ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2012, том 48, № 1, с. 111–118

ЗАМЕТКИ И ПИСЬМА

ЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОВЫШЕНИЯ ДОХОДНОСТИ ПРИ ЖЕСТКОМ ОГРАНИЧЕНИИ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

© 2012 г. Г.Л. Венедиктов, В.М. Кочетков

(Санкт-Петербург)

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время получило значительное развитие математическое моделирование микроэкономических процессов, являющееся мощным инструментом анализа и прогнозирования в разнообразных областях экономики (Орлов, 2002; Тихомиров, Дорохина, 2003). Однако для ряда случаев хорошо разработанные методы (например, метод наименьших квадратов применительно к линейным моделям) не могут быть использованы в условиях, когда реальная модель должна учитывать предельные нормы предложения. Подобные условия возникают в частности тогда, когда предложение жестко ограничено в силу естественных ресурсных причин. Следует отметить, что такие явления характерны для широкого круга экономико-социальных сфер, где по объективным причинам ограничено, например, число потребителей, которые могут быть обслужены (культурные и зрелищные учреждения, предприятия общественного питания, гостиницы, пассажирский автобусный, железнодорожный и авиатранспорт и т.п.). Поиск условий ценового равновесия между спросом и предложением для экономико-социальных субъектов подобного типа имеет ярко выраженную специфику.

Для определенности далее будем говорить о железнодорожном транспорте, хотя рассматриваемые ниже подходы могут использоваться применительно ко всем ситуациям, которым в силу объективных причин свойственно жесткое ограничение на объем предложения.

Рассмотрим простую схему: пусть поезд содержит вагоны одного класса и цена билета равна p. При низкой цене все билеты будут раскуплены и свободных мест не останется. Дальнейшее уменьшение цены не изменит числа пассажиров из-за ограниченности числа мест. При увеличении цены, начиная с некоторого значения, которое будем называть граничной ценой и обозначать $p_{\text{гр}}$, возникает тенденция уменьшения числа пассажиров, согласных на поездку по предложенной цене. Наконец, можно рассмотреть гипотетический случай, когда при чрезмерном увеличении цены ни один пассажир не приобретет билета. Цену $p_{\text{пр}}$, отвечающую такой ситуации, назовем предельной ценой.

Определим населенность[1] N как отношение числа пассажиров к числу предложенных мест. В силу сказанного выше зависимость населенности от цены p в качественном отношении описывается графиком, представленным на рис. 1. На рисунке штриховой линией показана аппроксимация степенной функцией, описывающей зависимость $N(p)$ при ценах, близких к граничной. Как будет видно из дальнейшего изложения, в задачах ценовой оптимизации именно эта область функции $N(p)$ представляет наибольший интерес.

2. ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Указанная степенная аппроксимация зависимости $N(p)$ аналитически задается соотношением

$$N(p)=\begin{cases}1,\ p\le p_{\text{гр}};\\ 1-((p-p_{\text{гр}})/(p_{\text{пр}}-p_{\text{гр}}))^{\alpha};\\ 0,\ p\ge p_{\text{пр}},\end{cases} \qquad (1)$$

[1] Термин, принятый в железнодорожном пассажирском сообщении.

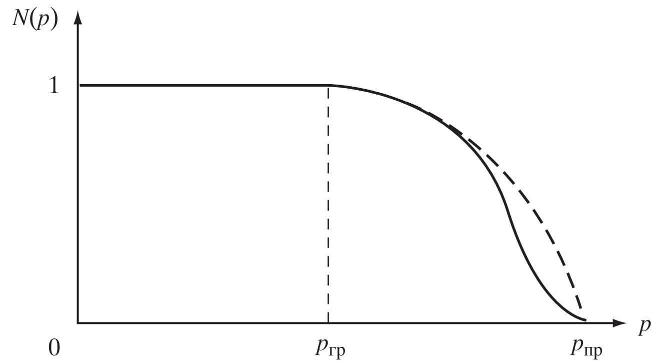

Рис. 1. Качественный вид зависимости населенности N от цены p

где величина α, называемая далее показателем крутизны, определяет скорость спада при ценах, больших граничной. На практике параметры $p_{\text{гр}}$, $p_{\text{пр}}$ и α могут находиться из анализа продаж, а также путем обработки данных анкетных опросов пассажиров по специально построенным методикам.

Для дальнейшего оказывается существенным, что зависимость населенности от цены не претерпевает излома в области граничной цены, а описывается функцией, имеющей непрерывную производную. Этот факт легко обосновать, если учесть статистику спроса. Можно показать, что если спрос (число желающих ехать по цене p) характеризуется нормальным распределением со средним $\overline{N}(p)$ и дисперсией $\sigma^2(p)$, а число мест ограничено величиной N_0, то результирующая зависимость математического ожидания итогового спроса в окрестности граничной цены задается выражением

$$M(p) = N_0 + [\overline{N}(p) - N_0]\Phi\left(\frac{N_0 - \overline{N}(p)}{\sigma(p)}\right) - \\ - \frac{\sigma(p)}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{[N_0 - \overline{N}(p)]^2}{2\sigma^2(p)}\right), \qquad (2)$$

где функция Φ представляет собой функцию стандартного нормального распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp(-t^2/2)\,dt.$$

При аналитических зависимостях $\overline{N}(p)$ и $\sigma^2(p)$ в окрестности граничной цены функция (2) является аналитической и в силу этого имеет конечные производные всех порядков, что оправдывает сделанное утверждение относительно свойств гладкости кривых на рис. 1.

Величина дохода, отнесенная к одному пассажирскому месту, задается равенством $D(p) = pN(p)$. На графике рис. 2 совместно представлены зависимости относительного дохода $D_{\text{отн}}(p)=D(p)/D(p_{\text{гр}})$ (сплошная линия) и населенности $N(p)$ (штриховая линия). Доход имеет максимум при цене, которую далее будем называть оптимальной и обозначать $p_{\text{опт}}$. Оптимальная цена находится из условия $dD(p)/dp = 0$, что приводит к уравнению

$$1 - \left(\frac{p_{\text{опт}} - p_{\text{гр}}}{p_{\text{пр}} - p_{\text{гр}}}\right)^{\alpha} = \frac{\alpha p_{\text{опт}}(p_{\text{опт}} - p_{\text{гр}})^{\alpha-1}}{(p_{\text{пр}} - p_{\text{гр}})^{\alpha}}. \qquad (3)$$

Решение этого уравнения легко находится методом последовательных приближений (Бахвалов, Жидков, Кобельков, 2001, глава 6).

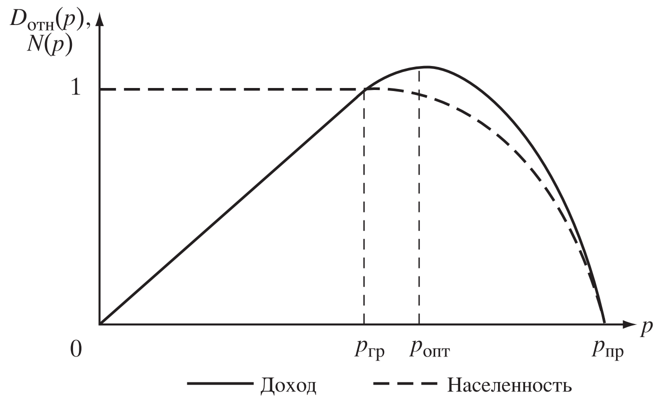

Рис. 2. Доход и населенность как функция цены p

Из представленных соотношений и графиков следуют два вывода: 1) оптимальная цена выше граничной; 2) населенность при оптимальной цене меньше единицы[2].

При тех значениях показателя крутизны α, которые могут быть реализованы на практике, оптимальная цена гораздо ближе к граничной, чем к предельной цене. По этой причине заметное расхождение между реальной зависимостью населенности от цены и ее аппроксимацией, имеющее место в области предельной цены (см. рис. 1), не играет роли при определении условий максимизации дохода.

Параметры, задающие зависимость населенности от цены, могут находиться из анализа истории продаж. Если в процессе продажи цена заметно изменялась и было зафиксировано связанное с этим изменение спроса, это дает возможность определить как граничную цену, так и параметр крутизны. Оценка предельной цены может производиться на основе анкетного опроса пассажиров и последующего использования метода PSM (Van Westendorp, 1976), а также уточняющей процедуры Ньютона–Миллера–Смита (Newton, Miller, Smith, 1993).

Естественный алгоритм определения искомых параметров состоит в процедуре минимизации квадратичной невязки между модельными значениями населенности, задаваемой соотношением (1), и реально наблюдаемыми значениями населенности. Указанная процедура отвечает нелинейной модификации метода наименьших квадратов (о методе наименьших квадратов см. например, в книге (Тихомиров, Дорохина, 2003, глава 2)).

3. ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Следует отметить, что во многих случаях нахождение с достаточной точностью трех параметров – граничной и предельной цен, а также показателя крутизны – оказывается недостижимым. В этих условиях целесообразно воспользоваться более грубой моделью, содержащей лишь два параметра. В качестве такой модели можно использовать зависимость

$$N(p) = \exp(-[p/p_0]q). \qquad (4)$$

На рис. 3 приведены три рассчитанные по формуле (4) кривые $N(p)$, отвечающие различным сочетаниям двух параметров p_0 и q и обеспечивающие различную величину отношения предельной цены к граничной. Как видно из данного рисунка, модель, определяемая формулой (4), с качественной стороны хорошо соответствует ожидаемой зависимости населенности от цены (сплошная линия на рис. 1).

Для модели (4) следует выбирать уровни населенности $N_{гр}$ и $N_{пр}$, которые отвечают граничной и предельной ценам, – первое значение близко к единице, а второе к нулю. Далее в расчетах принимались значения $N_{гр}$= 0,975, $N_{пр}$= 1 – $N_{гр}$ = 0,025.

[2] Применительно к зрелищным мероприятиям это означает, например, что максимальный доход достигается при не полностью заполненном зале и т.п.

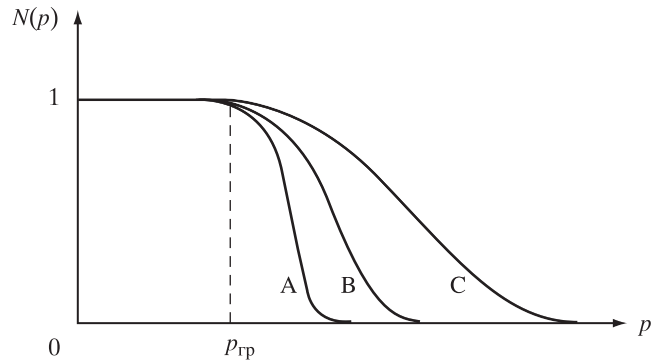

Рис. 3. Различные виды зависимости населенности от цены, даваемые формулой (4).
Отношение предельной цены к граничной для кривых A, B и C равно соответственно 1,5; 2 и 3

В дальнейшем существенную роль играет параметр $L = \ln[\ln(1/N_{гр})]\ln[\ln(1/N_{пр})]$. Для принятых уровней $N_{гр}$ и $N_{пр}$ имеем $L = -2{,}81635$. Уровням $N_{гр}$ и $N_{пр}$ соответствуют, согласно (4), значения граничной и предельной цены:

$$p_{гр} = p_0(\ln[1/N_{гр}])^{1/q}, \quad p_{пр} = p_0(\ln[1/N_{гр}])^{1/qL}. \tag{5}$$

Поскольку L отрицательно, то параметр p_0 всегда лежит между граничной и предельной ценой. Параметры p_0 и q могут выражаться через граничную и предельную цену:

$$p_0 = (p_{пр}^L/p_{гр})^{1/(L-1)}, \quad q = \frac{\ln(\ln(1/N_{гр}))}{\ln(p_{гр}) - \ln(p_0)} = \left(\frac{L-1}{L}\right)\frac{\ln(\ln(1/N_{гр}))}{\ln(p_{гр}/p_{пр})}. \tag{6}$$

Оптимальная цена, отвечающая максимуму дохода $D(p) = pN(p)$, имеет значение

$$p_{опт} = p_0(1/q)^{1/q}, \tag{7}$$

при этом населенность N, отвечающая оптимальной цене, равна

$$N(p_{опт}) = \exp(-1/q). \tag{8}$$

Таким образом, доход на одно место при оптимальной цене определяется равенством

$$D_{опт} = p_0(1/q)^{1/q}\exp(-1/q) = p_0(qe)^{-1/q}. \tag{9}$$

Существенным свойством моделей (1) и (4) является их нелинейность, отражающая тот факт, что вблизи граничной цены населенность от постоянного значения, равного единице, начинает плавно уменьшаться. По этой причине для исследования ценовой зависимости при ограниченном предложении хорошо изученные линейные модели (Тихомиров, Дорохина, 2003, главы 2–6; Орлов, 2002, § 1.7–1.9) являются непригодными. При использовании же нелинейных моделей приходится применять специфические способы реализации метода наименьших квадратов.

Рассмотрим задачу нахождения параметров модели (4) по эмпирическим данным. Пусть по истории продаж известны K ценовых уровней p_i и отвечающие им населенности N_i. В соответствии с методом наименьших квадратов параметры модели p_0 и q находятся как результат минимизации нелинейной формы

$$S(p_0, q) = \sum_{i=1}^{K}[N_i - \exp(-\{p_i/p_0\}^q)]^2. \tag{10}$$

Для получения из соотношения (10) искомых величин p_0 и q можно воспользоваться прямыми методами поиска минимума функции двух переменных (Бахвалов, Жидков, Кобельков, главы 4, 7). Однако задача чрезвычайно упрощается и решение находится в явной форме, если применить искусственный прием, суть которого состоит в следующем.

В формуле (10) невязка между населенностями N_i и значениями величин $\exp(-[p_i/p_0]^q)$ может быть заменена на невязку любых монотонных функций от них. В качестве одного из вариантов такой невязки можно выбрать двойной логарифм от обратных величин, а именно от $1/N_i$ и $\exp([p_i/p_0]^q)$. Такой подход позволяет перейти от минимизации функции (10) к минимизации выражения

$$S_1(p_0, q) = \sum_{i=1}^{K} [\ln(\ln(1/N_i)) - q\ln\{p_i/p_0\}]^2. \tag{11}$$

Одним из условий существования минимума $S_1(p_0, q)$ является равенство нулю производной $\partial S_1/\partial p_0$. Использование этого условия позволяет выразить p_0 через q:

$$p_0 = \exp\left(\frac{1}{K}\left[\sum_{i=1}^{K}\ln(p_i) - \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{K}\ln(\ln[1/N_i])\right]\right). \tag{12}$$

Для выражения (10) на линии минимума по переменной p_0 учет соотношения (12) дает формулу:

$$S_1(p_0, q) = \sum_{i=1}^{K} \{\ln(\ln(1/N_i)) - M[\ln(\ln(1/N))] - q(\ln(p_i) - M[\ln(p)])\}^2, \tag{13}$$

где M – выборочное среднее значение:

$$M[\ln(\ln(1/N))] = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\ln(\ln(1/N_i)), \quad M[\ln(p)] = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\ln(p_i).$$

Используя условие $\partial S_1/\partial q = 0$, из соотношения (13) находим q:

$$q = \sum_{i=1}^{K} \{\ln(\ln(1/N_i)) - M[\ln(\ln(1/N))](\ln(p_i) - M[\ln(p)])\} / \sum_{i=1}^{K} (\ln(p_i) - M[\ln(p)])^2. \tag{14}$$

Второй параметр модели – величина p_0 – находится теперь при подстановке соотношения (14) в формулу (12).

При сближении выборочных населенностей N_i величина p_0, определяемая формулой (12), неограниченно возрастает, а функция S_1 стремится к постоянному значению, пропорциональному дисперсии величин $\ln(\ln(1/N_i))$:

$$S_1 \to \sum_{i=1}^{K}\left[\ln(\ln(1/N_i)) - \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{K}\ln(\ln(1/N_j))\right]^2. \tag{15}$$

Таким образом, если все величины N_i будут равными, то функция S_1 равна нулю и решение для p_0 и q найдено быть не может. Этот факт имеет наглядное объяснение: модель (4) при конечных значениях параметров p_0 и q не может соответствовать постоянной величине населенности.

Более подробный анализ, учитывающий разложение в ряд Тейлора по малому параметру $1/\ln(p_0)$, показывает, что при уменьшении дисперсии населенностей N_i для искомых величин имеют место соотношения $p_0 \to \infty$, $q \to 0$.

4. МОДЕЛЬ, УЧИТЫВАЮЩАЯ ВНЕШНИЕ ФАКТОРЫ

В разд. 3 предполагалось, что населенность зависит лишь от цены p, которой можно управлять с целью оптимизации дохода. В действительности на населенность оказывают влияние и другие факторы, в частности, социально-экономические – уровень платежеспособного спроса населения, уровень безработицы, инфляционный показатель и др. Указанные факторы будем называть внешними. При расчете оптимальных цен управлять этими факторами, в отличие от цены, нельзя, но их следует учитывать в модели.

С целью учета внешних факторов будем считать, что параметры модели p_0 и q представлены линейными выражениями

$$p_0 = u_0 + \sum_{j=1}^{R} u_j f_j, \quad q = v_0 + \sum_{j=1}^{R} v_j f_j, \tag{16}$$

где R – число учитываемых факторов; величины f_j характеризуют силу действия фактора; u_j и v_j – искомые коэффициенты. В такой постановке регрессионная задача сводится к минимизации формы

$$S_2 = \sum_{i=1}^{K} \left[\ln(\ln(1/N_i)) - \left(v_0 \sum_{j=1}^{R} v_j f_j^{(i)} \right) \ln \left\{ p_i / \left(u_0 + \sum_{j=1}^{R} u_j f_j^{(i)} \right) \right\} \right]^2, \tag{17}$$

по переменным u_j и v_j. В (17) через $f_j^{(i)}$ обозначена сила действия фактора j в выборке с номером i.

В отличие от случая, когда действие внешних факторов не учитывалось (разд. 3), здесь не удается получить замкнутых выражений для параметров модели. Тем не менее использование применительно к функции (17) прямых численных методов минимизации (в частности, последовательно применяемого метода градиентного спуска (Бахвалов, Жидков, Кобельков, 2001, главы 4, 7) позволяет определять коэффициенты регрессии u_j и v_j и тем самым выявлять влияние внешних факторов на населенность.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ НА ОСНОВЕ ПРЕДЛОЖЕННЫХ МОДЕЛЕЙ

Для трехпараметрической модели при известных параметрах $p_{\text{гр}}$, $p_{\text{пр}}$ и α расчет оптимальных цен производится путем численного решения уравнения (3). Эти расчеты несложные и не требуют комментариев. Как показывают оценки, основанные на решении уравнения (3) и последующем расчете дохода, применительно к условиям пассажирского железнодорожного транспорта использование оптимальных цен позволяет повысить доход на 15–20% по сравнению с тем значением дохода, когда цена равняется граничной.

При недостатке данных, задающих величины, используемые в трехпараметрической модели, следует применять более простую двухпараметрическую модель.

Были проведены серии вычислений для проверки предлагаемых методов расчета для двухпараметрической модели. Один из типичных примеров расчета состоял в следующем. При помощи генератора случайных чисел формировались выборочные значения цены и населенности. В качестве ценовых уровней были выбраны четыре значения $p_i = 1{+}0{,}8 rand_i$ (здесь и далее через *rand* обозначается случайное число, равномерно распределенное в интервале от нуля до единицы). Поскольку, согласно рис. 1, населенность имеет тенденцию уменьшения с ростом цены, то изменение населенности задавалось случайными числами с математическим ожиданием, уменьшающимся с ценой p_i. Таким образом, для населенностей выбирались 10 значений для каждого ценового уровня p_i в соответствии с формулой $N_{ij} = \min[1 - (p_i - 1)^2 - 0{,}3\ \mathrm{rand}_j;\ 0{,}99]$. Здесь функция двух аргументов min соответствует наименьшему из своих аргументов и служит для обрезания случайных значений населенности, которые могут превышать единицу.

Расчеты параметров модели проводились по формулам (14) и (12), после чего по формуле (4) строилась регрессионная кривая. Результаты описанного расчета представлены на рис. 4, из которого видно, что рассчитанная регрессионная линия для модели (4), выражающая зависимость населенности от цены, хорошо ложится на выборочные (случайные) значения населенности.

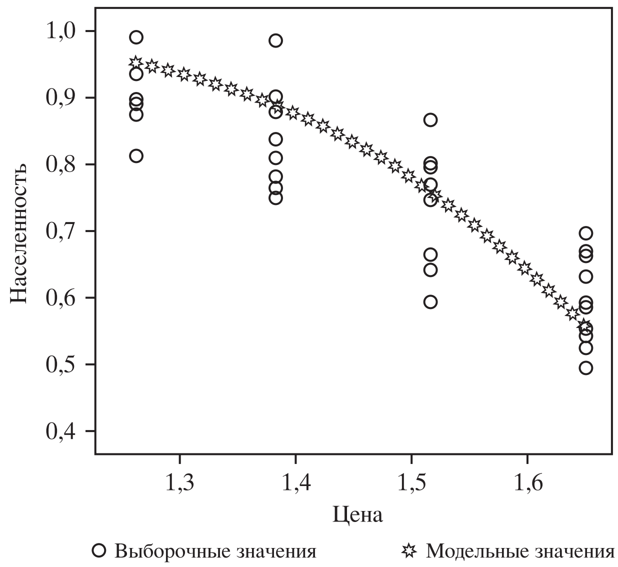

Рис. 4. Пример соответствия между выборочными значениями населенности и видом модельной зависимости, описываемой формулой (4)

Применительно к модели, учитывающей внешние факторы, для которой минимизируемая функция описывается формулой (17), были произведены расчеты с использованием методов минимизации в многомерном пространстве. Для этого была создана программа поиска минимума, основанная на последовательных градиентных спусках[3].

Изложим результаты одного из типичных проверочных расчетов. Для минимизируемой функции S_2 в формуле (17) были выбраны два изучаемых фактора ($R = 2$). Объем выборочных данных был одинаковым для населенности, цены и силы действия обоих факторов и составлял 40 для каждой величины. При этом с целью сверки результатов выборочные значения населенности и цены задавались теми же, что и для описанного выше расчетного варианта, относящегося к модели, не учитывающей внешние факторы. Глобальный минимум для функции (17) при помощи упомянутой программы был найден за 710 шагов при заданной относительной точности всех искомых шести величин не хуже 5×10^{-3}. После того как параметры модели найдены – прямым расчетом по формулам (14) и (12), либо путем минимизации (17) – оптимальные цены и оптимальный доход для двухпараметрической модели могут быть рассчитаны по формулам (7) и (9).

6. ВЫВОДЫ

Описанные расчетные модели позволяют находить оптимальные цены, реализующие максимальный доход в ситуациях, когда в силу естественных причин предложение резко ограничено.

Все рассмотренные модели ценовой оптимизации оказываются нелинейными по цене, что адекватно отражает специфику ограничения предложения.

Модели, не учитывающие внешние (социально-экономические) факторы, допускают расчет оптимальных цен по простым формулам без использования сложных специализированных программ. Учет внешних факторов требует применения специально разрабатываемых программ минимизации в многомерном пространстве.

Численные оценки выигрыша в доходе, получаемого от применения оптимальных цен, показывают высокую значимость приближения цен к оптимальным. Так, например, внедрение оп-

[3] Идея программы использует последовательные градиентные спуски при движении по “дну оврага” – см. (Бахвалов, Жидков и Кобельков, 2001, с. 342–344).

тимальных цен на пассажирском направлении Санкт-Петербург–Москва обеспечит ОАО "РЖД" дополнительный доход в размере до 2,5 млрд руб. в год. Следует при этом обратить внимание на тот факт, что оптимизация цен на проезд отнюдь не означает их повышение. Практика расчетов показала целесообразность как повышения, так и понижения цен в различные периоды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. (2001): Численные методы. М., СПб: Физматлит.

Орлов А.И. (2002): Эконометрика. М.: Экзамен.

Тихомиров Н.П., Дорохина Е.Ю. (2003): Эконометрика. М.: Экзамен.

Newton D., Miller J., Smith P. (1993): A Market Acceptance Extension to Traditional Price Sensitivity Measurement. N.Y.: Proceedings of the American Marketing Association Advanced Research Techniques Forum.

Van Westendorp P. (1976): NSS-Price Sensitivity Meter (PSM) – A New Approach to Study Consumer Perception of Price. Montreal: Proceedings of the ESOMAR Congress.

Поступила в редакцию
22.04.2010 г.