ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2012, том 48, № 1, с. 67–79

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

СТЕПЕННЫЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ*

© 2012 г. И.С. Светуньков, С.Г. Светуньков

(Санкт-Петербург)

Рассматриваются свойства новой экономико-математической модели, использующей элементы теории функций комплексных переменных, а также излагается подход по применению комплексных переменных в моделировании экономки на примере степенной производственной функции. Проводится сравнение результатов моделирования реальных экономических объектов предлагаемой моделью и производственной функцией Кобба–Дугласа. Показано, что использование комплексных переменных в экономике расширяет инструментальную базу экономико-математического моделирования.

Ключевые слова: производственная функция, комплекснозначная функция, метод наименьших квадратов, эффективность производства, валовая прибыль, издержки производства, труд и капитал.

Аппарат теории функций комплексных переменных уникален и активно применяется во многих областях науки: в теоретической физике, механике, электротехнике, гидродинамике и др. Но в экономике этот аппарат встречается очень редко – в основном комплексные переменные употребляются в области экономико-математического моделирования в тех случаях, когда возникает необходимость вычисления корней характеристических уравнений (Колемаев, 2005) или в теории функций комплексного переменного для прогнозирования экономической динамики (преобразования Лорана) (Чернышев, 2003; Семенычев, 2006). На наш взгляд, область применения аппарата теории функций комплексного переменного в экономике значительно шире и охватывает практически все направления использования экономико-математических методов. Наиболее ярко особенности и преимущества этого аппарата по сравнению с методами и моделями действительных переменных можно продемонстрировать на примере производственных функций.

Из всего многообразия возможных моделей производственных функций комплексных переменных рассмотрим модель степенной производственной функции комплексных переменных с действительными коэффициентами, которая, с одной стороны, является достаточно простой моделью, а с другой стороны, обладает яркими свойствами, аналогичными реально протекающим производственным процессам.

Производственную функцию комплексных переменных в общем виде можно представить в виде зависимости комплексного производственного результата от комплексной переменной производственных ресурсов $G + iC = f(K + iL)$. Для степенной производственной функции с действительными коэффициентами зависимость примет вид:

$$G + iC = a(K + iL)^b, \qquad (1)$$

где G и C – некоторые выходные переменные, представленные действительными числами и характеризующими производственный результат; K и L – входные переменные, также действительные числа, характеризующие затраты взаимозаменяемых производственных ресурсов; i – мнимая единица, $i^2 = -1$; a и b – действительные коэффициенты функции.

Если сравнить эту модель с моделями производственных функций действительных переменных, например с неоклассической производственной функцией, легко убедиться в преимуществе

* Выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 07-06-00151).

модели (1). Оно заключается в том, что моделируется поведение сразу двух производственных результатов, а не одной.

В целях изучения свойств производственной функции (1) удобно рассматривать ее в экспоненциальной форме:

$$\rho e^{i\theta} = a(re^{i\varphi})^b, \tag{2}$$

где ρ – модуль комплексной переменной производственного результата; θ – ее полярный угол; r – модуль комплексной переменной производственных ресурсов; φ – полярный угол этой переменной.

Для того чтобы использовать аппарат теории функций комплексных переменных при объединении двух экономических показателей в одну комплексную переменную, должны выполняться два условия: эти показатели должны быть двумя характеристиками одного процесса или явления (т.е. отражать разные стороны этого явления) и иметь одинаковую размерность.

Эти два условия выполняются, например, когда затраты капитала K и затраты труда L приведены, как это принято в теории производственных функций, к безразмерным величинам или измерены в денежных единицах. Исследования модели (1) на условных примерах показали, что при росте K и уменьшении L действительная часть производственного результата G увеличивается, а мнимая часть C уменьшается. В реальных производственных системах так ведут себя соответственно валовая прибыль и суммарные издержки производства. Очевидно, что если рассматривать комплексный производственный результат с помощью этих двух составляющих, то в сумме они дают доход предприятия $G + C = Q$.

Таким образом, с помощью степенной производственной функции комплексных переменных (1) при изменении производственных ресурсов K и L моделируется поведение сразу трех показателей результатов производства: валовой прибыли, суммарных издержек и валового дохода. Помимо этого следует обратить внимание на то, что арктангенс полярного угла производственного результата модели (1) представляет собой рентабельность производства (G/C), а арктангенс полярного угла комплексной переменной ресурсов – фондовооруженность труда (K/L). Поэтому с позиций экономического содержания степенная модель производственной функции комплексных переменных (1) весьма насыщенна, что делает ее интересным инструментом для экономического анализа.

Степенная комплекснозначная функция с действительными коэффициентами представляет собой одну из элементарных функций комплексных переменных, конформное отображение которой делает ее привлекательной для экономико-математического моделирования.

Применительно к нашей задаче отображения комплексной переменной производственных ресурсов на комплексную плоскость производственных результатов существуют ограничения, вызванные экономической сутью переменных. Комплексные переменные производственных ресурсов лежат в первом квадранте, поскольку $K > 0$ и $L > 0$, т.е. аргумент φ комплексной переменной ресурсов меняется в пределах от 0 до $\pi/2$. Если он равен нулю, это означает, что для производства не привлекается ни одной единицы трудовых ресурсов. Если же он становится равным $\pi/2$, означает, что для производства привлекаются только трудовые ресурсы, а капитальные ресурсы равны нулю. Очевидно, что в реальности эти случаи встречаться не могут и оси координат мы должны исключить из области определения задачи.

Комплексные переменные производственных результатов лежат на комплексной плоскости в более широких пределах, определяемых полярным углом, находящимся в пределах от 0 до $3\pi/4$, т.е. в первом и частично во втором квадрантах. Если полярный угол θ комплексной переменной производственных результатов равен нулю, это означает, что издержки производства равны нулю, а валовая прибыль максимальна. Вряд ли можно вспомнить подобные ситуации в реальной экономической практике, поэтому ограничение в этой части следует записать как строгое неравенство. Поскольку во втором квадранте комплексной плоскости производственных результатов валовая прибыль, откладываемая по оси действительных чисел, становится отрицательной, то предприятие работает в убыток – отрицательная валовая прибыль численно равна валовому убытку предприятия. Отрицательная валовая прибыль (убыток) по своему экономическому смыслу не может быть выше издержек производства $-G \le C$. В случае, когда ни одна единица произведенного товара нереализована, валовая прибыль G численно равна сумме понесенных на производство затрат C, а по знаку становится отрицательной. Тогда полярный угол производственных результатов становится равным $3\pi/4$. Случай, когда $G = C$ является редким, но все же возможным явлением хозяйственной практики.

Поэтому любая модель производственной функции комплексных переменных, в том числе и степенная, должна быть дополнена условиями, налагаемыми на полярные углы комплексных переменных:

$$0 < \varphi < \pi/2, \quad 0 < \theta \leq 3\pi/4. \tag{3}$$

Однако в силу периодичности полярных углов более полно с позиций теории функций комплексного переменного это условие должно выглядеть так:

$$2\pi k < \varphi < 2\pi k + \pi/2, \quad 2\pi k < \theta \leq 2\pi k + 3\pi/4.$$

Из всего множества чисел k в силу экономического смысла переменных будем использовать $k = 0$.

По экономическому смыслу производственных функций степенная производственная функция комплексных переменных должна быть однолистной. Это означает, что показатель степени b должен быть ограничен так, чтобы крайнему допустимому значению полярного угла производственных ресурсов φ соответствовало крайнее допустимое значение полярного угла производственных результатов θ. Так как для рассматриваемой функции $\theta=b\varphi$, то показатель степени должен удовлетворять условию:

$$0 < b\varphi \leq 3\pi/4. \tag{4}$$

Если показатель степени будет отрицательным, т.е. $b < 0$, то любое увеличение производственных ресурсов неминуемо приводит к уменьшению производственных результатов, и наоборот, – уменьшение трудовых и капитальных ресурсов приводит к увеличению результатов производства. При этом полярный угол производственных результатов становится отрицательным, что означает отрицательность издержек производства – ситуация в экономике невозможная. Поэтому мы рассматриваем только функции с положительными показателями степени.

Для степенной функции с действительными коэффициентами, используемой в качестве модели производственных процессов, рост радиуса и полярного угла комплексной переменной производственных ресурсов (трудовые ресурсы растут быстрее, чем капитал) будет означать увеличение производственных результатов с опережающим ростом издержек производства над валовой прибылью.

Если рассмотреть обратный экономический процесс – капитал растет быстрее, чем трудовые ресурсы (что на комплексной плоскости производственных ресурсов означает уменьшение полярного угла с одновременным ростом радиуса переменной), – то будем иметь вариант увеличения производственных результатов с опережающим ростом валовой прибыли над издержками производства, т.е. конформное отображение степенной комплекснозначной функции с действительными коэффициентами соответствует тому, как изменение рассматриваемых производственных ресурсов влияет на производственные результаты.

Производственную функцию (1) можно представить в тригонометрической форме:

$$G + iC = a(\sqrt{K^2 + L^2})^b \{\cos(b\arg(K + iL)) + i\sin(b\arg(K + iL))\}. \tag{5}$$

Это позволяет нам вывести две простые формулы для нахождения G и C:

$$G = a(\sqrt{K^2 + L^2})^b \cos(b\arg(K + iL)), \tag{6}$$

$$C = a(\sqrt{K^2 + L^2})^b \sin(b(\arg(K + iL)). \tag{7}$$

Одним из примечательных свойств степенной производственной функции комплексных переменных с действительными коэффициентами является то, что для нахождения значений коэффициентов функции (1) достаточно иметь лишь одно наблюдение за производственным процессом, поскольку (6) и (7) представляют собой систему двух уравнений с двумя неизвестными a и b, найти значения которых можно используя формулы:

$$b = \frac{\arg(G+iC)}{\arg(K+iL)}, \tag{8}$$

$$a = \exp\left(\ln)\sqrt{G^2+C^2}) - \frac{\arg(G+iC)}{\arg(K+iL)}\ln(\sqrt{K^2+L^2})\right). \tag{9}$$

Как можно заметить из (8), коэффициент b характеризует отношение двух общеизвестных экономических показателей – рентабельность по себестоимости G/C и фондовооруженность труда K/L. Это обстоятельство дает возможность рассматривать показатель степени модели в качестве одной из аналитических характеристик предлагаемой модели.

Обозначим крайнее правое значение, которое может принимать коэффициент b для выполнения условия (4) как b_{NQ}:

$$b_{NQ} = \frac{3\pi}{4\arg(K+iL)}. \tag{10}$$

При $b = b_{NQ}$ доход организации становится равным нулю ($Q = G + C = 0$) за счет того, что в этой точке валовая прибыль отрицательна $G < 0$, т.е. характеризует убыток, который по своей величине равен издержкам производства $|G| = C$ (ни одна из произведенных единиц изделия не продается).

Рассматривая показатель степени b как переменную, лежащую в пределах $0 < b < b_{NQ}$, можно исследовать влияние этой переменной на производственные результаты при фиксированных затратах производственных ресурсов, например найти, при каких условиях достигается максимум валовой прибыли, максимум дохода или максимум издержек производства. Вычисляя первую производную функции (1) по переменной b, можно найти эти и некоторые другие условия:

1) прибыль G становится максимальной, когда

$$b = b_G = \operatorname{arctg}\left(\frac{\ln\sqrt{K^2+L^2}}{\arg(K+iL)}\right) / \arg(K+iL); \tag{11}$$

2) прибыль G равна издержкам C (т.е. рентабельность по себестоимости равна 100%)

$$b = b_{prof} = \pi/[4\arg(K + iL)]; \tag{12}$$

3) прибыль G равна нулю, когда

$$b = b_{NG} = \pi/[2\arg(K + iL)]; \tag{13}$$

4) доход Q становится максимальным при

$$b = b_Q = \left[\frac{3\pi}{4} - \operatorname{arctg}\left(\frac{\arg(K+iL)}{\ln\sqrt{K^2+L^2}}\right) - \pi l\right] / \arg(K+iL), \tag{14}$$

где $l = 1$, если $\sqrt{K^2+L^2} < 1$ и $l = 0$ во всех остальных случаях;

5) издержки C становятся максимальными при

$$b = b_C = \frac{\pi m - \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\arg(K+iL)}{\ln\sqrt{K^2+L^2}}\right)}{\arg(K+iL)}, \tag{15}$$

где $m = 0$, если $\sqrt{K^2+L^2} < 1$ и $m = 1$ во всех остальных случаях.

Можно выделить 13 зон и точек изменения показателя степени b, характеризующих разные варианты эффективности производства (см. рисунок):

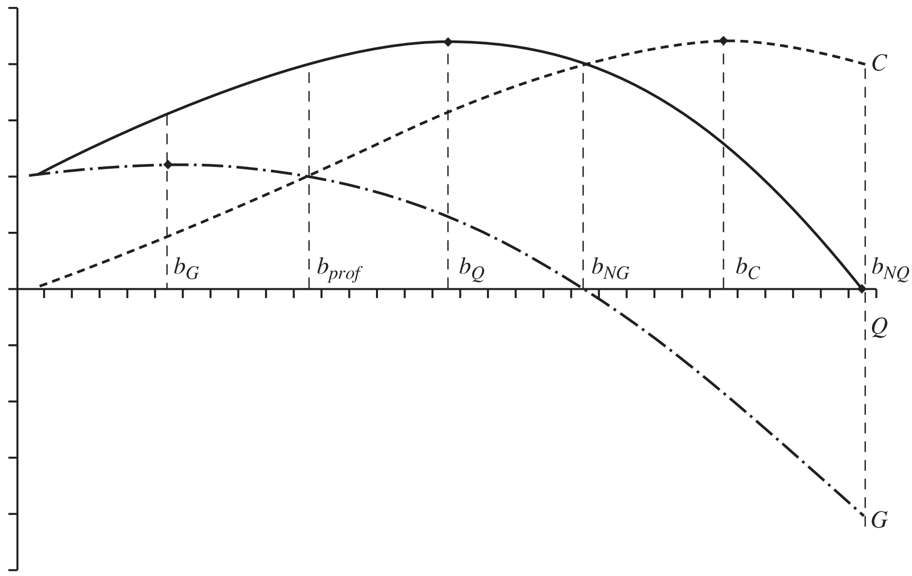

Рисунок. Объем производства Q, издержки C и валовая прибыль G при различных значениях показателя степени b модели (1)

1) $b \in [0; b_G)$ – зона высокорентабельного производства. При росте коэффициента b от нуля до b_G рост издержек производства C сопровождается еще большим ростом прибыли G. Рентабельность возрастает, доход Q также растет;

2) $b = b_G$ – *точка максимальной валовой прибыли* – в ней прибыль G достигает наибольшего значения;

3) $b \in (b_G; b_{prof})$ – производство эффективно, но прибыль G снижается, а издержки C растут; доход Q продолжает увеличиваться; рентабельность по себестоимости снижается;

4) $b = 1$ – точка, интересная тем, что в ней K не влияет на C, а L не влияет на G, как видно из формулы (1), $G = aK$, $C = aL$. При этом, как можно заметить, доход организации будет находиться по формуле $Q = a(K + L)$;

5) $b = b_{prof}$ – точка, в которой рентабельность по себестоимости равна единице;

6) $b \in (b_{prof}; b_Q)$ – прибыль G снижается, но доход организации Q все еще продолжает расти за счет более высокого роста издержек производства. Рентабельность меньше 100% и продолжает снижаться;

7) $b = b_Q$ – *точка максимального дохода* организации;

8) $b \in (b_Q; b_{NG})$ – производство все еще эффективно, несмотря на то что прибыль G продолжает уменьшаться, а издержки продолжают расти. Доход Q в этом отрезке начинает уменьшаться;

9) $b = b_{NG}$ – *точка бесприбыльного производства* (в экономической теории носит название “критическая точка”). Здесь $G = 0$, доход Q равен издержкам C;

10) $b \in (b_{NG}; b_C)$ – неэффективное убыточное производство. Прибыль отрицательна (убыток), но по модулю меньше издержек. В реальном производстве это может соответствовать ситуации, когда товар приходится продавать по цене ниже себестоимости, издержки C растут, доход Q уменьшается;

11) $b = b_C$ – *точка наибольших издержек* – это точка-экстремум, в которой издержки принимают наибольшее значение, прибыль отрицательная и по модулю меньше издержек, т.е. часть продукции реализуется, поэтому убыток по своей величине меньше затрат на производство;

12) $b \in (b_C; b_{NQ})$ – производство крайне неэффективно. Издержки, прибыль и доход снижаются, убыток возрастает;

13) $b = b_{NQ}$ – *точка отсутствия дохода* – точка прекращения производства, так как прибыль G по модулю равна издержкам C, а доход Q равен нулю (весь объем производства убыточен, не продается ни одной единицы продукции).

Поскольку экономика многообразна, то в реальной практике возможны варианты, отличающиеся от рассмотренного выше варианта, в частности:

1) когда $\sqrt{K^2+L^2} = 1$, $b_G = 0$. Если же $\sqrt{K^2+L^2} < 1$, то и b_G становится отрицательной, т.е. в данных условиях достичь максимума прибыли невозможно;

2) когда $\arg(K+iL) = \ln\sqrt{K^2+L^2}$, становятся равными друг другу значения точек $b_{NG} = b_Q$, $b_C = b_{NQ}$;

3) когда $\arg(K+iL) < \ln\sqrt{K^2+L^2}$, меняются местами точки b_{NG} с b_Q и b_C с b_{NQ}. Это означает, что максимальный доход достигается в убыток организации.

Эта дополнительная информация предоставляет исследователю возможность лучше понять характер производства.

Наличие точки максимума прибыли b_G позволяет получить уникальную характеристику предлагаемой степенной функции комплексных переменных, а именно – определить уровень эффективности производства, воспользовавшись расстоянием фактического значения b до точки b_G. Показатель, отражающий этот уровень, может быть найден по формуле:

$$S = 1 - \frac{b - b_G}{b_{NG} - b_G}\cdot \qquad (16)$$

Наши исследования на условных и фактических примерах показали, что этот коэффициент соответствует динамике рентабельности по себестоимости, причем чем выше рентабельность, тем выше значение показателя, и наоборот.

Как видно из (16), коэффициент S положителен, когда $b < b_{NG}$ (т.е. прибыль предприятия положительна). Коэффициент близок к нулю, если значение b близко к b_{NG} (т.е. прибыль близка к нулю). $S = 0$ только в том случае, когда $b = b_{NG}$, а $S = 1$ – когда значение показателя степени b совпадает со значением b_G. В зоне "высокорентабельного производства" (b лежит в границах (0; b_G)) коэффициент S становится больше единицы. Если $b > b_{NG}$, предлагаемый коэффициент становится отрицательным, что отражает убыточность производства. Коэффициент S для удобства восприятия также можно представить в процентном выражении, просто умножив его значение на 100%.

В табл. 1 приведены расчеты коэффициента S для экономики России по данным Госкомстата России за 1998–2003 гг. и отношение G/C как отражение средней по стране рентабельности.

Как видно из данных, приведенных в табл. 1, коэффициент S действительно может использоваться как одна из характеристик эффективности производства, поскольку в определенной степени он отражает среднюю рентабельность производства (коэффициент парной корреляции между S и G/C на этом множестве значений равен 0,71).

Таблица 1. Результаты расчета уровня эффективности экономики России

Годы	1998	1999	2000	2001	2002	2003
S, %	8,3	20,7	23,4	20,4	17,8	18,8
G/C, %	12,7	25,5	24,7	18,5	14,4	13,5

Предлагаемая степенная производственная функция комплексных переменных (1) обладает, кроме отмеченных особенностей, еще одним важным преимуществом по сравнению с производственными функциями действительных переменных – используя ее можно вывести *обратную функцию*. По определению построение обратной функции – это вывод такой зависимости

$x = F^{-1}(y)$, при которой выполняется равенство $y = F(x)$. Функцию вида $K + iL = F^{-1}(G + iC)$ будем называть *обратной производственной функцией*. Выведем ее, а также формулы для нахождения K и L для функции (1). Для этого представим левую часть равенства (1) в экспоненциальной форме:

$$\sqrt{G^2+C^2}\,\mathrm{e}^{i\arg(G+iC)} = a(K+iL)^b. \tag{17}$$

Проведя элементарные преобразования, получим обратную производственную функцию:

$$K+iL =))\sqrt{G^2+C^2})/a)^{1/b}\,\mathrm{e}^{i\arg(G+iC)/b}. \tag{18}$$

Если правую часть функции (18) представить в тригонометрической форме, то получим равенство

$$K+iL=\left[(\sqrt{G^2+C^2})/a\right]^{1/b}[\cos((\arg(G+iC))/b)+i\sin((\arg(G+iC))/b)], \tag{19}$$

из которого следует, что

$$K=[(\sqrt{G^2+C^2})/a]^{1/b}\cos((\arg(G+iC))/b), \tag{20}$$

$$L=[(\sqrt{G^2+C^2})/a]^{1/b}\sin(\cos((\arg(G+iC))/b)). \tag{21}$$

Формулы (20) и (21) позволяют установить, какими должны быть затраты труда L и основных производственных фондов K для достижения требуемых значений прибыли G и издержек производства C (при сохранении технологии производства), т.е. используя эти формулы, можно проводить многовариантные расчеты с целью планирования производства.

Однако помня, что по экономическому смыслу задачи $K > 0$ и $L > 0$, необходимо придерживаться ограничений для (20) и (21), которые могут быть выражены так:

$$\begin{cases}\cos((\arg(G+iC))/b)>0;\\ \sin((\arg(G+iC))/b)>0.\end{cases}$$

Это ограничение выполняется только тогда, когда аргумент комплексного результата лежит в пределах

$$0 < \arg(G + iC) < b\pi/2. \tag{22}$$

Ситуацию, когда условие (22) не выполняется, можно интерпретировать как такую, в которой для данного производственного процесса достижение требуемых значений прибыли G и издержек C невозможно.

Используя формулы (20) и (21), также можно построить своеобразные изокванты производственной функции (1). Напомним: изокванты – это кривые, лежащие на плоскости ресурсов, характеризующие различные сочетания труда L и капитала K, дающие одно и то же значение дохода Q. Помня, что $Q = G + C$, меняя значения прибыли G и издержек C так, чтобы доход оставался постоянным ($Q = G + C = \mathrm{const}$) и выполнялось условие (22), подставляя эти значения в формулы (20) и (21), получим множество точек, образующее на плоскости ресурсов кривые изоквант.

Важным преимуществом предлагаемой производственной функции для решения задач аналитики производственных процессов по сравнению с производственными функциями комплексных переменных выступает возможность вычисления значений коэффициентов модели на каждом наблюдении t. Но если возникает задача нахождения коэффициентов степенной производственной функции комплексных переменных с действительными коэффициентами на некотором множестве значений, коэффициенты a и b функции (1) могут быть найдены с помощью метода наименьших квадратов.

Таблица 2. Производственная деятельность Диатомового комбината за 2004–2007 гг.

Квартал	Доход, тыс. руб.	Прибыль, тыс. руб.	Затраты, тыс. руб.	ОПФ, тыс. руб.	Численность персонала, чел.
	Q	G	C	K	L
I кв. 2004	26 731	325	26 406	60 016	613
II кв. 2004	50 232	–1548	51 780	61 029	587
III кв. 2004	43 840	–4380	48 220	63 544	631
IV кв. 2004	46 497	–193	46 690	69 120	636
I кв. 2005	34 167	201	33 966	70 173	638
II кв. 2005	36 512	–3	36 515	71 717	579
III кв. 2005	41 027	1687	39 340	72 689	623
IV кв. 2005	54 086	609	53 477	80 192	637
I кв. 2006	41 026	1335	39 691	80 500	643
II кв. 2006	44 193	691	43 502	80 942	608
III кв. 2006	45 015	1658	43 357	87 150	625
IV кв. 2006	40 893	3698	37 195	91 543	615
I кв. 2007	42 656	2261	40 395	92 570	583
II кв. 2007	50 217	3267	46 950	97 296	613

Из-за громоздкости вычислений мы опускаем промежуточные выкладки и приведем формулы для нахождения коэффициентов (Светуньков С., Светуньков И., 2008, с. 109):

$$b = \frac{\sum_t \arg(G_t + iC_t)}{\sum_t \arg(K_t + iL_t)}, \tag{23}$$

$$a = \exp\left(\frac{1}{n}\left(\sum_t \ln\sqrt{G_t^2 + C_t^2} - \frac{\sum_t \arg(G_t + iC_t)}{\sum_t \arg(K_t + iL_t)} \sum_t \ln\sqrt{K_t^2 + L_t^2}\right)\right). \tag{24}$$

Покажем, как можно построить и использовать для экономического анализа производственную функцию по имеющимся статистическим данным на примере Диатомового комбината г. Инза Ульяновской области (табл. 2).

Преобразуем эти данные к виду, пригодному для расчетов. При этом к производственным ресурсам будем относить ту часть, которая непосредственно переносится на готовый продукт – поквартальную стоимость труда и основных фондов. Для того чтобы сохранить соотношения между прибылью и издержками, капиталом и трудом, нам нужно приводить их к безразмерным величинам. Для прибыли и издержек важно, чтобы при приведении к безразмерным величинам сохранялся не только смысл каждого из них (G может быть отрицательной, может и отсутствовать), но и другой экономический смысл переменных, поскольку $Q = G + C$. Поэтому, приводя прибыль и издержки к безразмерным величинам, их надо связать друг с другом для возможности вычисления Q. Сделать это можно так:

$$G'_t = G_t / C_0, \quad C'_t = C_t / C_0, \tag{25}$$

здесь G'_t и C'_t – значение прибыли и издержек в относительных величинах для наблюдения t; G_t и C_t – фактические значения прибыли и издержек для наблюдения t; C_0 – начальное значение

Таблица 3. Безразмерные данные о производственной деятельности Диатомового комбината

Квартал	G'	C'	K'	L'
I кв. 2004	0,012	1,000	0,326	1,000
II кв. 2004	–0,059	1,961	0,332	0,958
III кв. 2004	–0,166	1,826	0,346	1,029
IV кв. 2004	–0,007	1,768	0,376	1,038
I кв. 2005	0,008	1,286	0,382	1,041
II кв. 2005	0,000	1,383	0,390	0,945
III кв. 2005	0,064	1,490	0,395	1,016
IV кв. 2005	0,023	2,025	0,436	1,039
I кв. 2006	0,051	1,503	0,438	1,049
II кв. 2006	0,026	1,647	0,440	0,992
III кв. 2006	0,063	1,642	0,474	1,020
IV кв. 2006	0,140	1,409	0,498	1,003
I кв. 2007	0,086	1,530	0,503	0,951
II кв. 2007	0,124	1,778	0,529	1,000

издержек. Издержки взяты в качестве делителя потому, что у действующего предприятия они ни при каких условиях не будут меньше либо равны нулю.

Для того чтобы можно было построить адекватную модель значения труда и капитала, надо ее привести к единым соразмерным и соизмеримым величинам.

Во-первых, капитал, представленный стоимостью основных производственных фондов, надо умножить на норму амортизации. Это нужно для того чтобы в модель подставлять не всю стоимость основных производственных фондов, а только стоимость, приходящуюся на одно наблюдение. Средняя годовая норма амортизации на Диатомовом комбинате составляет около 3%.

Во-вторых, труд, представленный численностью персонала, надо умножить на среднюю заработную плату для данного наблюдения на предприятии. Тогда у нас получится величина суммарной заработной платы на предприятии на данном наблюдении. Средняя заработная плата на предприятии составляет 9 тыс. руб.

После этого труд и капитал можно привести к безразмерным величинам путем деления каждого значения из рядов данных на первое значение труда (Светуньков, 2008):

$$K_t' = K_t / L_0, \qquad L_t' = L_t / L_0. \tag{26}$$

Ряд данных, пригодных для построения степенной производственной функции комплексных переменных, представлен в табл. 3.

Следуя вышеизложенной логике, мы рассчитали значения a, b, b_G, b_{NG}, b_Q и S для каждого наблюдения. Рассчитанные нами значения приведены в табл. 4.

На основе данных табл. 4 можно сделать вывод о том, что эффективность работы предприятия довольно низкая. Показатель степени b расположен в восьмой зоне из тринадцати, рассмотренных ранее, и близок к граничному значению b_{NG}, которое характеризует бесприбыльную деятельность. Об этом же свидетельствует и низкое значение коэффициента S и рентабельности G/C.

Ориентируясь на последнее наблюдение по Диатомовому комбинату и вычисленные для него значения степенной производственной функции комплексных переменных с действительными коэффициентами, которая имеет вид:

$$G + iC = 1{,}502(K + iL)^{1{,}385}, \tag{27}$$

Таблица 4. Характеристики степенной производственной функции комплексных переменных с действительными коэффициентами для Диатомового комбината

Квартал	a	b	b_G	b_Q	b_{NG}	S, %	G/C, %
I кв. 2004	0,939	1,241	0,032	0,658	1,251	0,80	1,23
II кв. 2004	1,928	1,294	0,009	0,644	1,270	–1,92	–2,99
III кв. 2004	1,643	1,332	0,053	0,683	1,260	–6,02	–9,08
IV кв. 2004	1,558	1,288	0,066	0,708	1,284	–0,28	–0,41
I кв. 2005	1,127	1,283	0,069	0,713	1,288	0,40	0,59
II кв. 2005	1,344	1,332	0,016	0,682	1,332	–0,01	–0,01
III кв. 2005	1,335	1,273	0,060	0,715	1,309	2,86	4,29
IV кв. 2005	1,728	1,329	0,086	0,756	1,339	0,78	1,14
I кв. 2006	1,272	1,308	0,092	0,760	1,336	2,30	3,36
II кв. 2006	1,476	1,348	0,061	0,742	1,362	1,06	1,59
III кв. 2006	1,403	1,349	0,091	0,782	1,383	2,60	3,82
IV кв. 2006	1,218	1,326	0,092	0,799	1,415	6,75	9,94
I кв. 2007	1,383	1,397	0,062	0,787	1,449	3,72	5,60
II кв. 2007	1,502	1,385	0,105	0,829	1,449	4,77	6,96

сформулируем рекомендации для руководства предприятия, которые следуют из полученных результатов.

Прежде всего определим, какие прибыль и издержки может получить комбинат, если производство усовершенствовать в максимальной степени и сделать его максимально эффективным. Это достигается в случае, когда S = 100%, или $b = b_G = 0{,}105$. Возьмем значения ресурсов K и L за II квартал 2007 г. и рассчитаем значения G и C при показателе степени $b = b_G = 0{,}105$. В относительных величинах $G^* = 1{,}512$; $C^* = 0{,}172$; в абсолютных –

$$G^* = 39\,928 \text{ тыс. руб.}, \quad C^* = 4544 \text{ тыс. руб.} \tag{28}$$

Безусловно, тип производства, при котором достижимы такие величины прибыли и затрат, является идеальным. Именно поэтому мы рассматриваем эти величины только как направления для возможного развития предприятия. Они показывают, что при существующей технологии производства и при более рациональном использовании имеющихся ресурсов Диатомовый комбинат может получить бóльшую прибыль и понести меньшие издержки. Но как это сделать?

Из теории производственных функций известно, что один и тот же объем производства Q можно получить, используя различные сочетания производственных ресурсов K и L, т.е. при существующих на предприятии организационно-экономическом механизме, технологии производства и организации труда, отражаемых моделью (32), сочетания прибыли и затрат на производство, равные $G^* = 1{,}512$; $C^* = 0{,}172$, можно добиться, изменяя величины ресурсов K и L. Воспользуемся для этого формулами (20) и (21). Получим значения капитала и труда, с помощью которых, не меняя ничего другого на предприятии, можно достичь искомых значений прибыли и издержек. В абсолютных величинах это имеет вид:

$$K = 5550 \text{ тыс. руб.}, \quad L = 455 \text{ тыс. руб.} \tag{29}$$

Для сравнения следует отметить, что на II квартал 2007 г. на Диатомовом комбинате стоимость основных производственных фондов составила 2919 тыс. руб., а средняя заработная плата – 5517 тыс. руб. Можно сделать вывод о том, что ресурсы на предприятии применяются неэффективно: для увеличения эффективности производства стоит увеличить инвестиции в основные производственные фонды и сократить затраты труда. Второе не говорит о том, что следует либо урезать заработную плату персоналу, либо уволить часть персонала. Это свидетельствует о том, что руководству комбината стоит заняться оптимизацией использования трудовых ресурсов, в том числе и изменением пропорции между промышленно-производственным и прочим персоналом комбината, поскольку именно здесь кроются резервы повышения эффективности производства.

Следует отметить, что критерий максимума валовой прибыли является основным критерием работы предприятия, но иногда возникают такие конкурентные ситуации на рынке, при которых предприятию во что бы то ни стало необходимо занять лидирующие позиции на рынке по объему продаж. Это означает, что основным критерием работы предприятия в этом случае является критерий максимума объема производства. Отдавая себе отчет в том, что "объемы производства" и "объемы продаж" – понятия хотя и взаимосвязанные, но все же разные, в целях упрощения задачи мы сделаем упор на их близости друг к другу, а не на отличиях, и предположим, что критерию максимума объема производства соответствует максимум дохода. Тогда можно осуществить аналогичные расчеты по Диатомовому комбинату, но с применением вместо b_G значения b_Q (т.е. $b = b_Q = 0{,}829$). Получим следующие интересные результаты. Максимум дохода комбината будет составлять Q = 61 747 тыс. руб., но при этом прибыль будет G = 27 359 тыс. руб., а издержки C = 34 387 тыс. руб. Это состояние достижимо при увеличении основных производственных фондов K до 4732 тыс. руб. и сокращении зарплаты L – до 3590 тыс. руб. Получается, что для достижения максимума дохода надо, как и для достижения максимума прибыли, увеличить стоимость основных производственных фондов и сократить затраты трудовых ресурсов.

Интересно теперь сравнить результаты и рекомендации, полученные с помощью степенной производственной функции комплексных переменных с действительными коэффициентами (1) с результатами и рекомендациями, которые следуют при применении в данном случае производственной функции Кобба–Дугласа. Оценив параметры степенной производственной функции комплексных переменных с действительными коэффициентами (1) и производственной функции Кобба–Дугласа с помощью МНК по данным Диатомового комбината, получили модели вида:

$$G + iC = 1{,}398(K + iL)^{1{,}319}, \tag{30}$$

$$Q = 2{,}348K^{0{,}457}L^{0{,}543}. \tag{31}$$

Ошибка аппроксимации дохода по модели (30) составила 15,3%, а по модели (31) – 14,8%.

Рекомендации, которые можно получить с помощью производственной функции Кобба–Дугласа, заключаются в том, чтобы для максимизации дохода Диатомовый комбинат увеличивал и инвестиции в основные производственные фонды, и численность персонала, причем рост численности персонала более желателен, поскольку коэффициент эластичности (31) по труду больше, чем по капиталу. Вычисленное с помощью МНК значение показателя степени при трудовых ресурсах L функции Кобба–Дугласа, равное 0,543, говорит о том, что, увеличивая число занятых в производстве на один процент, можно получить рост дохода на 0,543%. Итак, если оставить неизменной величину ОПФ за последний год наблюдения в размере 2919 тыс. руб., а лишь повышать число работающих на комбинате, то, например, удвоения валового выпуска можно добиться, как следует из функции Кобба–Дугласа (31), поднимая численность трудовых ресурсов до 2187 человек (сохраняя текущую заработную плату). Если теперь подставить эти значения ресурсов в нашу функцию (30), то будет промоделирован иной результат, а именно: валовая прибыль будет отрицательной и равной –60 499 тыс. руб., издержки производства равны 191 045 тыс. руб., а валовой выпуск составит 130 546 тыс. руб. Из чего следует вывод – ни в коем случае не увеличивать численность занятых на комбинате, а, наоборот, сократить их число, оптимизируя организацию труда.

Для получения ответа на вопрос, рекомендации какой из двух моделей ближе к истинному положению дел на комбинате, мы обратились к руководству Диатомового комбината. Генеральный директор комбината к.э.н. Е.А. Никифоров объяснил, что число занятых на комбинате действительно оказалось завышенным – вызвано это тем, что комбинат является градообразующим предприятием, поэтому для снижения уровня социальной напряженности и уменьшения безработицы в городе руководство и приняло решение обеспечить работой максимально возможное число жителей Инзы, используя трудовые ресурсы не самым эффективным образом. Стратегическим же направлением развития комбината считается увеличение инвестиций в основной капитал при сохранении численности занятых, что, как видно из приведенного примера, полностью соответствует выводам и рекомендациям степенной производственной функции комплексных переменных с действительными коэффициентами (1).

Обобщая полученные выводы, можно сказать, что с помощью степенной производственной функции комплексных переменных с действительными коэффициентами (1) исследователь получает более подробную информацию о сути происходящих производственных процессов, чем та, которую дают производственные функции действительных переменных, поскольку моделируется поведение не одной, а двух действительных переменных, объединенных в комплексную переменную.

В статье была рассмотрена одна из возможных производственных функций – степенная с действительными коэффициентами. Для целей наилучшей аппроксимации и выполнения многовариантных расчетов могут оказаться более пригодными другие разновидности степенной функции. В общем виде степенная производственная функция комплексных переменных с комплексными коэффициентами может быть записана так:

$$G + iC = (a_0 + ia_1)\,(K + iL)^{(b_0 + ib_1)}. \tag{32}$$

В зависимости от значений коэффициентов получается несколько ее разновидностей, одну из которых при $a_1 = b_1 = 0$ мы и рассмотрели в данной статье.

Многообразие возможных производственных функций комплексных переменных вовсе не ограничивается множеством, вытекающим из (32), ведь существуют и другие виды функций комплексных переменных: показательная, логарифмическая, тригонометрическая и т.д. Кроме того, интересным представляется применение на практике классифицирующих производственных функций (Светуньков, 2008), например степенной типа Кобба–Дугласа:

$$G + iC = (a_0 + ia_1)\,(K + iK_n)^{a}(L + iL_n)^{1-\alpha}, \tag{33}$$

где K – затраты основного капитала, K_n – затраты неосновного капитала, L – затраты труда основного персонала, L_n – затраты труда других занятых в производстве. В любом случае можно утверждать, что использование элементов теории функций комплексного переменного в экономике не только возможно, но и настоятельно необходимо, поскольку существенно расширяет возможности экономико-математического моделирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Колемаев В.А. (2005): Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов и систем. М.: ЮНИТИ-ДАНА.

Светуньков И.С. (2008): Проблема размерности в комплекснозначной экономике. В сб. научных трудов “*Экономическая кибернетика: системный анализ в экономике и управлении*”. Вып. 17. СПб.: Изд-во СПбГУЭФ.

Светуньков С.Г. (2008): Основы эконометрии комплексных переменных. СПб.: Изд-во СПбГУЭФ.

Светуньков С.Г., Светуньков И.С. (2008): Производственные функции комплексных переменных. М.: ЛКИ.

Семенычев В.К. (2006): Информационные системы в экономике. Эконометрическое моделирование инноваций. Часть 1. Самара: Изд-во Самарского государственного аэрокосмического ун-та.

Чернышев С.Л. (2003): Моделирование экономических систем и прогнозирование их развития. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Поступила в редакцию
20.06.2008 г.

Power Complex Variables Production Functions

I.S. Svetunkov, S.G. Svetunkov

The new economic-mathematical model based on complex variables theory and the new approach to complex variables usage in economics are suggested in the article. The comparison of modeling results of actual production processes using Cobb-Douglass production function and complex variables production function is conducted. It is shown that the instrumental base of economic-mathematical methods can be widen with usage of complex variables theory.

Keywords: production function, complex variables, least squares method, production effectiveness, gross gain, production costs, labor, capital.