ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2012, том 48, № 1, с. 80–93

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

ФИДУЦИАЛЬНЫЙ ПОДХОД В ИНВАРИАНТНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКИ*

© 2012 г. В.З. Беленький, А.А Заславский

(Москва)

Статья является продолжением статьи (Беленький, Заславский, 2011). Подробно изучается задача оптимальной остановки (для инвариантного семейства). Вводится новое понятие “фидуциальная последовательность” (ФП). ФП обладает необычным дуалистическим свойством: ее члены имеют ту же физическую размерность, что и наблюдаемая последовательность, но ее вероятностное описание эквивалентно относительной безразмерной последовательности. Это свойство позволяет поставить задачу оптимальной остановки для инвариантного семейства, но с неинвариантным критерием (что ранее было невозможно). Приведены формулы функций, необходимых для расчета.

Ключевые слова: инвариантное семейство, задача оптимальной остановки, фидуциальная последовательность, принцип инертности.

ВВЕДЕНИЕ

Фидуциальные вероятности были предложены в 1920-х годах известным статистиком Р. Фишером в качестве апостериорного распределения неизвестного параметра наблюдаемой последовательности семейства случайных величин. Р. Фишер исходил из полуинтуитивной эвристической идеи “обращения вероятности”, которая в дальнейшем получила строгое математическое оформление в рамках инвариантной теории. Однако инвариантная теория не вскрывает сути фишеровской идеи, ее содержательного смысла. В работе (Беленький, Заславский, 2011) инвариантная теория изложена в такой форме, которая позволила выявить сущность идеи обращения вероятности; мы назвали ее *принципом инертности* свободных случайных величин. Было показано, что принцип инертности имеет универсальный характер в том смысле, что инертными остаются все свободные бифункции.

Настоящая статья является продолжением публикации (Беленький, Заславский, 2011) и предполагает знакомство с нею. В работе на основе принципа инертности развивается фидуциальный подход в инвариантной проблеме оптимальной остановки (эту проблему называют обычно проблемой наилучшего выбора, best choice problem). Подход охватывает все известные ранее best choice–постановки, но позволяет также дать новые, не возможные прежде, постановки задач, когда в инвариантной ситуации критерий выбора задается неинвариантной функцией.

1. ПЕРВИЧНАЯ ЗАДАЧА ИНВАРИАНТНОГО ВЫБОРА

1.1. Каноническая постановка задачи выбора с полной информацией. Наблюдается входная последовательность (ВП) случайных величин (с.в.) $\boldsymbol{\xi} = (\xi_j,\ j = 1,\dots,\ n)$. Общее доступное число наблюдений n (горизонт просмотра) считается заданным. Априори известно совместное распределение с.в. $\xi^n := (\xi_1,\dots,\ \xi_n)$).

В каждый момент $k = 1,\dots, n$ наблюдатель знает уже просмотренные объекты $x^k = (x_1,\dots, x_k) \in$ $\in X^k$ (X^k – выборочное пространство с.в. $\xi^k := (\xi_1,\dots, \xi_k)$) и располагает двумя возможностями –

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (проект 09-02-00479) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00156)

взять текущий наблюдаемый объект x_k или продолжить наблюдение; в момент $k = n$ вторая возможность отсутствует (взятие обязательно).

Стратегией выбора называется набор неслучайных функций $s = \{s_1,\dots, s_n\}$, удовлетворяющий условиям:

а) функция s_k зависит только от вектора x^k наблюденных к моменту k величин и может принимать значения только ноль или единица; $s_k(x^k) = 1$ означает, что при данной реализации объект x_k выбирается;

б) необходимость и однократность выбора: $\sum_{k=1}^{n} s_k(x^k) \equiv 1 \quad \forall x^n$.

При стратегии s и реализации x^n выигрыш наблюдателя составит величину[1]

$$K_s(x^n) := \sum_{k=1}^{n} \mathcal{K}(x_k; x^n) s_k(x^k), \tag{1}$$

где неотрицательная критериальная функция $K(y; x^n)$ предполагается заданной.

Замечание 1. Не оговаривая этого особо, мы всегда предполагаем, что критериальная функция не зависит от порядка, в котором предъявляются члены входной последовательности, т.е. значение $\mathcal{K}(y; x_1,\dots, x_n)$ не меняется при любой перестановке аргументов x_j, $j = 1,\dots, n$ (однородность во времени).

Наблюдатель решает следующую *каноническую задачу* оптимального выбора с полной информацией (из известного распределения).

Задача 1. Для ВП $\boldsymbol{\xi} = (\xi_j, j = 1,\dots, n)$ с известным совместным распределением найти стратегию s, максимизирующую критериальный функционал

$$Cr(s) := \operatorname*{E}_{\xi^n} K_s(\xi^n) \to \max_s := V. \tag{2}$$

Максимальное значение V функционала (2) называется *ценой игры*.

1.1.1. DP-метод. Каноническая задача может быть решена стандартным методом динамического программирования (DP). Для каждого момента наблюдения k определим тройку функций: u_l – выигрыш взятия, w_l – выигрыш продолжения, v_l – полный (максимальный) выигрыш; все они имеют своим аргументом текущее *состояние* x^k, а индекс $l := n - k$ указывает *остаточный* горизонт. Функции взятия вычисляются заранее по формуле

$$u_l(x^k) = \operatorname*{E}_{\xi^n} (\mathcal{K}(x_k; \xi^n) \,|\, \xi^k = x^k), \qquad l = 0, \dots, n-1, \;\; k := n - l, \tag{2}$$

и для последовательности троек функций $\{(u, w, v)_l\}$ имеют место соотношения:

а) $v_l(x^k) = \max[u_l(x^k), w_l(x^k)]; \qquad l = 0,\dots, n-1; \quad k := n - l,$ (4)

б) $w_{l+1}(x^{k-1}) = \operatorname*{E}_{\xi^n} (v_l(\xi^k) \,|\, \xi^{k-1} = x^{k-1}) = \operatorname*{E}_{\xi^n} (v_l(x^{k-1}, \xi_k) \,|\, \xi^{k-1} = x^{k-1});$

второе из которых выражает принцип оптимальности Беллмана. Если ВП – это последовательность независимых с.в., то формула (4б) упрощается и принимает вид:

б′) $w_{l+1}(x^{k-1}) = \operatorname*{E}_{\xi} v_l(x^{k-1}, \xi), \;\; l = 0, \dots, n-1; \;\; k := n - l.$

Граничное условие

в) $w_0(x^n) = 0 \qquad \forall x^n,$

означающее невозможность продолжения игры при нулевом остаточном горизонте, позволяет рекуррентно найти функции w_l, v_l, наращивая индекс $l = 0, 1,\dots$ по схеме

$$w_l \xrightarrow{\text{а}} v_l \xrightarrow{\text{б}} w_{l+1}. \tag{5}$$

[1] Мы ограничиваемся рассмотрением моделей, в которых плата за наблюдение отсутствует.

Замечание 2. Во всех этих соотношениях три целочисленных параметра k, l, n могут выбираться *произвольными* при соблюдении одного условия связи $k + l = n$.

После того как функции w_l найдены, стратегия выбора s строится рекуррентно для $k = 1,\ldots, n$ по правилу:

$$s_0 := 0, \quad s_k(x^k) = 1 \Leftrightarrow (s_i(x^i) = 0 \quad \forall\, i = 0,\ldots, k-1 \quad u_l(x^k) \geq w_l(x^k)_{|\, l := n-k}). \tag{6}$$

Эту стратегию коротко можно выразить словами: “Вести наблюдение $k = 1,\ldots, n$ до тех пор, пока не будет выполнено условие взятия

$$u_l(x^k) \geq w_l(x^k), \qquad l := n - k; \tag{7}$$

на первом же объекте, удовлетворяющем этому условию, следует остановиться”.

Таким образом, соотношения (4)–(7) описывают DP-метод решения задачи выбора.

Наиболее характерными примерами критериальных функций при выборе из ВП независимых с.в., равномерно распределенных на отрезке [0, 1], являются следующие.

Пример 1. Абсолютная независимая оценка объекта –

$$\mathcal{K}(y; x^n) = y. \tag{8}$$

Этот пример рассмотрен в (Moser, 1956), см. также (Дынкин, Юшкевич, 1967, с. 136).

Пример 2. “Экстремистский” критерий –

$$\mathcal{K}\,(y; x^n) = \begin{cases} 1, & y = M(x^n); \\ 0, & y \neq M(x^n); \end{cases} \qquad M(x^n) := \max_{j \in [1,\, n]} x_j. \tag{9}$$

Выбор достигает цели только в том случае, если выбранный объект окажется максимальным среди всей группы объектов, возможных к наблюдению. Оптимальная стратегия должна максимизировать вероятность такого выбора. Пример рассмотрен в работе (Gilbert, Mosteller, 1966).

1.2. Задача инвариантного выбора. Пусть $\mathcal{F} = \{F^g,\ g \in \mathcal{G}\}$ – семейство распределений с параметром g, значения которого принадлежат некоторому множеству $\mathcal{G}$. Предполагается, что входная последовательность $\boldsymbol{\xi} = (\xi_j,\ j = 1, 2\ldots)$ – это независимые одинаково распределенные с.в., подчиняющиеся общему для всех них параметру $\theta \in \mathcal{G}$, значение которого *абсолютно* неизвестно (о нем нет никакой априорной информации, кроме включения $\theta \in \mathcal{G}$). Через Y обозначим выборочное пространство членов ВП.

Семейство $\mathcal{F}$ называется *инвариантно-групповым*, если каждый элемент g задает преобразование g: $Y \to Y$, – и семейство $\mathcal{G}$ этих преобразований образует непрерывную *полную* ($g_1, g_2 \in \mathcal{G} \Rightarrow g_1g_2 \in \mathcal{G}$) *транзитивную* группу ($\forall\, g_1, g_2\ \exists\, g:\ g_2 = g_1g$, или, что равносильно, для любого g существует обратный элемент g^{-1}).

Тождественному преобразованию соответствует *единица* группы $\mathcal{G}$; обозначается **1**. Свойство инвариантности состоит в том, что если $\xi \mapsto \theta$ (эта запись означает, что с.в. ξ подчиняется распределению $F^\theta \in \mathcal{F}$), то $g\xi \mapsto g\theta \quad \forall\, g \in \mathcal{G}$; отсюда следует, что

$$F^g(y) = F(g^{-1}y), \quad y \in Y, \quad g \in \mathcal{G}, \tag{10}$$

где *опорная* функция распределения (ф.р.) F отвечает значению $g = \mathbf{1}$.

Работа имеет методологический характер, и рассматриваются только одномерные с.в., выборочным пространством которых является либо вся прямая $Y = R$, либо положительная ось $Y = R_+$ (хотя, в принципе, ничто не мешает рассмотрению многомерных с.в.).

Соответственно, рассматриваются *три группы* преобразований:

1) $\mathcal{G} = G$ сдвигов на прямой ($gy := y + c$);

2) растяжений $\mathcal{G} = \Lambda$ полуоси R_+ ($gy := \lambda y,\ \lambda > 0$);

3) полная, аффинных преобразований $\mathcal{G} = L$ на прямой ($g = (\lambda, c),\ gy := \lambda y + c$).

1.2.1. Основные семейства. В работе исследуются следующие инвариантно-групповые семейства (*основные семейства*, (Беленький, Заславский, 2011, п. 1.1)):

Семейство 1. Равномерные распределения $U(\Delta)$ на интервале Δ с плотностью

$$f^g(x) = \frac{1}{|\Delta|} \times \begin{cases} 1, & x \in \Delta; \\ 0, & x \notin \Delta; \end{cases} \quad x \in R, \tag{11}$$

где $|\Delta|$ – длина интервала Δ.

1.1. $\Delta = [\theta - 1/2,\ \theta + 1/2]$, $\quad g = \theta \in C = \{c \mid c \in R\} = R$, $\quad d = 1$.

1.2. $\Delta = [0, \theta]$, $\quad g = \theta \in \Lambda = \{\lambda \mid \lambda > 0\} = R_+$, $\quad d = 1$.

1.3. $\Delta = [a, b]$, $\quad g = (b - a, a) \in L = \{(\lambda, c) \mid \lambda \geq 0,\ c \in R\}$, $\quad d = 2$.

Здесь и всюду в дальнейшем $d := \dim \mathcal{G}$ – размерность группы $\mathcal{G}$.

Семейство 2. Нормальные распределения $N(a, \sigma)$ с плотностью

$$f^g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\{-(x-a)^2/(2\sigma^2)\}, \quad x \in R.$$

2.1. Параметр σ задан, $\sigma := 1$; $g = a \in C$, $\quad d = 1$.

2.2. Параметр a задан, $a := 0$; $g = \sigma \in \Lambda$, $\quad d = 1$.

2.3. $g = (a, \sigma) \in L$, $\quad d = 2$.

Семейство 3. Экспоненциальные распределения $Ex(a, \sigma)$ с плотностью

$$f^g(x) = \begin{cases} (1/\sigma)\exp\{-(x-a)/\sigma\}, & x > a; \\ 0, & x \leq a; \end{cases} \quad x \in R$$

с подразбивкой на случаи 3.1–3.3 аналогично семейству 2.

Семейство 4. Гамма-распределения $\Gamma am_p(\sigma)$ с плотностью

$$f^g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma^p \Gamma(p)} x^{p-1} \exp\{-x/\sigma\}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0; \end{cases} \quad x \in R, \quad g = \sigma \in \Lambda;$$

здесь Γ – функция Эйлера

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} \mathrm{e}^{-x} dx, \quad p > 0.$$

Отметим, что семейство 3.2 есть частный случай семейства 4, отвечающий значению $p = 1$.

1.2.2. Формулировка задачи инвариантного выбора. Задача ставится в предположении, что критериальная функция инвариантна. При таком критерии естественно потребовать, чтобы стратегия выбора была также инвариантной[2].

Задача 2. Для ВП $\boldsymbol{\xi} = (\xi_j,\ j = 1, 2\ldots)$ независимых одинаково распределенных с.в., подчиненных одному из распределений семейства $\mathcal{F}$ (с неизвестным параметром $\theta \in \mathcal{G}$), и данной инвариантной критериальной функции $\mathcal{K}$ найти инвариантную стратегию s, максимизирующую критериальный функционал (2).

1.2.3. *Сведение к задаче с полной информацией, проективная последовательность* (ПП). Поскольку функция $\mathcal{K}$ инвариантна, ее можно выразить не в *абсолютных* величинах, а в *проективных* (термин взят из (Березовский, Гнедин, 1984)). Проще всего перейти к таким величинам можно следующим образом.

[2] Напомним (см. (Беленький, Заславский, 2011)), что функция $\psi(x)$ называется *инвариантной*, если она удовлетворяет условию $\psi(gx) = \psi(x)$ $\quad (g \in \mathcal{G},\ x \in X)$.

В силу замечания 1 при $n > d$ (напомним, $d = 1, 2$ – размерность группы $\mathcal{G}$) у наблюдателя нет никаких оснований останавливать свой выбор на одном из первых d объектов: априори, пока нет никакой информации о неизвестном параметре θ, эти первые объекты ничем не лучше последующих. Поэтому первые d объектов (начальный вектор ξ^d) *должны быть пропущены*.

Исходя из начального вектора, определим *стартовый элемент* $st \in \mathcal{G}$ формулой

$$st(\xi^d) =: \begin{cases} \xi_1, & \mathcal{G} = C, \Lambda, \ d = 1; \\ (|\xi_2 - \xi_1|, \xi_1), & \mathcal{G} = L, \ \ d = 2. \end{cases} \tag{12}$$

Замечание 3. Можно было бы определить стартовый элемент и иначе, существенно лишь то, что в процессе наблюдений он остается неизменным и, если рассматривать его как *стартовую статистику*

$$H(\xi^k) := st(\xi^d) \qquad (k \geq d), \tag{13}$$

то функция $H : Y^k \to \mathcal{G}$ эквивариантна.

Определим затем *проективную последовательность* $\boldsymbol{\zeta} = \{\zeta_j\}$ формулой

$$\zeta_j := st^{-1}(\xi^d)\xi_j, \qquad j = 1, 2, \dots. \tag{14}$$

Из свойства эквивариантности следует, что проективные величины ζ_j суть свободные с.в., их общая функция распределения вычислима, и ее можно считать известной; то же относится и к многомерным величинам $\zeta^k := (\zeta_1, \dots, \zeta_k)$.

Замечание 4. Если приходится пропускать первые два объекта (в случае $d = 2$), с точки зрения последующего выбора безразлично, какой из пропущенных объектов считать первым, а какой вторым; поэтому можно без потери общности считать первым меньшее из двух пропущенных значений, т.е. считать $\xi_1 < \xi_2$ (равенство здесь имеет вероятность нуль). При таком соглашении начальный вектор ζ^d проективной последовательности имеет стандартное (нульмерное) множество значений D – во всех случаях оно состоит из одной точки:

$$D := \begin{cases} \zeta^1 = \zeta_1 = 0, & \mathcal{G} = C; \\ \zeta^1 = \zeta_1 = 1, & \mathcal{G} = \Lambda; \\ \zeta^2 = (\zeta_1, \zeta_2) = (0, 1). \end{cases}$$

Укажем, что при $j \geq d + 1$ ζ_j – одинаково распределенные, но уже взаимозависимые с.в. Выборочным пространством многомерной с.в. $\zeta^k = H^{-1}(\xi^k)\xi^k$ является

$$Y^k := \{x \in Y^k \mid H(x) = \mathbf{1}\} \tag{15}$$

(Y^k – k-кратное декартово произведение выборочного пространства Y).

В задаче 2 критериальная функция $\mathcal{K}$ инвариантна по условию, а оптимальная стратегия s ищется в классе инвариантных функций. Из вышесказанного следует, что $\mathcal{K}$ и s – это функции от проективных величин, поэтому задача 2 в целом может быть сформулирована не в терминах последовательности ξ, а в терминах ПП ζ. При этом поскольку начальный член ζ^d принимает стандартные значения, то он неинформативен и может быть пропущен; мы приходим тогда к следующей постановке задачи.

Задача 3. Для ПП $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_j, \ j = d, \dots, n)$ и данной инвариантной критериальной функции $\mathcal{K}$ найти стратегию с дополнительным *условием задержки*

$$s_1(x_1) = s_d(x^d) \equiv 0, \tag{16}$$

максимизирующую функционал

$$Cr(s) := \underset{\zeta^n}{E} \sum_{k=d=1}^{n} \mathcal{K}(\zeta_k; \ \zeta^n) s_k(\zeta^k) \to \max_s =: V \ \ (n \geq d+1). \tag{17}$$

Это задача с полной информацией, и в ней требование инвариантности стратегии s отсутствует; но, поскольку оптимальная стратегия зависит от проективных величин, она инвариантна.

1.2.4. Логический "подводный риф". Задача 3 является задачей с полной информацией, если считать проективные с.в. ζ_j свободными не только априорно, но и апостериорно – после наблюдения начального вектора ξ^d, несмотря на то что последнее уже неверно (более точно, *условная с.в.*[3] $(\zeta^j \mid \xi^d)$ несвободна). Таким образом, логика постановки задачи 3 содержит скрытое внутреннее противоречие "подводный риф").

Требование инвариантности стратегии в задаче 2 равносильно требованию "забыть ξ^d" в задаче 3. Каждое из этих двух требований можно интерпретировать так: наблюдатель неспособен измерять *абсолютные* величины ξ_j, а может проводить лишь сопоставительные (*относительные*) измерения. Развиваемый в работе фидуциальный подход устраняет отмеченное противоречие и позволяет работать непосредственно с абсолютными величинами ξ_j.

2. ФИДУЦИАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ (ФП)

Этот раздел посвящен основному понятию работы и непосредственно опирается на понятия и результаты статьи (Беленький, Заславский, 2011).

2.1. Определение ФП

Определение 1. Фидуциальной последовательностью, генерируемой семейством $\mathcal{F}$, назовем скалярную *случайную цепь* $\boldsymbol{\pi} = \{\pi_j\}$, $j = 1, 2,\ldots$, в которой первые d элементов являются членами входной последовательности ξ, отвечающими произвольному, но одному и тому же значению параметра (т.е. $\pi^d := \xi^d$, начальный вектор, см. п. 1.2.3), а при $k \geq d$ переходные вероятности $k \to k + 1$ задаются формулой

$$P(\pi_{k+1} < y \mid \pi^k = x) = B_k(y; x) := \mathop{\mathrm{E}}_{\gamma_x} F^g(y) = \int\limits_{g \in G} F^g(y) d\Phi_x(g),$$
$$y \in Y, \quad x \in X := Y^k, \quad \pi^k = (\pi_1, \ldots, \pi_k), \quad k \geq d. \tag{18}$$

Здесь F^g – функция (10), γ_x – фидуциальный параметр, см. (Беленький, Заславский, 2011, п. 2.6.2, определение 2).

Если $\xi^d \mapsto \theta \in \mathcal{G}$, то считаем $\pi \to \theta$.

В краткой форме правило перехода (18) удобно записать в виде

$$(\pi_{k+1} \mid \pi^k = x) := \xi_{k+1}(\gamma_x). \tag{19}$$

Содержательный смысл определения 1 состоит в том, что с.в. $(\pi_{k+1} \mid \pi^k)$ является в момент k фидуциальным прогнозом "истинной" входной с.в. ξ_{k+1}. Таким образом, фидуциальная $\boldsymbol{\pi}$-последовательность – это *адаптивная имитация* входной $\boldsymbol{\xi}$-последовательности.

Поскольку функция B_k в (18) инвариантна, семейство фидуциальных последовательностей имеет ту же инвариантно-групповую структуру, что и исходное семейство $\mathcal{F}$. Однако имеется принципиальное отличие ФП $\boldsymbol{\pi}$ от входной последовательности $\boldsymbol{\xi}$. В то время как ξ_j – это независимые с.в., имеющие одно и то же распределение F^θ с некоторым фиксированным, но неизвестным значением параметра θ, ФП представляет собой неоднородную марковскую цепь с различными (зависящими от j), но вполне определенными прогнозными распределениями B_j.

Как только начальный вектор $\pi^d = z$ наблюден, вероятностное описание последовательности $\{\pi_j, j > d\}$ уже вполне определено, следовательно, ФП $\boldsymbol{\pi} = \pi(z)$ является случайной последовательностью с полным вероятностным описанием. Таким образом, *ФП концентрирует в начальном векторе z всю неопределенность прогноза будущего, связанную с тем, что параметр θ неизвестен*. *Это свойство необычно (оно невозможно ни для какого "обычного" семейства $\mathcal{F}$).*

[3] Понятия *условная случайная величина*, а также *условное событие*, значительно упрощают изложение фидуциальной теории. Поскольку они малоупотребительны, в (Беленький, Заславский, 2011, введение) дано разъяснение этих понятий.

2.2. Свойства ФП. Исходя из (Беленький, Заславский, 2011, формула (32)), можно записать *переходную плотность* ФП (по мере Лебега) в виде

$$b_k(y;x) := \frac{\partial B_k(y;x)}{\partial y} = \int\limits_{g\in G} f^g(y) f_k^g(x)\nu(dg) / \int\limits_{g\in G} f_k^g(x)\nu(dg) = N_{k+1}(x,y)/N_k(x),$$

$$y \in Y, \quad x \in X, \quad k \geq d. \tag{20}$$

2.2.1. Однородность будущего. Представление (20) прямо выявляет бейесовский характер ФП, и из него вытекает следующее свойство, являющееся отражением того факта, что все члены ВП одинаково распределены.

Утверждение 1. *С точки зрения произвольного фиксированного момента k все предстоящие члены ФП имеют одно и то же распределение B_k, т.е.*

$$P(\pi_{k+q} < y \mid \pi^k = x) = B_k(y;x) \qquad \forall q \geq 1,\ k \geq d. \tag{21}$$

Доказательство. Будем доказывать (21) индукцией по q. При $q = 1$ оно верно при всех $k \geq d$ по определению. Предположим индуктивно, что (21) верно при всех $k \geq d$ и некотором $q \geq 1$, и докажем, что оно верно для произвольного $k \geq d$ и $q + 1$. Так как b_k является переходной плотностью, по формуле полной вероятности имеем

$$P(\pi_{k+q+1} < y \mid \pi^k = x) = \int\limits_{s\in Y} P(\pi_{k+1+q} < y \mid \pi^k = x,\ \pi_{k+1} = s) b_k(s;x) ds.$$

Вероятность под интегралом равна согласно индуктивному предположению $B_{k+1}(y;(x,s))$, и, следовательно, необходимо доказать равенство

$$\int\limits_{s\in Y} B_{k+1}(y;(x,s)) b_k(s;x) ds = B_k(y;x).$$

Но поскольку B_k – это функции распределения, то соответствующее равенство в плотностях имеет вид:

$$\int\limits_{s\in Y} b_{k+1}(y;(x,s)) b_k(s;x) dz = b_k(y,x), \quad y, s \in Y, \quad x \in X^k.$$

Требуемое равенство вытекает непосредственно из (20). Индуктивный шаг выполнен, утверждение доказано.

Примечание. Поскольку (21) вытекает прямо из (20), утверждение 1 верно для любой (не только фидуциальной) последовательности апостериорных *бейесовских* распределений.

2.2.2. Эквивалентность свободных $\boldsymbol{\pi}$- *и* $\boldsymbol{\xi}$-*статистик*. Согласно (Беленький, Заславский, 2011, п. 1.3) диполем называется функция двух аргументов $g^{-1}x$, $g \in \mathcal{G}$, $x \in X$. В контексте семейства фидуциальных последовательностей можно говорить о случайном $\boldsymbol{\pi}$-диполе, который, как и $\boldsymbol{\xi}$-диполь априори свободен. В силу принципа инертности диполь $\boldsymbol{\xi}$ свободен и апостериорно, будет ли это верно и в отношении $\boldsymbol{\pi}$-диполя?

Возьмем, например, диполь $g^{-1}x_j$, где x_j – выборочное значение члена ВП с номером j. Случайный диполь $g^{-1}\xi_j$ инертен и имеет при всех $j \geq 1$ плотность распределения $f(y)$, опорную для семейства $\mathcal{F}$. По отношению к $g^{-1}\pi_j$ сказанное верно только для $j \leq d$, так как $\pi^d = \xi^d$ по определению; при $j \geq d + 1$ при каждом фиксированном $\pi^d = z$ с.в. имеют общую для всех j (в силу утверждения 1 при $k = d$) условную плотность распределения $b_d(y;z)$, вычисляемую по формуле (20) при $k = d$; соответствующая безусловная плотность вычисляется по формуле полной вероятности:

$$b(y) = \int\limits_{z\in Y^d} b_d(y;z) f_d(z) dz = \int\limits_{z\in Y^d} \frac{N_{d+1}(z,y)}{N_d(z)} f_d(z) dz. \tag{22}$$

Так, для семейства 1.1 опорная плотность $f(y)$ равномерна на отрезке [–0,5, 0,5], а плотность (22) дается выражением

$$b(y)=\begin{cases}0{,}75-y^2, & |y|<0{,}5;\\ 0{,}5(1{,}5-|y|)^2, & 0{,}5\le|y|\le1{,}5; \quad y\in R;\\ \quad 0, & |y|>1{,}5;\end{cases} \tag{23}$$

это выражение слабо напоминает исходное равномерное распределение.

Таким образом, случайные $\boldsymbol{\pi}$- и $\boldsymbol{\xi}$-диполи, вообще говоря, различны (неэквивалентны); но для свободных статистик, как вытекает из нижеследующего утверждения 2, имеет место *принцип эквивалентности*.

Опираясь на стартовый элемент (12), определим проективную фидуциальную последовательность (ПФП) аналогично ПП (см. (14)):

$$v_j := st^{-1}(\xi^d)\pi_j, \quad j=1,2,\,\ldots. \tag{24}$$

Ясно, что всякая свободная $\boldsymbol{\pi}$-статистика является функцией от проективных величин v^k, поэтому для доказательства принципа эквивалентности достаточно показать эквивалентность проективных величин v_j и ζ_j при всех j.

Утверждение 2. *Проективные* $\boldsymbol{v}$ *и* $\boldsymbol{\zeta}$ *последовательности, понимаемые как априорные, эквивалентны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Начальные векторы обеих последовательностей совпадают по определению ($v^d=\zeta^d$), поэтому достаточно показать совпадение переходных вероятностей $k\mapsto(k+1)$, $k\le d$. Для большей ясности будем употреблять для значений проективных величин греческие буквы.

Что касается вероятности $P(v_{k+1}<\lambda\mid\nu^k=\chi)$, то в силу инвариантности функции $B_k(y;\,x)$ эта вероятность остается для $\boldsymbol{v}$-последовательности такой же, как и для самой ФП (т.е. равна $B_k(\lambda;\,\chi)$). Остается доказать, что переходные вероятности $\boldsymbol{\zeta}$-последовательности (14) задаются той же формулой, т.е.

$$P(\zeta_{k+1}<\lambda\,|\,\zeta^k=\chi)=B_k(\lambda;\chi),\quad \lambda\in Y,\quad \chi\in\mathring{Y}^k,\quad k\ge d. \tag{25}$$

Обратимся к определению фидуциальных вероятностей, данному в (Беленький, Заславский, 2011, п. 2.6.2). Условие $\zeta^k=\chi$ определяет орбиту $\mathcal{O}=\mathcal{O}(\chi)$ в пространстве Y^k, и это условие в (25) можно заменить на условие $\xi^k=\mathcal{O}(\chi)$, т.е. считать ξ^k условной с.в. η, определенной в (Беленький, Заславский, 2011, (23)) с функцией распределения (Беленький, Заславский, 2011, (24)). Поэтому, обозначив для краткости вероятность (25) через $\mathcal{P}$, можно записать эту вероятность в виде (рассматривая стартовый элемент (24) как статистику $H(\xi^k)$ (13) и учитывая монотонность преобразований группы $\mathcal{G}$)

$$\mathcal{P}=P(\zeta_{k+1}<\lambda\,|\,\xi^k\in\mathcal{O})\overset{g\in\mathcal{G}}{\equiv}P^g(\xi_{k+1}<H(\xi^k)\lambda\,|\,\xi^k\in\mathcal{O})=$$
$$=\int\limits_{y\in\mathcal{O}}P^g(\xi_{k+1}<H(y)\lambda)dF^g_\chi(y)=\int\limits_{y\in\mathcal{O}}F^g(H(y)\lambda)dF^g_\chi(y).$$

Поскольку функция $H(y)$ эквивариантна, то $F^g(H(y)\lambda)$ как функция от $(g,\,y)$ при фиксированном λ является диполем на $\mathcal{G}\times Y^k$. Поэтому на основании равенства (Беленький, Заславский, 2011, (35б)) и учитывая, что $H(\chi)=\mathbf{1}$ (см. (15)), получаем

$$\mathcal{P}=\int\limits_{g\in\mathcal{G}}F^g(H(\chi)\lambda)d\Phi_\chi(g)=\int\limits_{g\in\mathcal{G}}F^g(H(y)d\Phi_\chi(g)=B_k(\lambda;\chi),$$

что и требовалось доказать.

Утверждение 2 лежит в основе всего развиваемого в данной работе подхода. Из него непосредственно вытекают важные следствия, которые формулируются ниже в форме самостоятельных утверждений 3, 4.

Утверждение 3 (принцип эквивалентности). *Какова бы ни была инвариантная статистика* ψ, *определенная на выборочном пространстве* Y^k, $k \geq d$, *фидуциальная свободная с.в.* $\psi(\pi^k)$ *эквивалентна свободной с.в.* $\psi(\xi^k)$ *(обе случайные величины понимаются как априорные).*

2.2.3. Дуализм абсолютного и относительного в понятии ФП. Обозначим, как и в п. 2.1, начальный вектор ВП через z, $z := \xi^d \in Y^d$; из (24) имеем $\boldsymbol{\pi} = st(z)\boldsymbol{\nu}$. Ввиду инвариантности переходной функции (18) это соотношение позволяет переопределить ФП следующим образом, эквивалентным исходному определению 1.

Утверждение 4. *Фидуциальная* $\boldsymbol{\pi}$*-последовательность может быть представлена в форме*

$$\boldsymbol{\pi} := h\boldsymbol{\alpha}, \quad h := st(z) \in \mathcal{G}; \tag{26}$$

здесь $\boldsymbol{\alpha}$ *– экзогенный слепок априорной* $\boldsymbol{\zeta}$*-последовательности свободных с.в.*

В (26) можно было бы вместо $\boldsymbol{\alpha}$ написать $\boldsymbol{\nu}$, но это было бы тавтологией, так как $\boldsymbol{\nu}$ определяется через $\boldsymbol{\pi}$. Нельзя также вместо $\boldsymbol{\alpha}$ поставить $\boldsymbol{\zeta}$, так как проективные величины теряют свою свободу (см. "подводный риф", п. 1.2.4); именно поэтому приходится вводить слепок $\boldsymbol{\alpha}$, как это уже делалось при определении фидуциальных вероятностей в (Беленький, Заславский, 2011, п. 2.6).

Сопоставляя представление (26) с аналогичным соотношением для исходной ВП $\boldsymbol{\xi} = h\boldsymbol{\zeta}$, $h := st(z) \in \mathcal{G}$, мы видим, что фидуциальная последовательность устраняет логическое противоречие, которое обозначено выше как "подводный риф": в отличие от $\boldsymbol{\zeta}$ $\boldsymbol{\alpha}$-последовательность экзогенна и не подвержена влиянию наблюдений.

С философской точки зрения представление (26) выражает дуализм понятия ФП: по своей природе ФП имеет абсолютный характер (ее члены π_j имеет ту же физическую размерность, что и члены входной последовательности ξ_j), но ее вероятностное описание совпадает с (априорной) проективной последовательностью, имеющей относительный (безразмерный) характер. Такое удивительное сочетание свойств абсолютного и относительного напоминает корпускулярно-волновые свойства материи.

Замечание 5. Не следует думать, конечно, что стартовый элемент h в (26) принимается за истинное значение неизвестного параметра θ. Как и для входной последовательности, истинное значение может быть найдено лишь асимптотически.

3. ФИДУЦИАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ПОЛНОГО СЕМЕЙСТВА

Инвариантно-групповое семейство $\mathcal{F}$ называется *полным*, если оно обладает полной достаточной статистикой (ПДС). Понятие "ПДС" было введено Р. Фишером, его строгое определение можно найти в (Леман, 1979, пп. 1.9, 4.3) (см. также (Закс, 1975, гл. 2; де Гроот, 1974, § 9.1)). Для нас важно, что ПДС является эквивариантной функцией на $X = Y^k$ (определенной при $k \geq d$) со значениями в группе $\mathcal{G}$, $T : X \to \mathcal{G}$.

В случае полного семейства фидуциальное распределение зависит от x через значение $t = T(x)$, см. (Беленький, Заславский, 2011, п. 2.6.1), и обозначается Φ^t. Соответственно, удобнее осуществить переход от абсолютных значений ξ_j к относительным не с помощью стартового элемента (12), как в п. 1.2.3, а с помощью текущего значения полной достаточной статистики.

3.1. Адаптивная относительная последовательность. Положим для входной последовательности

$$\beta_{k+1} := \tau_k^{-1}\xi_{k+1}, \quad \tau_k := T(\xi^k) \in \mathcal{G}, \quad k \geq d; \tag{27}$$

индекс $k + 1$ (а не k) подчеркивает, что с.в. β_{k+1} имеет смысл прогноза (в относительном измерении) в момент k очередного члена ξ_{k+1} входной последовательности. Соответствующую последовательность $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_j,\ j \leq d+1\}$ назовем *адаптивной относительной последовательностью* (АОП). Следующая лемма показывает, что АОП является последовательностью независимых с.в.

Лемма 1. *При* p, $q \geq d$, $p \neq q$ *случайные величины* β_{p+1} *и* β_{q+1} *независимы.*

Доказательство. Считаем $p < q$. Тогда β_{p+1} не зависит от β_{q+1}; кроме того, по теореме Басу (Беленький, Заславский, 2011, п. 2.6.1, теорема 1) β_{p+1} не зависит и от τ_q. ■

Свойство независимости очень важно для приложений. В отличие от проективной последовательности ζ, в которой для построения прогноза в момент k приходится иметь дело с совместным распределением многомерной с.в. ζ^k, сейчас (в любой момент k) достаточно знать ф.р. скалярной с.в. β_{k+1}. Эта с.в. свободна, поэтому ее ф.р.

$$G_k(\lambda) := P(\beta_{k+1} < \lambda), \quad \lambda \in Y, \quad k \geq d \tag{28}$$

вычислима для каждого семейства $\mathcal{F}$. Функции G_k естественно назвать *прогнозирующими*; для основных семейств, перечисленных в пп. 1.2.1, соответствующие плотности $g_k(\lambda) := G'_k(\lambda)$ сведены в Приложении, табл. 1.

3.2. Адаптивная фидуциальная последовательность (АФП). Эта последовательность определяется аналогично

$$\rho_{k+1} := \tau_k^{-1}\pi_{k+1}, \quad \tau_k := T(\pi_k), \quad k \geq d. \tag{29}$$

В силу утверждения 3 последовательности $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{\beta}$ априорно эквивалентны. Поэтому априорно АФП также является последовательностью независимых с.в., при этом ρ_{k+1} имеет ту же ф.р., что и β_{k+1}, т.е. функцию (28). Но принципиальное отличие этих последовательностей в том, что если апостериорно (по наблюдении ξ^d) с.в. β_j уже несвободны (и, конечно, теряют свою независимость), то с.в. ρ_j остаются в силу принципа инертности свободными и апостериорно. Это означает, что имеет место следующее утверждение.

Утверждение 5. *Для АФП выполняется соотношение*

$$P(\rho_{k+1} < \lambda \,|\, \pi^k = x) = G_k(\lambda), \quad \lambda \in Y, \quad x \in X, \quad k \geq d. \tag{30}$$

Поскольку, согласно (29), $\pi_{k+1} = \tau_k\rho_{k+1}$, то при любом $x \in X$ положив $t := T(x)$, имеем

$$P(\pi_{k+1} < t\lambda \,|\, \pi^k = x) = P(\tau_k\rho_{k+1} < t\lambda \,|\, \pi^k = x) =$$
$$= P(t\rho_{k+1} < t\lambda \,|\, \pi^k = x) = P(\rho_{k+1} < \lambda \,|\, \pi^k = x) = G_k(\lambda), \quad k \geq d.$$

Поэтому, если ввести экзогенные с.в. $\gamma_k := RAND(G_k)$, $k \geq d$, то можно переопределить ФП формулой

$$\pi^d := \xi^d, \; (\pi_{k+1} \,|\, \pi^k = x) := t\gamma_k, \quad t := T(x) \in \mathcal{G}, \quad k \geq d, \tag{31}$$

при этом новое определение полностью эквивалентно (18). Таким образом, аналогично утверждению 4, получаем следующий результат.

Утверждение 6. *Исходя из стартового элемента ξ^d, ФП рекуррентно генерируется по формуле* (31) *с помощью экзогенной последовательности случайных величин* $\gamma = \{\gamma_k := RAND(G_k),$ $k \geq d\}$*, где прогнозирующие функции распределения G_k определены в* (28).

3.3. Заключительное соображение. В основе всей логической схемы, связанной с фидуциальными вероятностями, лежит, конечно, принцип инертности свободных с.в. и вытекающие из него утверждения 3–4. Дело в том, что условные с.в. $(\pi_{k+1} \mid \pi^k)$(которые определены с помощью переходных вероятностей (18) $B_k(y; x)$) совпадают в силу утверждения 3 с условными с.в.

$$(\zeta_{k+1} \mid \zeta_k) = (\xi_{k+1} \mid \xi_k), \tag{32}$$

понимаемыми в априорном смысле.

Таким образом, переход от ВП $\boldsymbol{\xi}$ к ФП $\boldsymbol{\pi}$ эквивалентен требованию: переходные вероятности (32) должны быть инертны, они не должны зависеть от θ. Замечательно, что функции B_k, которые как раз и являются априорными переходными вероятности (32), получаются как прогнозные функции (18) именно при фидуциальных вероятностях Φ_x! Как показано в (Беленький, Заславский, 2011), принцип инертности может быть положен в основу фидуциальной теории.

4. ФИДУЦИАЛЬНЫЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКИ

Понятие “ФП” и полученные соотношения позволяют по-новому поставить задачу оптимальной остановки входной последовательности, заданной семейством распределений с инвариантно-групповой структурой.

4.1. Постановка задачи. Как уже отмечалось, для d-мерной группы $\mathcal{G}$ первые d членов ВП неинформативны и они пропускаются. Это неизбежность, но как только начальный вектор $z = \xi^d$ наблюден, вероятностное описание всей дальнейшей последовательности при фидуциальном подходе вполне определено. Это приводит к следующей постановке задачи.

Задача 4. Рассматривая входную последовательность как фидуциальную, пропустить первые d членов и по наблюдении начального члена $\pi^d = z$ максимизировать функционал

$$Cr(s; z) := \pi^n\left(\sum_{k=d+1}^{n} \mathcal{K}(\pi_k; \pi^n) s_k(\pi^k) \mid \pi^d = z)\right) \to \max_s =: V(z) \qquad (33)$$

на множестве стратегий s, удовлетворяющих условию задержки (16); критериальная функция $\mathcal{K}$ произвольна.

Подчеркнем, что *снятие условий инвариантности на стратегию* s *и критериальную функцию* $\mathcal{K}$ *стало возможным только при фидуциальном подходе*.

4.2. *DP*-метод. Задача 4 – это каноническая задача с полной информацией, описанная в п. 1.1, и к ней применим DP-метод пп. 1.1.1. В соответствии с (3) выигрыш взятия таков:

$$u_l(x) = \mathop{\mathrm{E}}_{\pi^n}(\mathcal{K}(x_k; \pi^n \mid \pi^k = x) = \int\limits_{y \in Y^l} b_k^l(y; x)\mathcal{K}(x_k; x, y)dy = \frac{1}{N_k(x)} \int\limits_{y \in Y^l} N_n(x, y)\mathcal{K}(x_k; x, y)dy,$$

$$x = x^k \in X = Y^k, \quad k := n - l, \quad y = (x_{k+1}, \ldots, x_n) \in Y^l. \qquad (34)$$

Здесь b_k^l – l-шаговая переходная плотность, которая (как это вытекает из (20)) имеет вид

$$b_k^l(y; x) = \frac{N_n(x^n)}{N_k(x)} \quad y = (x_{k+1}, \ldots, x_n) \in Y^l, \quad k = n - l.$$

Выигрыш продолжения (4б) получается аналогично:

$$w_{l+1}(x^{k-1}) = \int\limits_{y \in Y} b_{k-1}(y; x^{k-1}) v_l(x^{k-1}, y)dy = \frac{1}{N_{k-1}(x^{k-1})} \int\limits_{y \in Y} N_k(x^{k-1}, y) v_l(x^{k-1}, y)dy. \qquad (35)$$

Для основных семейств функции N_k приведены в Приложении, табл. 2. Таким образом, для этих семейств получены явные формулы решения задачи 4.

Вид формул (34), (35) наводит на мысль ввести в рассмотрение искусственные функции: “псевдокритерий” $\tilde{\mathcal{K}}(x_k; x^n) := \mathcal{K}(x_k; x^n)N_n(x^n)$ и “псевдовыигрыши” $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})_l(x^k) :=$ $:= (u, v, w)_l(x^k)N_k(x^k) \quad k \geq d$.

Тогда (34), (35) примут вид

$$\text{а)} \quad \tilde{u}_l(x^k) = \int\limits_{y \in X_l} \mathcal{K}(x_k; x^n)dy, \quad x^n = (x^k, y);$$

$$\text{б)} \quad \tilde{w}_{l+1}(x^{k-1}) = \int\limits_{y \in X_l} \tilde{v}_l(x^k)dy, \quad x^k = (x^{k+1}, y); \quad k = n - l; \qquad (36)$$

эти соотношения имеют каноническую форму (4) применительно к псевдовходной последовательности $\{\tilde{\xi}_j\}$ независимых случайных величин, *равномерно распределенных* на выборочном пространстве Y (поскольку математическим ожиданиям в (36) соответствует интегрирование по мере Лебега). В итоге мы получаем следующий результат.

Утверждение 7. *Задача оптимальной остановки в фидуциальной форме задачи* 4 *сводится к канонической задаче* 1 *с псевдокритериальной функцией и псевдовходной последовательностью независимых с.в., равномерно распределенных на выборочном пространстве Y.*

Обратим внимание, что равномерная распределенность псевдовходной последовательности очень хорошо согласуется с основной предпосылкой фидуциальной теории об отсутствии какой-либо априорной информации о параметре θ.

4.3. Формулировка задачи в терминах ПП. Исходя из представления (26), задачу 4 можно сформулировать в терминах ПП.

Задача 4'. Для входной **ξ**-последовательности пропустить первые d членов и по наблюдении начального члена $\pi^d = z$ максимизировать функционал

$$Cr(s;h) := \mathop{\mathrm{E}}_{\zeta^n} \sum_{k=d+1}^{n} \mathcal{K}^h(\xi_k;\xi^n)s_k(\xi^k) \to \max_s =: V(h) \tag{37}$$

на множестве стратегий s, удовлетворяющих условию задержки (16); критериальная функция $\mathcal{K}$ произвольна. Здесь $h = st(z) \in \mathcal{G}$ – стартовый элемент (13),

$$\mathcal{K}^h(\zeta_k;\zeta^n) := \mathcal{K}(h\zeta_k; h\zeta^n). \tag{38}$$

В этой формулировке, как и в задаче 3, проективные величины ζ предполагаются свободными (ζ –последовательность эквивалентна своему экзогенному слепку $\boldsymbol{\alpha}$). Поэтому, так как критериальная функция (38) при фиксированном h зависит только от ζ, задача 4′ является в точности задачей 3 с параметрическим критерием (38). Следовательно, оптимальная стратегия задачи 4′ инвариантна, но при этом зависит от h, $s = s(h)$.

Важным частным случаем является *квазиинвариантная* задача, когда критериальная функция удовлетворяет соотношению $\mathcal{K}(gy; gx) = a(g)\mathcal{K}(y; x) + b(g) \quad \forall g \in \mathcal{G}$, где $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ – некоторые скалярные функции, определенные на группе $\mathcal{G}$; $(a > 0)$. В этом случае, как нетрудно убедиться,

$$V(h) = a(h)V(\mathbf{1}) + b(h), \tag{39}$$

и при этом оптимальная стратегия $s_{\text{опт}}$ не зависит от h.

Пример. Задача 4′ для семейства равномерных распределений на интервале единичной длины с неизвестным положением центра (семейство 1.1) и критериальной функцией $\mathcal{K}(y; x) = e^y$; в этом случае для $g = c \in C$ в (39) $a(c) = e^c$, $b(c) = 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Какова бы ни была (в смысле инвариантности) критериальная функция, общая процедура решения задачи оптимальной остановки наблюдаемой входной последовательности из инвариантно-группового семейства, обоснованная фидуциальной теорией, такова:

1) пропустить первые d объектов ВП и зафиксировать элемент $h = st(\xi^d)$;

2) в последующем процессе наблюдений считать, что наблюдаемые значения x_k членов ПП вычисляются по формуле $x_k = \zeta_k^{\text{набл}} := h^{-1}\xi_k^{\text{набл}}$ и момент остановки определяется условием (7);

3) для наблюденного значения h провести расчет задачи 4′ в терминах ПП с параметрической критериальной функцией (38) (эта задача является канонической задачей с полной информацией, и расчет проводится согласно процедуре *DP*-метода, описанной в пп. 1.1.1; результатом расчета будет последовательность троек функций $(u, w, v)_l$, $l = 0, 1, \ldots$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Беленький В.З., Заславский А.А. (2011): Основания теории фидуциальных вероятностей: принцип инертности // *Экономика и мат. методы*. Вып. 3.

Березовский Б.А., Гнедин А.В. (1984): Задача наилучшего выбора. М.: Наука.

де Гроот М. (1974): Оптимальные статистические решения. М.: Мир.

Дынкин Е.Б., Юшкевич А.А. (1967): Теоремы и задачи о процессах Маркова. М.: Наука.

Закс Ш. (1975): Теория статистических выводов. М.: Мир.

Леман Э. (1979): Проверка статистических гипотез. М.: Наука.

Gilbert J., Mosteller F. (1966): Recognizing the Maximum of a Sequence // *J. American Statistic Association.* Vol. 61. P. 35–73.

Moser L. (1956): On a problem of Cayley // *Scripta mathematica.* Vol. 24. P. 298–292.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1. Прогнозирующие плотности полных семейств

Семейство	$\mathcal{G}$	$\beta_{k+1} := T^{-1}(\xi_k)\xi_{k+1}$	$g_k(\lambda) := \dfrac{\partial}{\partial\lambda} P(\beta_{k+1} < \lambda)$
1.2	Λ	ξ/M	$\dfrac{k}{k+1}\begin{cases} 0, \ \lambda \le 0; \\ 1, \ 0 < \lambda \le 1; \quad k \ge 1 \\ \lambda^{-(k+1)}, \ \lambda > 1, \end{cases}$
1.3	L	$(\xi - m)/(M - m)$	$\dfrac{k-1}{k+1}\begin{cases} (1-\lambda)^k, \ \lambda \le 0; \\ 1, \ 0 < \lambda \le 1; \quad k \ge 2 \\ \lambda^{-k}, \ \lambda > 1, \end{cases}$
2.1	C	$\xi - \bar{\xi}$	$\sqrt{\dfrac{k}{k+1}}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\dfrac{k}{k+1}\dfrac{\lambda^2}{2}\right\}, \quad k \ge 1$
2.2	Λ	$\xi/\bar{\sigma}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}(1+\lambda^2/k)^{-k/2}, \quad k \ge 1$
2.3	L	$(\xi - \bar{\xi})/\bar{s}$	$\sqrt{\dfrac{k}{\pi(k^2-1)}}\dfrac{\Gamma(k/2)}{\Gamma([k-1]/2)}(1+\dfrac{k}{k^2-1}\lambda^2)^{-k/2}, \quad k \ge 2$
3.1	C	$\xi - m$	$\dfrac{k}{k+1}\begin{cases} e^{k\lambda}, \ \lambda \le 0; \\ e^{-\lambda}, \ \lambda > 0, \end{cases} \quad k \ge 1$
3.2	Λ	$\xi/\bar{\xi}$	$\begin{cases} 0, & \lambda \le 0; \\ (1+\lambda/k)^{-(k+1)}, & \lambda > 0, \end{cases} \quad k \ge 1$
3.3	L	$\dfrac{\xi - m}{\bar{\xi} - m}$	$\dfrac{k-1}{k+1}\begin{cases} (1-\lambda)^{-k}, & \lambda \le 0, \\ (1+\lambda/k)^{-k}, & \lambda > 0, \end{cases} \quad k \ge 2$
4	Λ	$p\xi/\bar{\xi}$	$\begin{cases} 0, & \lambda \le 0; \\ \dfrac{\Gamma[(k+1)p]}{\Gamma(kp)\Gamma(p)}\left(1+\dfrac{\lambda}{kp}\right)^{-(k+1)p}\left(\dfrac{\lambda}{kp}\right)^{p-1}, & \lambda > 0; \end{cases} \quad k \ge 1$

Примечание.

1. Список семейств см. п. 1.2.1.

2. Обозначения статистик:

$$m = m(\xi^k) := \min_{1 \le i \le k} \xi_i, \qquad M = M(\xi^k) := \min_{1 \le i \le k} \xi_i,$$

$$\bar{\xi} := \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \xi_i, \quad \bar{s} := \sqrt{\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(\xi_i - \bar{\xi})^2}, \quad \bar{\sigma} := \sqrt{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\xi_i^2}.$$

Таблица 2. Производящие плотности основных семейств

Семейство	$\mathcal{G}$	$N_k(x), \quad x \in Y^k$
1.1	C	$[1-(M-m)]^{+}, \quad m < M, \; k \ge 1$
1.2	Λ	$1/(kM^k), \quad M > 0, \quad k \ge 1$
1.3	L	$\frac{1}{k(k-1)} \times \frac{1}{(M-m)^{k-1}}, \quad m < M, \quad k \ge 2$
2.1	C	$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{k-1}} \times \frac{1}{\sqrt{k}} \exp\{-(k-1)_{\bar{s}}^{2}/2\}, \quad k \ge 1$
2.2	Λ	$\frac{\Gamma(k/2)}{2(\bar{\sigma}\sqrt{\pi k})^k}, \quad \bar{\sigma} > 0, \; k \ge 1$
2.3	L	$\frac{\Gamma((k-1)/2)}{2(\bar{s}\sqrt{\pi(k-1)})^{k-1}}, \quad k \ge 2, \; \bar{s} > 0$
3.1	C	$\frac{1}{k} \exp\{-k(\bar{x}-m)\}, \quad k \ge 1, \quad \bar{x} \ge m$
3.2	Λ	$\frac{(k-1)!}{(k\bar{x})^k}, \quad k \ge 1, \quad \bar{x} > 0$
3.3	L	$\frac{(k-2)!}{k[k(\bar{x}-m)]^{k-1}}, \; \bar{x} \ge m, \; k \ge 2$
4	Λ	$\frac{\Gamma(kp)}{(\Gamma(p))^k} \left(\prod_{i=1}^{k} x_i \right)^{p-1} \frac{1}{(k\bar{x})^{kp}}, \quad \bar{x} > 0, \; k \ge 1, \; p > 0$

Поступила в редакцию
24.05.2011 г.

Fiducial Approach for the Invariant Optimal Stopping Problem

V. Z. Belenky, A. A. Zaslavsky

This paper is the continuation of (Belenky, Zaslavsky, 2011). The optimal stopping problem for an invariant family is considered. New notion “fiducial sequence” (FS) is defined. FS has an inusual dualistic property: its members have the same “physical dimension” that the observed sequence, but it is statistically equivalent to a “non-dimensional” relative sequence. This allows to formulate the problem of optimal stoping for invariant family with non-invariant criterion (that wasn’t possible earlier). Necessary formulas are given.

Keywords: invariant family, optimal stopping problem, fiducial sequence, inertness principle.