ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2012, том 48, № 2, с. 128–132

ЗАМЕТКИ И ПИСЬМА

КЛЮЧЕВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ОПТИМИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ НЕФТЕПЕРЕРАБАТЫВАЮЩИХ ПРЕДПРИЯТИЙ

© 2012 г. М.Ю. Петухов

(Нижний Новгород)

ВВЕДЕНИЕ

Важнейшим элементом практического использования методов линейного программирования (ЛП) является параметрический анализ математической модели ЛП. Как известно, если математическая модель хорошо отображает действительность, то при малых изменениях параметров у нее, в общем случае, должны сохраняться те черты, которые характеризуют поведение рассматриваемой модели. Такие системы в качественной теории дифференциальных уравнений получили название "грубых" (Андронов, Витт, Хайкин, 1959). Из теории катастроф известно (Арнольд, 1990), что в ЛП-задачах нет непрерывной зависимости решения от параметров системы, решение при определенных значениях параметров меняется скачкообразно. Тем не менее изменение решения может быть настолько велико, что оно не имеет физического смысла.

Значительную актуальность методы ЛП приобрели в нефтепереработке, специфика моделирования которой заключается в наличии сложной – громоздкой математической модели (используется около 10^4 переменных), что требует применения специальных программ и разработки специальных критериев для определения корректности и чувствительности модели (Колесников, Антонов, 2007; Артемьев, Соркин, Хохлов, 2001).

Традиционно исследование влияния параметров ЛП системы на ее оптимальное решение называется анализом на чувствительность (см., например, (Таха, 2001, глава 2, 4)), который в основном заключается в исследовании влияния изменений коэффициентов целевой функции (ЦФ) и правых частей матрицы условий на качественное поведение оптимального решения. Особый интерес представляет параметрическое воздействие на систему, при котором небольшое изменение параметра приводило бы к значительному изменению максимума целевой функции (Кувыкин, Кувыкина, Петухова, 2010). Поиск таких значений параметров, при которых модель нефтеперерабатывающего предприятия становится "негрубой", является основной целью настоящей работы.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ НЕФТЕПЕРЕРАБАТЫВАЮЩЕГО ПРЕДПРИЯТИЯ

Запишем классическую задачу ЛП для оптимизации ассортимента товарной продукции $x = (x_1, ..., x_n)$:

$$L = \sum_j c_j x_j \to \max, \quad j = 1, ..., n, \tag{1}$$

$$\sum_j a_{ij} x_j \le (\ge)\, b_i, \quad i = 1, ..., m, \tag{2}$$

$$\forall j, \; x_j \ge 0. \tag{3}$$

Одна из особенностей моделирования нефтеперерабатывающего производства заключается в том, что товарная продукция – это смесь различных компонентов (полуфабрикатов) и должна соответствовать стандартам качества по определенным в ГОСТ, ТУ, СТО свойствам. Для автомобильного бензина, например, таковыми являются октановое число, содержание ароматики и т.д. (ГОСТ Р 51866-2002, 2002). Последнее и приводит к необходимости дополнить классическую систему ЛП (1)–(3) ограничениями следующего вида:

$$\bar{\lambda}_j^{(k)} x_j \leq (\geq) \sum_p \lambda_{jp}^{(k)} x_{jp}, \quad k = 1, ..., l. \tag{4}$$

Здесь x_{jp} – компоненты смешения товарного продукта x_j, $\lambda_{jp}^{(k)}$ – значение показателя качества компонента x_{jp}, $\bar{\lambda}_j^{(k)}$ – критическое значение показателя качества с номером k (например, ограничение по ГОСТ, ТУ, СТО) продукта x_j:

$$x_j = \sum_p x_{jp} \quad \forall p, \ x_{jp} \geq 0. \tag{5}$$

КЛЮЧЕВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ОПТИМИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим влияние ограничений (4) на поведение оптимального значения целевой функции. Для этого перепишем систему (4) для продукта x_j в виде:

$$\sum_p (\bar{\lambda}_j^{(1)} - \lambda_{jp}^{(1)}) x_{jp} \leq (\geq)\, 0\,, \tag{6}$$

$$\sum_p (\bar{\lambda}_j^{(1)} - \lambda_{jp}^{(1)}) x_{jp} \leq (\geq)\, 0.$$

Геометрический смысл системы (6) заключается в определении выпуклой области многомерного пространства, ограниченной “многомерными плоскостями” с соответствующими векторами, перпендикулярными плоскости:

$$\begin{aligned} \bar{N}_j^{(1)} &= \gamma^{(1)}(\bar{\lambda}_j^{(1)} - \lambda_{j1}^{(1)}, ..., \bar{\lambda}_j^{(1)} - \lambda_{jp}^{(1)}), \\ \bar{N}_j^{(1)} &= \gamma^{(1)}(\bar{\lambda}_j^{(1)} - \lambda_{j1}^{(1)}, ..., \bar{\lambda}_j^{(1)} - \lambda_{jp}^{(1)})\,. \end{aligned} \tag{7}$$

В (7) введен необходимый в дальнейшем дополнительный параметр γ, принимающий значение “–1” или “+1” в зависимости от знака “$\leq$” или “$\geq$” в правых частях соответствующих неравенств в (6). Естественно предположить, что существование разрыва функции $L_{\max}(\lambda)$ должно сопровождаться соответствующим “резким” изменением формы выпуклой области, поверхность которой определяется из (2) и (6) при условии знака равенства в соответствующих системах. Последнее возможно по крайней мере в двух случаях. Во-первых, равенства нулю в одном из неравенств (6) коэффициентов перед x_{jp} в одном из уравнений с учетом $x_j \neq 0$, например в первом:

$$\forall p\colon \left[\begin{array}{ll} \lambda_{jp}^{(1)} = \bar{\lambda}_j^{(1)}, & x_{jp} \neq 0; \\ \lambda_{jp}^{(1)} \in \mathbb{R}, & x_{jp} = 0. \end{array} \right. \tag{8}$$

Физический смысл (8) достаточно прост: условие (8) определяет предельное значение параметров λ, при которых возможен выпуск продукта x_j в соответствии с требованиями по качеству продукта x_j без учета соображений экономической эффективности. При выполнении параметрами системы условия (8) система (1)–(5) становится негрубой, поскольку появляется (исключается) возможность производства товарного продукта x_j (наблюдается разрыв функции $x_j(\lambda)$ от нулевого значения до конечного положительного значения, определяемого соображениями экономической эффективности, т.е. величиной c_j) с соответствующим разрывом максимума ЦФ $L_{\max}(\lambda)$. Можно привести простейший пример такой “негрубой” системы и в одномерном случае:

$$L = cx \to \max, \quad (\bar{\lambda} - \lambda_1)\, x \leq 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{9}$$

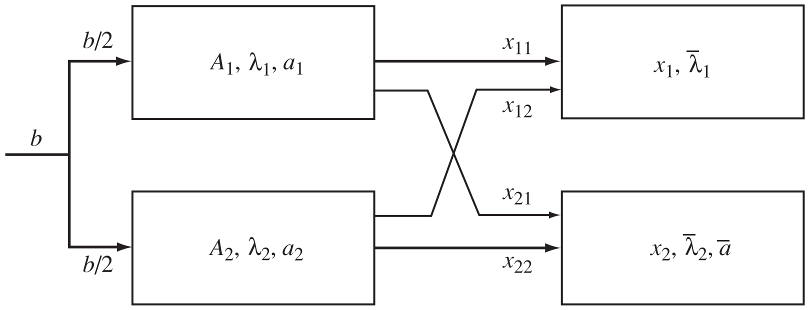

Рис. 1. Схема задачи

где

$$L_{\max}(\lambda_1) = \begin{cases} c, & (\bar{\lambda} - \lambda_1) \to -0, \\ 0, & (\bar{\lambda} - \lambda_1) \to +0. \end{cases} \quad (10)$$

Во-вторых, скачкообразное изменение выпуклой области будет наблюдаться для тех значений λ, при которых выпуклая область, ограниченная соотношениями (6), сама вырождается в плоскость (в двумерном случае выпуклая область вырождается в линию). Последнее подразумевает наличие хотя бы двух коллинеарных и противоположно направленных векторов. Таким образом, необходимое условие разрыва 1-го рода максимума ЦФ запишется в виде:

$$\exists\alpha \in (1, l), \quad \exists\beta \in (1, l), \quad \text{для которых} \quad \vec{N}_j^{(\alpha)} \uparrow\downarrow \vec{N}_j^{(\beta)}. \quad (11)$$

Следствием (11) является выполнение соотношения:

$$\exists\alpha \in (1, l), \quad \exists\beta \in (1, l), \quad \text{для которых} \quad \frac{\bar{\lambda}_j^{(\alpha)} - \lambda_{j1}^{(\alpha)}}{\bar{\lambda}_j^{(\beta)} - \lambda_{j1}^{(\beta)}} = \ldots = \frac{\bar{\lambda}_j^{(\alpha)} - \lambda_{jp}^{(\alpha)}}{\bar{\lambda}_j^{(\beta)} - \lambda_{jp}^{(\beta)}}. \quad (12)$$

Отметим, что (12) является лишь необходимым, но не достаточным условием существования разрыва максимального значения целевой функции. Действительно, например, если производство продукта x_j приводит к снижению максимума ЦФ (вследствие относительно малого значения коэффициента c_j), параметрическое воздействие на ЛП-систему параметрами λ_j, отвечающими за качество продукции, не будет влиять на оптимальное решение задачи.

Рассмотрим теперь пример оптимизации выработки двух автобензинов x_1, x_2 с октановыми числами $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2$, являющихся результатом смешения продуктов установок A_1 и A_2 (рис. 1). Учтем дополнительное ограничение на автобензин x_2 по параметру "содержание ароматики" – $\bar{a}$ (ГОСТ Р 51866-2002, 2002). Тогда система (1)–(5) примет вид:

$$L = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max, \quad (13)$$

$$\begin{cases} x_1 = x_{11} + x_{12}; \\ x_2 = x_{21} + x_{22}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{11} + x_{21} = b/2; \\ x_{12} + x_{22} = b/2; \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_1 x_1 \le \lambda_1 x_{11} + \lambda_2 x_{12}; \\ \bar{\lambda}_2 x_2 \le \lambda_1 x_{21} + \lambda_2 x_{22}; \\ \bar{a} x_2 \le a_1 x_{21} + a_2 x_{22}; \end{cases} \quad (15)$$

$$\forall j, p, \quad x_j, x_{jp} \ge 0. \quad (16)$$

Здесь c_1, c_2 − маржинальная прибыль с учетом издержек на производство единицы продукции x_1, x_2 соответственно, $\lambda_1 = \lambda_{11} = \lambda_{21}$ – октановое число продукта установки A_1, $\lambda_2 = \lambda_{12} = \lambda_{22}$ –

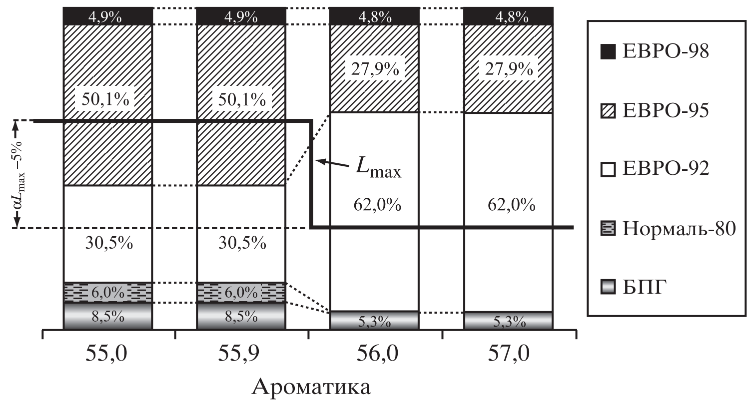

Рис. 2. Зависимость оптимального ассортимента бензинов от объемной доли содержания ароматики в катализате установки каталитического риформинга (цены условные)

октановое число продукта установки A_2, a_1, a_2 – содержание ароматики в продуктах установок A_1, A_2, b – сырье, поступающее на установки.

Нетрудно показать, что при

$$\lambda_2 = \overline{\lambda}_2 (c_2 > c_1,\ \overline{\lambda}_1 \le \lambda_1 \le \overline{\lambda}_2) \quad (17)$$

функция $L_{max} = L_{max}(\lambda_2)$ терпит разрыв первого рода и, следовательно, ЛП-система обладает свойством негрубости – неустойчивости решения по отношению к малым изменениям параметров.

С другой стороны, как следует из (12), значения параметров, при которых может наблюдаться разрыв максимума ЦФ, может и не совпадать с ограничениями на качество продукции (т.е. с $\overline{\lambda}_1$ и $\overline{\lambda}_2$). Нетрудно показать, что выполнение условия (12) в данном примере соответствует выполнению равенства:

$$\frac{\bar{\lambda}_2 - \lambda_1}{\bar{a} - a_1} = \frac{\bar{\lambda}_2 - \lambda_2}{\bar{a} - a_2}. \quad (18)$$

Из (18) следует, что в системе (13)–(16) при условии экономической эффективности выработки автобензина x_2 (т.е. $c_2 > c_1$) и значении параметра $\lambda_2 = \lambda_2^*$:

$$\lambda_2 = \lambda_2^* = \bar{\lambda}_2 - \frac{(\bar{\lambda}_2 - \lambda_1)(\bar{a} - a_2)}{\bar{a} - a_1}, \quad c_2 > c_1, \quad (19)$$

наблюдается разрыв функции первого рода $L_{max} = L_{max}(\lambda_2)$. Например, при значениях октановых чисел и ароматики $\lambda_1 = 85$, $\overline{\lambda}_2 = 95$, $\overline{a} = 42$, $a_1 = 0$, $a_2 = 63$ получим:

$$\begin{aligned} &\lambda_2^* = 100;\\ &L_{max}(\lambda_2)\big|_{(\lambda_2 - \lambda_2^*) \to +0} = 0{,}25c_1 + 0{,}75c_2;\\ &L_{max}(\lambda_2)\big|_{(\lambda_2 - \lambda_2^*) \to -0} = c_1. \end{aligned} \quad (20)$$

Рассмотрим существование ключевых значений параметров и кардинальных изменений оптимального ассортимента в системе большой размерности – модели реального предприятия. Исследуем поведение решения для модели нефтеперерабатывающего завода с размерностью $(n \times m) = 3000 \times 4100$ с помощью программы RPMS фирмы Honeywell; цены условные. На рис. 2 изображен разрыв 1-го рода маржинальной прибыли предприятия (целевой функции) при достижении показателя ароматики в компоненте бензина, вырабатываемого на установке каталитического риформинга, $a' = 56$. Как и следовало ожидать, скачок ЦФ сопровождается резким изменением структуры ассортимента товарной продукции (см. рис. 2).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении сформулируем основные результаты настоящей работы и следующие из них выводы.

В рамках ЛП-модели оптимального планирования производства нефтеперерабатывающего предприятия показано, что существуют такие значения параметров системы (ключевые значения параметров оптимизации решения), при которых наблюдается разрыв 1-го рода зависимости оптимального значения целевой функции от параметра. Приведены необходимые условия появления разрыва. Отмечено, что ключевые значения параметров могут как совпадать с ограничениями, накладываемыми на свойства переменных целевой ЦФ (8), (17)) так и определяться комбинационной зависимостью нескольких параметров системы (12), (18).

Поскольку ключевые значения параметров оказывают качественное влияние на величину оптимального значения целевой функции, поиск таких значений представляется первостепенной задачей. При этом традиционный анализ чувствительности оптимального решения к изменению коэффициентов целевой функции и правым частям ограничений должен проводиться во вторую очередь, вследствие меньшего влияния на величину ЦФ отмеченных параметров.

Необходимо также отметить, что поиск ключевых значений параметров в ЛП-системе реального нефтеперерабатывающего предприятия, описываемого несколькими тысячами уравнений, достаточно затруднителен. Данная задача осложняется тем, что используемое в настоящее время программное обеспечение для решения задач оптимизации (например, RPMS (Honeywell), PIMS (AspenTech)) осуществляет поиск решения ЛП-системы не в интервале значений параметров, а лишь при некоторых их значениях. Последнее подразумевает многократные запуски программы при различных значениях параметров. Принимая во внимание тот факт, что сложная система содержит значительное количество параметров, качество составления оптимальных планов предприятия во многом зависит от квалификации экономиста (инженера) по планированию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. (1959): Теория колебаний. М.: Физматгиз.

Арнольд В.И. (1990): Теория катастроф. М.: Наука.

Артемьев С.Б., Соркин Л.Р., Хохлов А.С. (2001): Декомпозиция задачи текущего планирования в вертикально-интегрированных нефтяных компаниях // *Проблемы прогнозирования*. № 2.

ГОСТ Р 51866-2002 (2002): Бензин неэтилированный. М.: Госстандарт.

Колесников А.О., Антонов М.Л. (2007): Направления и способы повышения качества моделей оперативного планирования нефтепереработки // *Нефтепереработка и нефтехимия*. № 12.

Кувыкина Е.В., Кувыкин В.И., Петухов М.Ю. (2010): Параметрический анализ математических моделей в задачах линейного программирования // *Вестник ННГУ*. № 3.

Таха Х. (2001): Введение в исследование операций. М.: Вильямс.

Поступила в редакцию
26.08.2010 г.