ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2012, том 48, № 1, с. 132–133

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

Yuri Kabanov, Mher Safarian. “MARKETS WITH TRANSACTION COSTS. MATHEMATICAL THEORY”. SERIES: SPRINGER FINANCE, 2009, XIV, 294 P. BERLIN, LONDON, N.Y.: SPRINGER, HEIDELBERG DORDRECHT.

Одной из основных задач финансовой математики является оценивание так называемых деривативов – производных ценных бумаг. Наиболее простым примером является опцион покупателя – контракт с фиксированной ценой исполнения K, по которой покупатель получает акцию в случае, если ее рыночная цена превзошла уровень K. Методика оценивания была предложена в знаменитой статье Блэка и Шоулса (1973), которые представили обоснования того, что в качестве справедливой цены опциона можно рассматривать величину начального капитала самофинансируемого портфеля, стоимость которого в момент исполнения контракта равна фактическому контрактному платежу.

Блэк и Шоулс рассматривали идеализированную модель, в которой относительные колебания курса акций следуют винеровскому процессу со сносом, а динамика портфеля описывается стохастическим интегралом по процессу цены. Теорема Гирсанова позволяет заменить исходную вероятностную меру на меру, относительно которой винеровский процесс не имеет сноса (т.е. является мартингалом). Остается вспомнить известную теорему о предсказуемом представлении, утверждающую, что случайная величина с нулевым средним, которая является функционалом от винеровского процесса, может быть выражена стохастическим интегралом. Результат: цена есть математическое ожидание выплаты по контракту, вычисленное по мартингальной мере. Отклонение от этой цены в ту или иную сторону приводит к арбитражу, т.е. возможности получения на рынке безрискового дохода.

Работа Блэка и Шоулса вызвала лавинообразное развитие финансовой математики и финансовой инженерии (ориентированной на конкретные приложения), в которых концепция мартингальной меры является фундаментальной, более точно – фундаментальной во всех моделях бестрансакционных (операционных) издержек. Ее использование в более реалистических моделях, учитывающих комиссионные, налоги и т.д., так называемых моделях с трением, наталкивалось на значительные трудности. Прорыв был совершен в небольшой заметке Ю.М. Кабанова, опубликованной в 1999 г. в журнале *Finance and Stochastics*, и последовавшей за ней серии его работ с соавторами. В этих работах была предложена совершенно новая концептуальная база для моделей с пропорциональными издержками. Оказалось, что, наряду с описанием активов (например, авуаров в иностранных валютах) в стоимостном выражении, целесообразно использовать также их описание в номинальном выражении, – иными словами, в “физических” единицах. Принципиальная разница между этими описаниями состоит в том, что стодолларовая банкнота и завтра остается стодолларовой банкнотой, в то время как ее стоимость в рублях изменится с соответствии с динамикой обменного курса! Фундаментальную роль в построенной теории играют состоятельные ценовые системы – мартингалы, эволюционирующие в двойственных (к конусам платежеспособности) конусах именно в номинальном выражении. В случае отсутствия трения состоятельные ценовые системы получаются путем умножения обычных цен (котировок) на стохастические дефляторы – плотности мартингальных мер. Таким образом, классическая теория финансовых рынков без трения оказывается специальным частным случаем.

Рецензируемая книга является итоговой монографией, в которой дается систематическое изложение теории финансовых рынков при наличии пропорциональных транзакционных издержек.

Ее вводная глава, ориентированная в первую очередь на непосредственные приложения в финансовой инженерии, посвящена стратегии Леланда–Лотта.

Уже в пионерской работе Блэка и Шоулса отмечалось, что расхождение между теоретической ценой, задаваемой выведенной ими формулой, и реальной ценой опциона может быть связано, в числе прочих факторов, с трансакционными издержками. В 1985 г. Хайне Леланд предложил метод компенсации последних. Идея метода проста – рост волатильности влечет за собой рост цены опциона. Поэтому следует использовать формулы не с реальной волатильностью, а завышенной – в соответствии с некоторым рецептом. Метод получил широкое распространение как в связи с улучшением точности хеджирования опционов, так и с его необычайной простотой. Статья Леланда содержала одну-единственную теорему: при постоянных пропорциональных трансакционных издержках терминальное значение портфеля с периодическим реструктурированием сходится к выплате по опциону. Немедленно появились работы, в которых численный анализ подтверждал этот результат, хотя и отмечалось увеличение ошибок в определенной ситуации. В 1993 г. Лотт в своей диссертации доказал, что в случае, когда трансакционные издержки стремятся к нулю со скоростью, обратно пропорциональной квадратному корню из числа реструктурирований, ошибка хеджирования стремится к нулю (это утверждение было сформулировано у Леланда в сноске без всяких комментариев). В этом контексте статья Кабанова и Сафаряна, появившаяся в журнале *Finance and Stochastics* в 1997 г. (когда Леланд был президентом American Finance Association), оказалась сенсационной. В ней было показано, что при издержках, не зависящих от числа реструктурирований хеджирующего портфеля, нет сходимости, и вычислена возникающая при этом ошибка хеджирования. При стремлении же издержек к нулю с любой скоростью ошибка также стремится к нулю, что позволяет использовать на практике метод Леланда. В монографии, помимо этого, приводятся и более тонкие результаты, как, например, асимптотика убывания среднеквадратичного уклонения ошибки и диффузионная аппроксимация последней.

Вторая глава монографии, объемом чуть более сорока страниц, содержит теорию арбитража для финансовых рынков без трения. Ее чтение может доставить удовольствие самому взыскательному читателю. Речь идет, главным образом, о "первой фундаментальной теореме теории расчетов финансовых активов" (см. Ширяев А.Н. "Основы стохастической финансовой математики". М.: Фазис, 1998). В формулировке для "широкой публики" она выглядит так: свойство отсутствия арбитража (т.е. возможности получить безрисковый доход) равносильно наличию эквивалентной мартингальной меры. В случае конечного числа состояний природы это утверждение мгновенно вытекает из леммы Штимке (результат был получен в работе Ю.М. Кабанова и К. Стрикера, опубликованной в *Journal of Mathematical Economics* в 2001 г.). Для математиков гораздо более интересна "расширенная" формулировка (для произвольного вероятностного пространства), включающая добрую дюжину эквивалентных условий, – известная под названием "теорема Даланга–Мортона–Виллингера". В книге приводится доказательство по схеме, разработанной Кабановым и Стрикером для применения к моделям с трансакционными издержками, однако анализируются и другие методы доказательств. Во второй главе можно найти много интересных результатов: теоремы хеджирования для европейских и американских опционов, теоремы об опциональном разложении и структуре множеств мартингальных мер, критерии безарбитражности для моделей с бесконечным горизонтом, а также с неполной информацией. Замкнутое изложение позволяет рекомендовать вторую главу монографии в качестве материала для продвинутых курсов лекций по финансовой математике.

Центральное место в монографии, безусловно, занимает третья глава, где дается систематическое описание теории. Изложение начинается с простейшей модели в дискретном времени, в которой возможен обмен любого актива на любой другой с пропорциональными трансакционными издержками, заданными матрицей коэффициентов (модель валютного рынка). Вводятся понятия конуса платежеспособности и двойственного к нему.

Дается описание динамики портфеля в монетарном выражении как решение системы линейных разностных уравнений с аддитивным управлением. Множество терминальных значений такого портфеля представляет собой хорошо известный в теории оптимального управления объект – множество достижимости. Динамика же портфеля в номинальном выражении (т.е. в физических единицах) выглядит гораздо проще – правая часть системы зависит только от управления. Читателю сразу становится ясно, почему идея векторизации, несмотря на всю свою простоту, оказалась революционной: в представлении в терминах физических единиц терминальное значение портфеля, взятое со знаком минус, есть просто сумма произвольных случайных величин, принимающих значения в конусах платежеспособности! Именно это и есть естественное описание, скрытое в традиционной финансовой математике, которая работает со скалярным процессом – суммой компонент векторного портфеля в монетарном выражении. Векторное представление позволяет использовать хорошо развитый технический аппарат, широко используемый в математической экономике: конечномерный выпуклый анализ и теорию многозначных отображений.

Слабое свойство безарбитражности может быть сформулировано как пересечение по нулю множества достижимости (без начального капитала) с множеством случайных векторов со значениями в первом ортанте. Применение леммы Штимке позволяет заключить, что в модели с конечным числом состояний природы это свойство эквивалентно существованию мартингала, принимающего значения в конусах, двойственных к конусам платежеспособности. Этот результат можно рассматривать как отправную точку теории, богатой и изобилующей сюрпризами. К таким сюрпризам – для читателя, чья интуиция основывается на теории рынков без трения, – можно отнести неожиданный факт, что указанный критерий для модели с двумя активами остается в силе и для бесконечного числа состояний природы, но перестает выполняться в моделях с числом активов, большим трех.

Весьма важным свойством модели является наличие мартингала, эволюционирующего в относительной внутренности двойственных конусов, называемого строго состоятельной ценовой системой. Его существование эквивалентно отсутствию арбитража и при более благоприятных инвестиционных возможностях. В геометрической формулировке такое робастное отсутствие арбитража означает, что слабое свойство безарбитражности выполняется и в модели, определяемой конусами платежеспособности с более широким раствором.

Важность состоятельных ценовых систем (consistent price systems) проявляется в теоремах хеджирования. В них речь идет об описании множества начальных капиталов, достаточных для генерации самофинансирующихся портфелей, терминальная стоимость которых покрывает контрактное обязательство. В классической теории – это полубесконечный отрезок, который задается своим левым концом. В теории финансовых рынков с трансакционными издержками контрактное обязательство (“корзина” активов) является вектором, а достаточные стартовые капиталы образуют выпуклое множество в многомерном пространстве. Теоремы хеджирования дают его двойственное описание. С точки зрения экономики речь идет о существовании “цен”, которые позволяют сравнить текущую стоимость портфеля и будущей контрактной выплаты. Для опционов европейского типа таковыми оказываются состоятельные ценовые системы. И снова сюрприз – для опционов американского типа с моментом исполнения, определяемым опционодержателем, подобное утверждение не имеет места. Для сравнения текущей и будущей стоимости не в фиксированный, а в случайный момент времени, как это имеет место в американском опционе, требуется сравнение по классу когеррентных ценовых систем, более широкому, чем состоятельные.

Рамки рецензии не позволяют детально изложить содержание третьей главы, в которой сосредоточены в концентрированном виде результаты нескольких десятков статей, опирающихся иногда на весьма сложный математический аппарат. Отметим только, что в ней излагаются теоремы хеджирования с неполной и запаздывающей информацией, арбитраж второго рода, разбираются наряду с моделями в дискретном времени и модели с непрерывным временем, для которых теория является гораздо более деликатной. Изложение иллюстрируется многочисленными контрпримерами.

Четвертая глава монографии посвящена оптимальному управлению в многомерной модели с трансакционными издержками – так называемой проблеме инвестиций и потребления. Она начинается с напоминания классического результата Мертона для степенной функции полезности, известного также как Mutual Fund Theorem. С математической точки зрения он “тривиален”: функция Беллмана задачи наследует однородность фунции полезности и, значит, может отличаться от функции полезности только мультипликативной константой. Поэтому, если функция Беллмана конечна, уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана редуцируется к алгебраическому, из которого эта константа и находится. Иными словами, в данном случае применение верификационной (проверочной) теоремы является рутинным упражнением. Дело обстоит иначе в присутствии трансакционных издержек. Поскольку функция Беллмана не является гладкой, проверочная теорема не работает. Тем не менее можно показать, что она удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана в смысле вязкого решения (viscosity solution). Доказательство этого факта оказывается весьма сложным. В четвертой главе предлагается своего рода теория вязких решений “для чайников”, иными словами, выжимка, достаточная для вывода уравнения для рассматриваемой специальной задачи. Геометрический формализм, введенный в предыдущей главе, позволяет работать с моделью весьма общего вида. Вывод уравнения основывается на принципе динамического программирования, который приведен, в отличие от многих работ в данной области, с полным доказательством. В задаче с двумя активами дается анализ построенного оптимального решения и вычисляется асимптотика функции Беллмана, когда трансакционные издержки стремятся к нулю.

Наконец, в “инструментальном ящике” – двадцатистраничном Приложении – приводятся некоторые недавние или малоизвестные математические результаты, систематически используемые в книге (теорема фон Вайцзеккера, теорема двойственности в пространстве случайных векторов, характеризация множеств, допускающих представление Кастэна, и др.).

Рецензируемая книга является первой и единственной в мировой литературе монографией, посвященной математическим моделям финансовых рынков, учитывающим трансакционные издержки. Безусловно, она будет полезной не только специалистам в теории финансов, как теоретикам, так и практикам, но и исследователям, работающим в области математической экономики. Ее перевод на русский язык будет весьма желательным.

В.И. Аркин