболических моделей роста населения Земли до сих пор не дали на него аргументированного ответа. И речь здесь идет не только о С. Капице, но и о фон Ферстере и его коллегах, М. Кремере и других авторах математических моделей гиперболического роста народонаселения Земли (Подлазов, 2000, 2001, 2002; Cohen, 1995; Hoerner, 1975; Johansen, Sornette, 2001; Tsirel, 2004).

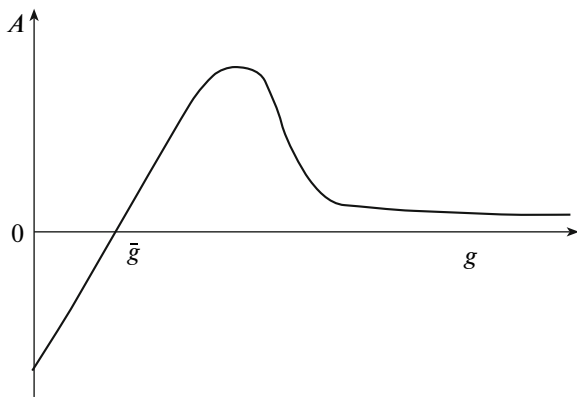


Рис. 6. Зависимость относительных темпов роста населения от доходов по М. Кремеру, где A — прирост населения, т.е. разница между рождаемостью и смертностью как функция от g ; g — доход на душу населения, который в модели рассчитывается как $g = G/N$, т.е. общий продукт G , полученный по формуле (6) и поделенный между N членами популяции.

1987, 2004), потому что в это время какое-либо движение массовых товаров, например между Китаем и Европой, полностью отсутствовало (и мы согласны с И. Валлерстайном в том, что в это время в Европе китайский шелк являлся предметом роскоши, а никак не массовым товаром). Однако Мир—Система I в. н.э. (и даже I тысячелетия до н.э.) может вполне быть классифицирована именно как Мир—Система, если применить здесь более мягкий критерий информационной сети, предложенный в (Chase-Dunn, Hall, 1997; Чешков, 1999). Подчеркнем, что, как было показано в (Коротаев, Комарова, Халтурина, 2007; Коротаев, Малков, Халтурина, 2007), наличие информационной сети, охватывающей всю Мир—Систему, служит достаточным условием, которое делает возможным рассматривать Мир—Систему как единое развивающееся целое. Да, в I тысячелетии до н.э. какие-либо крупные товаропотоки между Тихоокеанским и Атлантическим побережьями Евразии были принципиально невозможны. Однако Мир—Система достигла к этому времени та-

кого уровня интеграции, который делал возможным распространение по всей Мир—Системе принципиально важных технологий за промежутки времени, заметно меньшие тысячелетия.

Другое важное обстоятельство состоит в том, что даже в I в. н.э. Мир—Система охватывала менее половины всей обитаемой земной суши. Однако важнее другое обстоятельство: уже к началу I в. н.э. более 90% населения мира жило именно в тех регионах Земли, которые были интегральными частями Мир—Системы (Средиземноморье, Средний Восток, Южная, Центральная и Восточная Азия) (Durand, 1977, p. 256). За несколько тысячелетий перед этим мы имеем дело с поясом культур, также с удивительно сходным уровнем и характером культурной сложности, протянувшимся от Балкан вплоть до границ долины Инда (Peregrine, Ember, 2001; Peregrine, 2003)⁷. Таким образом, уже несколько тысяч лет динамика населения мира отражает, прежде всего, именно динамику населения Мир—Системы, что делает возможным ее описание при помощи математических макромоделей. Конечно, бурное развитие технологии в Мир—Системе вплоть до XIX в. никак не сказывалось, например, на популяционной динамике численности населения Тасмании, много тысяч лет колебавшейся где-то на уровне 4000 чел. (Diamond, 1999). Но кривая динамики общей численности населения мира отражает, прежде всего, популяционную динамику Мир—Системы, а не тех частей человечества, которые в нее не входили.

КОМПАКТНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОГО И ДЕМОГРАФИЧЕСКОГО РОСТА МИР—СИСТЕМЫ

Хотя модель М. Кремера дает удовлетворительное объяснение того, как технико-экономическое развитие Мир—Системы в сочетании с мальтузианской демографической динамикой приводит к гиперболическому росту населения мира, Кремер не специфицировал свою модель до такой степени, чтобы она могла описать экономическое развитие Мир—Системы таким образом, чтобы оно поддавалось эмпирической верификации⁸.

Представляется возможным предложить исключительно простую математическую модель, отражающую как демографическое, так и экономическое развитие Мир—Системы вплоть до 1973 г. на основе тех же самых допущений, которые уже были сделаны самим М. Кремером.

⁷ Подчеркнем, что и в том, и в другом случае население соответствующих поясов включало большую часть населения мира соответствующей эпохи.

⁸ Собственно говоря, подобная операционализация не имела особого смысла в то время, когда М. Кремер сдавал свою статью в печать, так как в начале 1990-х годов долгосрочных историко-эмпирических данных по динамике мирового ВВП еще не существовало.

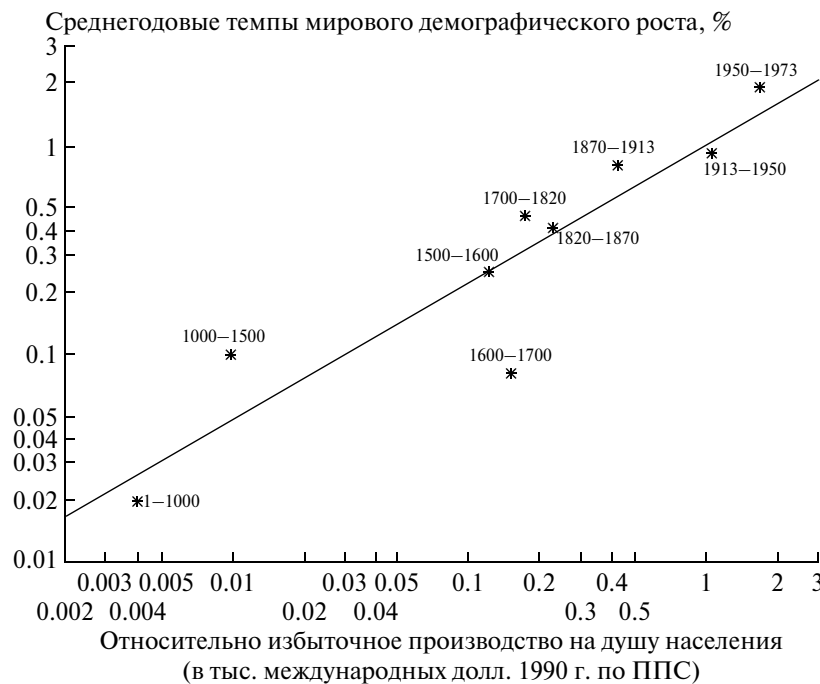


Рис. 7. Корреляция между производством избыточного продукта на душу населения и относительными темпами роста населения мира для 1–1973 гг. (диаграмма рассеивания с наложенной линией регрессии), $R = 0.961$, $\alpha = 0.00004$. Источник данных (Maddison, 2001, с. 241, 264); данные по производству мирового ВВП на душу населения на 1000 г. скорректированы по (Мельянцев, 1996, 2003, 2004; Meliantsev, 2004).

М. Кремер предполагает наличие следующего соотношения между ВВП на душу населения и темпами демографического роста (рис. 6). Подобное соотношение подразумевает, что при низких значениях ВВП на душу населения влияние этой переменной на темпы демографического роста может быть задано уравнением:

$$\frac{dN}{dt} = aSN, \quad (7)$$

где N — население Земли; S — относительно избыточный продукт, производимый на одного человека сверх продукта m , минимально необходимого для простого (с нулевой скоростью роста) воспроизводства населения.

Эта предельно простая модель генерирует определенное число гипотез, вполне поддающихся эмпирической проверке. Например, согласно этой модели относительные темпы роста населения мира ($r_N = (dN/dt)/N$) должны быть линейно пропорциональны среднему душевому производству избыточного продукта:

$$r_N = aS.$$

Эмпирическая проверка данной гипотезы подтвердила, что соответствующая корреляция оказалась в предсказанном направлении очень сильной ($R = 0.961$) и, вне всякого сомнения, статистически значимой ($\alpha = 0.00004$) (см. рис. 7, величины S подсчитаны исходя из оценки m в 440 международных долл. 1990 г. в ППС; обоснование этой оценки можно найти в (Коротаев, Малков, Халтурина, 2007)).

Как утверждает М. Кремер (Kremer, 1993, р. 694), сочетание уравнений (4) и (7) “при отсутствии технологического роста (т.е. при $T = \text{const}$) описывает чисто мальтузианскую систему, генерируя динамику, сходную с логистическими кривыми, которые биологи используют для отображения популяционной динамики животных” (сюда следует добавить еще и клиометристов, моделирующих доиндустриальные политико-демографические циклы (см., например (Нефедов, 2002, 2003; Nefedov, 2004; Turchin, 2003; Малков, Селунская, Сергеев, 2005; Турчин, 2007; Коротаев, Комарова, Халтурина, 2007))).

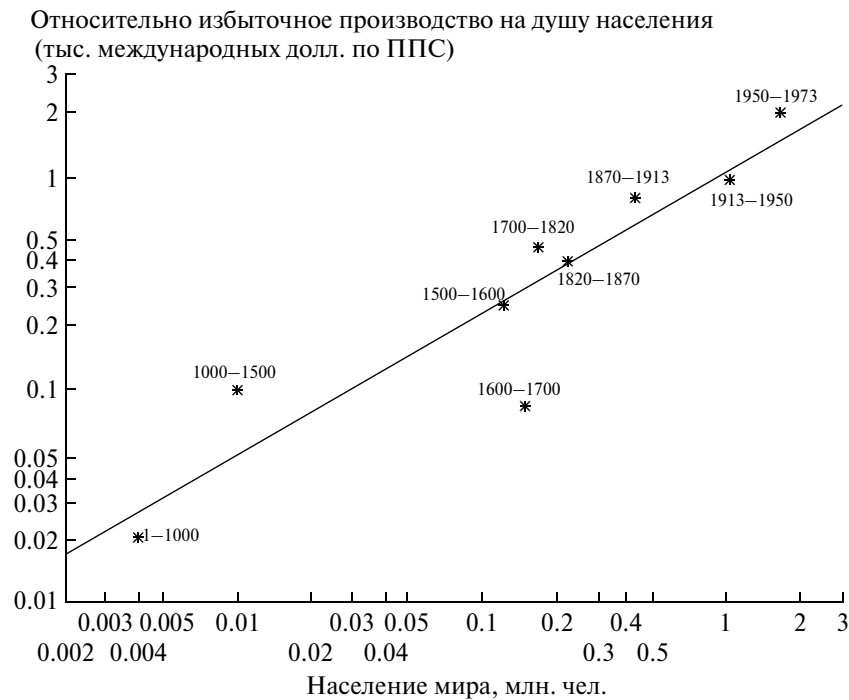


Рис. 8. Корреляция между численностью населения мира и производством относительно избыточного ВВП на душу населения (1820–1958 гг.), $R^2 > 0.996$, $\alpha < 10^{-12}$.

При постоянных относительных темпах технологического роста

$$\dot{T}/T = r_T = \text{const}, \quad (8)$$

в рамках этой модели (объединяющей уравнения (4) и (8)) будем асимптотически иметь как постоянные темпы относительного роста населения ($\dot{N}/N = r_N = \text{const}$ и, таким образом, население будет в тенденции расти экспоненциально), так и постоянный S . Отметим, что чем больше значение r_T , тем больше значение S (аналитическое доказательство данного положения можно найти в (Korotayev, Malkov, Khalitourina, 2006, p. 48–50)).

Таким образом, в системе (4), (7), (8) при постоянных темпах относительного технологического роста r_T размер относительно избыточного продукта на душу населения S будет стремиться к некой константе, и чем выше берутся относительные темпы технологического роста r_T , тем выше получается значение этой константы.

Таким образом, в растущих мальтузианских системах S может рассматриваться как индикатор темпов технологического роста. Действительно, в мальтузианских системах при отсутствии технологического роста демографический рост ведет к тому, что $S \rightarrow 0$, в то время как систематическое производство S оказывается в долгосрочной перспективе возможным только при условии систематического технологического роста⁹.

⁹ Подчеркнем, что речь идет именно о долгосрочной перспективе. А вот в краткосрочной перспективе необходимо иметь в виду, что вполне регулярное производство S также наблюдалось и на фазах восстановительного роста доиндустриальных политико-демографических циклов (следовавших за фазами политико-демографического коллапса, в результате которого выжившая часть населения оказывалась обильно обеспеченной необходимыми ресурсами; собственно говоря, без регулярного производства S постколлапсные восстановления и не могли бы происходить). Однако после завершения фаз восстановительного роста дальнейшее производство значительных объемов S (а значит, и сохранение заметных темпов демографического роста) было возможно только при условии заметных темпов технологического роста (Коротаев, Комарова, Халтурина, 2007). Отметим, что S , производимый на начальных (восстановительных) фазах политико-демографических циклов, ни в какой степени не может объяснить тысячелетний тренд роста производства S , который наблюдался на протяжении многих веков еще до того, как большая часть населения мира перешла во вторую фазу демографического перехода (Maddison, 2001), который был обусловлен ускорением темпов именно технологического роста.

Теперь заменим $\dot{T}/T = r_T = \text{const}$ кремеровским уравнением технологического роста (6) и проанализируем полученную модель:

$$\begin{cases} G = aTN^\alpha, \\ dN/dt = bSN, \\ dT/dt = cNT. \end{cases}$$

В этой модели S может быть аппроксимировано как kr_T . Однако r_T по определению прямо пропорционально N . Таким образом, эта модель генерирует не вполне самоочевидную (если только не сказать не вполне правдоподобную) предикцию — что на протяжении мальтузианско-кузнецовской части человеческой истории тренд мирового производства относительно избыточного ВВП на душу населения должен быть прямо пропорционален численности населения мира. Данная гипотеза, конечно же, заслуживает эмпирической проверки. Отметим, что эмпирическая проверка подтвердила обоснованность этой гипотезы.

Проверка, сделанная авторами для всего отрезка человеческой истории, для которого в нашем распоряжении имеются оценки и численности населения мира и мирового производства ВВП (т.е. для 1–2002 гг.¹⁰), дала следующие результаты: $R^2 = 0.98$, $\alpha < 10^{-16}$, в то время как для периода с наиболее ярко выраженной мальтузианско-кузнецовской динамикой (1820–1958 гг.) положительная корреляция между двумя рассматриваемыми переменными приближается к своему максимальному значению (рис. 8).

Между прочим, так как в мальтузианско-кузнецовских системах S может быть аппроксимирован как kN , уравнение (7) может быть аппроксимировано как $dN/dt \sim k_1 N^2$, или $dN/dt \sim N^2/C$. Таким образом, уравнение фон Ферстера–Капицы (2) оказывается одной из возможных форм аппроксимированной записи популяционной динамики в рассматриваемой модели.

Итак, были получены следующие предварительные результаты:

$$r_T = k_2 N.$$

Таким образом,

$$dS/dt \sim kr_T/dt = k_3 dN/dt.$$

Это означает, что для мальтузианско-кузнецовской части человеческой истории dS/dt может быть аппроксимирована как $k_4 dN/dt$.

Но так как dN/dt в исходной модели равняется aSN , это, конечно, заставляет предполагать, что для соответствующей части человеческой истории как экономическая, так и демографическая динамика Мир–Системы может быть аппроксимирована при помощи следующей неожиданно простой математической модели¹¹:

$$\begin{aligned} dN/dt &= aSN, \\ dS/dt &= bNS, \end{aligned} \quad (9)$$

где N — население Земли, S — относительно избыточный продукт, производимый при данном уровне технологического развития Мир–Системы на одного человека. При этом для подсчета мирового ВВП (G) может быть использовано уравнение:

$$G = mN + SN,$$

где m — количество произведенного продукта на одного человека, минимально необходимое для простого (с нулевой скоростью роста) воспроизводства населения Мир–Системы.

¹⁰ Данные взяты из (Maddison, 2001; World Bank, 2005, the US Census Bureau, 2005).

¹¹ Данная модель отражает мальтузианско-кузнецовскую динамику только в динамически сбалансированном состоянии (когда наблюдаемая численность населения мира находится в сбалансированном соответствии наблюдаемому уровню технологического развития). Для описания ситуаций с N , диспропорционально низким или высоким по отношению к наблюдаемому уровню технологического развития (а значит, и с диспропорционально высоким или низким S), естественно, потребуется неаппроксимированный вариант модели (4), (7), (5). Отметим, что в подобных случаях N будет расти ускоренными темпами или падать до уровня динамического технико-демографического эквивилибрия, после чего траектория развития будет идти по модели (7), (9).

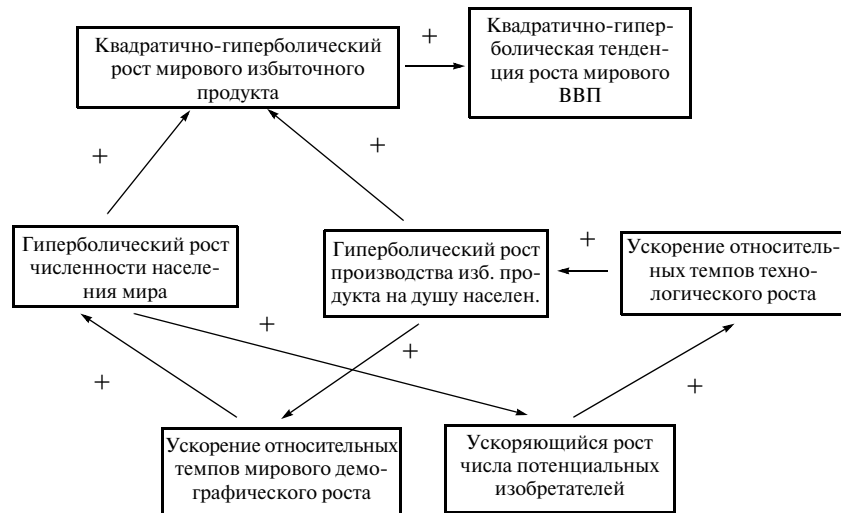


Рис. 9. Блок-схема генерирования квадратично-гиперболического роста мирового ВВП нелинейной положительной обратной связи между технологическим развитием и демографическим ростом.

Напомним, что выше мы говорили о квадратично-гиперболическом росте мирового ВВП совсем не метафорически. Действительно, как уже было убедительно показано фон Ферстером, фон Хернером и С. Капицей, рост населения мира вплоть до 1970-х годов прекрасно аппроксимируется уравнением (1). Так как, согласно предложенной нами модели, S может быть аппроксимировано как kN , его долгосрочная динамика может быть аппроксимирована уравнением:

$$S = kC/(t_0 - t).$$

Таким образом, долгосрочная динамика наиболее динамичной компоненты мирового ВВП — SN (мирового относительно избыточного продукта) — может быть аппроксимирована:

$$SN = kC^2/(t_0 - t)^2.$$

Это заставляет предполагать, что долгосрочная динамика мирового ВВП вплоть до начала 1970-х годов должна лучше аппроксимироваться не простой, а квадратичной гиперболой. И как было показано нами ранее (см. рис. 1 и комментарии к нему), данная аппроксимация работает исключительно эффективно.

В заключение необходимо дать следующий комментарий. Когда фон Ферстер и его коллеги давали своей статье (von Foerster, Mora, Amiot, 1960) знаменитое название “Судный день: пятница, 13 ноября 2026 г.”, они вовсе не имели в виду, что население Земли в этот день действительно может стать бесконечным (хотя “эсхатологические” выводы из гиперболических моделей роста Мир—Система без каких-либо достаточных на то оснований делаются до сих пор (например (Johansen, Sornette, 2001))). Из этой статьи, скорее, вытекал прямо противоположный прогноз — наблюдавшийся вплоть до 1960 г. на протяжении многих веков гиперболический рост мирового населения должен испытать в самые ближайшие годы радикальную трансформацию и смениться на принципиально иной тип демографической макродинамики. Отметим, что этот прогноз стал блестяще оправдываться всего лишь через несколько лет после публикации статьи фон Ферстера и его коллег (Коротаев, Малков, Халтурина, 2007, с. 14–22). Мир—Система начала свой выход из режима с обострением. Об основных механизмах этого выхода из режима гиперболического роста можно догадаться уже по рис. 6. Действительно, достаточно жесткая положительная корреляция между производством ВВП на душу населения и темпами демографического роста наблюдается только на участке до 2500 долл./чел./год (в международных долларах 1990 г., в ППС) (Коротаев, Малков, Халтурина, 2007, с. 45–50). При достижении этого уровня смертность, как правило, приближается к своим минимальным значениям и с дальнейшим экономическим ростом даже начинается тенденция ее некоторого увеличения (в результате старения населения). Вместе с тем дальнейший экономический рост ведет к усилению действия таких мощных факторов снижения рождаемости, как грамотность (в особенности женщин), развитие системы социального обеспечения, совершенствование средств и методов планирования семьи, их растущая доступность и т.п. В результате на участке 2500–3500 долл./чел./год корреляция между показате-

лями душевого ВВП и темпами роста населения падает до нуля, а с дальнейшим экономическим ростом становится отрицательной. Обоснование математической модели из трех дифференциальных уравнений, описывающей как развитие Мир–Системы в режиме с обострением, так и ее выход из этого режима, дается в нашей монографии (Коротаев, Малков, Халтурина, 2007).

Таким образом, вплоть до 1970-х годов гиперболический рост численности населения мира сопровождался квадратично-гиперболическим ростом мирового ВВП, что совпадает с результатами, полученными по нашей математической модели. Гиперболический рост численности населения мира и квадратично-гиперболический рост мирового ВВП представляют собой два теснейшим образом связанных процесса, две стороны одной медали, два измерения единого процесса развития Мир–Системы, поддерживаемого механизмом нелинейной положительной обратной связи между технологическим развитием и демографическим ростом (рис. 9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Капица С.П.** (1992): Математическая модель роста населения мира // *Математическое моделирование*. Т. 4. № 6.
- Капица С.П.** (1996): Феноменологическая теория роста населения Земли // *Успехи физических наук*. Т. 166. № 1.
- Капица С.П.** (1999): Сколько людей жило, живет и будет жить на земле. М.: Наука.
- Князева Е.Н., Курдюмов С.П.** (2005): Основания синергетики. М.: КомКнига (УРСС).
- Коротаев А.В., Комарова Н.Л., Халтурина Д.А.** (2007): Законы истории. Вековые циклы и тысячелетние тренды. Демография. Экономика. Войны. М.: КомКнига (УРСС).
- Коротаев А.В., Малков А.С., Халтурина Д.А.** (2007): Законы истории. Математическое моделирование развития Мир–Системы. Демография. Экономика. Культура. М.: КомКнига (УРСС).
- Курдюмов С.П.** (1999): Режимы с обострением. Эволюция идеи: Законы коэволюции сложных структур. М.: Наука.
- Малков С.Ю., Селунская Н.Б., Сергеев А.В.** (2005): Социально-экономические и демографические процессы в аграрном обществе как объект математического моделирования. История и синергетика: Математическое моделирование социальной динамики. М.: УРСС.
- Мальтус Т.** (1993): Опыт о законе народонаселения. Сер. “Шедевры мировой экономической мысли”. Т. 4. Петрозаводск: Петроком.
- Мельяницев В.А.** (1996): Восток и Запад во втором тысячелетии. М.: МГУ.
- Мельяницев В.А.** (2003): Три века российского экономического роста // *Общественные науки и современность*. № 5.
- Мельяницев В.А.** (2004): Генезис современного (интенсивного) экономического роста. М.: Гуманитарий.
- Нефедов С.А.** (2002): О теории демографических циклов // *Экономическая история*. Т. 8.
- Нефедов С.А.** (2003): Теория демографических циклов и социальная эволюция древних и средневековых обществ Востока // *Восток*. № 3.
- Подлазов А.В.** (2000): Теоретическая демография как основа математической истории. М.: ИПМ РАН.
- Подлазов А.В.** (2001): Основное уравнение теоретической демографии и модель глобального демографического перехода. М.: ИПМ РАН.
- Подлазов А.В.** (2002): Теоретическая демография. Модели роста народонаселения и глобального демографического перехода. Новое в синергетике. Взгляд в третье тысячелетие. М.: Наука.
- Турчин П.В.** (2007): Историческая динамика. М.: КомКнига (УРСС).
- Чешков М.А.** (1999): Глобальный контекст постсоветской России: Очерки теории и методологии мироцелостности. М.: МОНФ.
- Чубаров В.В.** (1991): Ближневосточный локомотив: темпы развития техники и технологии в древнем мире. Архаическое общество: узловые проблемы социологии развития. Т. 1. М.: Ин-т истории СССР АН СССР.
- Шишков Ю.В.** (2005): Демографические похождения физика // *Общественные науки и современность*. № 2.
- Aghion P., Howitt P.** (1992): A Model of Growth through Creative Destruction // *Econometrica*. Vol. 60.
- Aghion P., Howitt P.** (1998): Endogenous Growth Theory. Cambridge: MIT Press.
- Artzrouni M., Komlos J.** (1985): Population Growth through History and the Escape from Malthusian Trap: A Homeostatic Simulation Model // *Genus*. Vol. 41. № 3–4.
- Boserup E.** (1965): The Conditions for Agricultural Growth: The Economics of Agrarian Change under Population Pressure. Chicago: Aldine.
- Chase-Dunn C., Hall T.** (1997): Rise and Demise: Comparing World-Systems. Boulder: Westview Press.
- Cohen J.E.** (1995): Population Growth and Earth's Carrying Capacity // *Science*. Vol. 269. № 5222.
- Diamond J.** (1999): Guns, Germs, and Steel: The Fates of Human Societies. N.Y.: Norton.
- Durand J.D.** (1977): Historical Estimates of World Population: An Evaluation // *Population and Development Rev.* Vol. 3. № 3.

- Foerster H. von, Mora P., Amiot L.** (1960): Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026 // *Science*. Vol. 132.
- Frank A.G.** (1990): A Theoretical Introduction to 5.000 Years of World System History // *Review*. Vol. 13. № 2.
- Frank A.G.** (1993): The Bronze Age World System and its Cycles // *Current Anthropology*. Vol. 34.
- Frank A.G., Gills B.** (1994): The World System: 500 or 5000 Years? L.: Routledge.
- Grossman G., Helpman E.** (1991): Innovation and Growth in the Global Economy. Cambridge: MIT Press.
- Hoerner S.J. von** (1975): Population Explosion and Interstellar Expansion // *J. of the British Interplanetary Society*. Vol. 28.
- Johansen A., Sornette D.** (2001): Finite-time Singularity in the Dynamics of the World Population and Economic Indices // *Physica A*. Vol. 294. № 3–4.
- Jones Ch.I.** (1995): R&D-Based Models of Economic Growth // *The J. of Polit. Econ.* Vol. 103.
- Jones Ch.I.** (2003): Population and Ideas: A Theory of Endogenous Growth. Knowledge, Information, and Expectations in Modern Macroeconomics. In “Knowledge, Information, and Expectations in Modern Macroeconomics”. Princeton: Princeton University Press.
- Jones Ch.I.** (2005): The Shape of Production Functions and the Direction of Technical Change // *The Quarterly J. of Econ.* Vol. 120.
- Komlos J., Nefedov S.** (2002): A Compact Macromodel of Pre-Industrial Population Growth // *Historical Methods*. Vol. 35.
- Korotayev A., Malkov A., Khaltourina D.** (2006): Introduction to Social Macrodynamics: Compact Macromodels of the World System Growth. M.: KomKniga (URSS).
- Kremer M.** (1993): Population Growth and Technological Change: One Million B.C. to 1990 // *The Quarterly J. of Econ.* Vol. 108.
- Kuznets S.** (1960): Population Change and Aggregate Output. Demographic and Economic Change in Developed Countries. Princeton: Princeton University Press.
- Maddison A.** (2001): Monitoring the World Economy: A Millennial Perspective. Paris: OECD.
- Malthus T.** (1778): Population: The First Essay. Ann Arbor: University of Michigan Press.
- Meliantsev V.A.** (2004): Russia's Comparative Economic Development in the Long Run // *Social Evolution & History*. Vol. 3. № 1.
- Nefedov S.A.** (2004): A Model of Demographic Cycles in Traditional Societies: The Case of Ancient China // *Social Evolution & History*. Vol. 3 № 1.
- Peregrine P.** (2003): Atlas of Cultural Evolution // *World Cultures*. Vol. 14.
- Peregrine P., Ember M.** (2001): Encyclopaedia of Prehistory. N.Y.: Kluwer.
- Simon J.** (1977): The Economics of Population Growth. Princeton: Princeton University Press.
- Simon J.** (1981): The Ultimate Resource. Princeton: Princeton University Press.
- Simon J.** (2000): The Great Breakthrough and its Cause. Ann Arbor: University of Michigan Press.
- Tsirel S.V.** (2004): On the Possible Reasons for the Hyperexponential Growth of the Earth Population. Mathematical Modelling of Social and Economic Dynamics. M.: Russian State Social University.
- Turchin P.** (2003): Historical Dynamics: Why States Rise and Fall. Princeton: Princeton University Press.
- U.S. Bureau of the Census. (2005): U.S. Bureau of the Census. World Population Information. <http://www.census.gov/ipc/www/world.html>.
- Wallerstein I.** (1974): The Modern World-System. Vol. 1. Capitalist Agriculture and the Origin of the European World-Economy in the Sixteen Century. N.Y.: Academic Press.
- Wallerstein I.** (1987): World-Systems Analysis. Social Theory Today. Cambridge: Polity Press.
- Wallerstein I.** (2004): World-Systems Analysis: An Introduction. Durham: Duke University Press.
- World Bank (2005): World Development Indicators. Washington: World Bank.

Поступила в редакцию
20.03.2006 г.

A Compact Mathematical Model of the Economic and Demographic Development of the World System (1–1973 CE)

A. V. Korotayev, A. S. Malkov, D. A. Khaltourina

Extremely simple mathematical models are developed to account for 99.2–99.91% variation of economic and demographic macrodynamics of the World System during the major part of 2000 recent years of its history.