ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2012, том 48, № 3, с. 113–120

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР

© 2012 г. Е.Г. Гольштейн

(Москва)

Выделен класс антагонистических игр, обладающих свойствами кососимметричной матричной игры. При определенных условиях бескоалиционная игра многих лиц оказывается эквивалентной игре из этого класса. Если игра многих лиц конечна, то функция выигрышей эквивалентной антагонистической игры билинейна и кососимметрична.

Ключевые слова: антагонистическая игра, кососимметричная матрица, бескоалиционная игра многих лиц.

1. Рассмотрим вещественную функцию $\Phi = \Phi(u, v)$ двух векторных аргументов u, v, заданную на прямом произведении $G \times G$, где G – выпуклый компакт некоторого евклидова пространства. Введем антагонистическую игру $\Gamma(\Phi, G)$, в которой оба игрока имеют одинаковые множества стратегий G, а функцией выигрышей первого игрока является $\Phi(u, v)$.

Будем говорить, что функция $\Phi(u, v)$ удовлетворяет условию $\mathbf{Q}_1$, если Φ вогнута на G по u при любом фиксированном $v \in G$, выпукла на G по v при любом фиксированном $u \in G$, непрерывна на $G \times G$ и, кроме того,

$$\Phi(u, u) = 0 \quad \forall u \in G. \tag{1}$$

Если Φ является билинейной функцией, определяемой квадратной матрицей A, а $G = \{u = (u_1, ..., u_n) \geq 0 : \sum_{i=1}^{n} u_i = 1\}$, то игра $\Gamma(\Phi, G)$ превращается в матричную игру в смешанных стратегиях, задаваемую матрицей A.

Легко доказать, что условие $\mathbf{Q}_1$ в данном случае эквивалентно требованию кососимметричности матрицы A. Таким образом, при соблюдении условия $\mathbf{Q}_1$ игра $\Gamma(\Phi, G)$ является обобщением кососимметричной матричной игры. Как известно, матричная игра, определяемая кососимметричной матрицей, обладает следующими свойствами: ее цена равна 0, а множества оптимальных стратегий обоих игроков одинаковы. Как будет установлено ниже, для любой антагонистической игры $\Gamma(\Phi, G)$, в которой функция выигрышей удовлетворяет условию $\mathbf{Q}_1$, оба эти свойства сохраняются.

Что касается первого свойства (нулевая цена игры), то соответствующее обоснование очевидно. Действительно, в силу (1)

$$\max_{u \in G} \Phi(u, v) \geq 0 \quad \forall v \in G,$$

$$\min_{v \in G} \Phi(u, v) \leq 0 \quad \forall u \in G,$$

откуда следует, что цена игры $\Gamma(\Phi, G)$ равна нулю. Обоснование второго свойства потребует существенно больших усилий.

Обозначим U^* и V^* множества оптимальных стратегий первого и второго игроков игры $\Gamma(\Phi, G)$.

Лемма 1. *Если функция Φ удовлетворяет условию $\mathbf{Q}_1$, а множество G совпадает с отрезком* $[0, 1]$, *то*

$$U^* = V^*. \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть v^* – произвольный элемент множества V^*. Учитывая, что цена игры $\Gamma(\Phi, G)$ равна нулю, имеем

$$\max_{u\in[0,1]}\Phi(u, v^*) = 0 = \Phi(v^*, v^*). \tag{3}$$

Покажем, что

$$v^* \in U^*. \tag{4}$$

Доказательство проведем методом “от противного”. Если $v^* \notin U^*$, то $\min_{v\in[0,1]}\Phi(v^*, v) < 0$, т.е. найдется такая точка $\bar{v} \in [0,1]$, для которой

$$\Phi(v^*, \bar{v}) < 0. \tag{5}$$

Выберем произвольную точку $u^* \in U^*$. Для определенности условимся считать $u^* < v^*$ (другая возможность анализируется аналогично). Из того, что $\Phi(u^*, v^*) = 0$, имеет место (3) и функция Φ вогнута по первому аргументу, вытекает

$$\Phi(u, v^*) = 0 \quad \forall u \in [u^*, v^*]. \tag{6}$$

Поскольку $\min_{v\in[0,1]}\Phi(u^*, v) = 0, \Phi(u^*, v^*) = \Phi(u^*, u^*) = 0$, а функция Φ выпукла по второму аргументу, имеет место

$$\Phi(u^*, v) = 0 \quad \forall v \in [u^*, v^*]. \tag{7}$$

Таким образом, согласно (1), (6) и (7) функция Φ равна нулю на границе треугольника $\Delta = \{(u, v)\colon u \in [u^*, v^*], v \in [u, v^*]\}$. Отсюда с учетом вогнутости (выпуклости) Φ по $u(v)$ получаем, что

$$\Phi(u, v) = 0 \quad \forall (u, v) \in \Delta. \tag{8}$$

Соотношение (8) с учетом выпуклости функции Φ по v приводит к равенству

$$\min_{v\in[0,1]}\Phi(u, v) = 0, \tag{9}$$

которое имеет место для всех $u \in [u^*, v^*)$. Из (9) и непрерывности функции Φ следует неравенство $\Phi(v^*, \bar{v}) \geq 0$, которое входит в противоречие с (5). Следовательно, $v^* \in U^*$. Тем самым установлено включение $V^* \subset U^*$. Обоснование противоположного включения может быть проведено аналогично.

Теорема 1. *Если функция* Φ *удовлетворяет условию* $\mathbf{Q}_1$, *а* G *– выпуклый компакт, то цена игры* $\Gamma(\Phi, G)$ *равна нулю и имеет место соотношение* (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. То, что цена игры $\Gamma(\Phi, G)$ равна нулю, доказано ранее. Убедимся в верности включения

$$V^* \subset U^*. \tag{10}$$

Зафиксируем произвольную оптимальную стратегию v^* второго игрока игры $\Gamma(\Phi, G)$. В таком случае

$$\max_{u\in G}\Phi(u, v^*) = 0. \tag{11}$$

Если будет установлено, что

$$\min_{v\in G}\Phi(v^*, v) = 0, \tag{12}$$

то тем самым будет доказана верность включения (10).

Зафиксируем произвольную точку $v \in G$. Убедимся в справедливости неравенства

$$\Phi(v^*, v) \geq 0. \tag{13}$$

Для этого введем антагонистическую игру $\Gamma_1 = \Gamma(\Phi_1, G_1)$, где $G_1 = [0, 1]$, $\Phi_1(\alpha, \beta) = \Phi(\alpha v + (1-\alpha)v^*, \beta v + (1-\beta)v^*)$. Согласно (11), точка $\beta = 0$ является оптимальной стратегией второго игрока игры Γ_1. Поскольку функция Φ_1 удовлетворяет условию $\mathbf{Q}_1$, согласно лемме 1 точка $\alpha = 0$ – оптимальная стратегия первого игрока игры Γ_1. Это означает, что $\Phi_1(0, \beta) \geq 0$

для всех $\beta \in [0, 1]$, и в частности $\Phi_1(0,1) = \Phi(v^*, v) \geq 0$, т.е. для любого $v \in G$ имеет место неравенство (13), а значит, и равенство (12).

Включение $U^* \subset V^*$ устанавливается при помощи аналогичных рассуждений.

2. Любая вещественная функция Φ, определенная на прямом произведении двух выпуклых компактов G, помимо антагонистической игры $\Gamma(\Phi, G)$ порождает задачу $P(\Phi, G)$ определения такой точки равновесия $u^* \in G$, что

$$\Phi(u^*, u^*) = \max_{u \in G} \Phi(u, u^*). \tag{14}$$

Если функция Φ удовлетворяет условию $\mathbf{Q}_1$, то из (14) и теоремы 1 вытекает соотношение

$$\bar{U}^* = U^* = V^*, \tag{15}$$

где $\bar{U}^*$ – множество решений (точек равновесия) задачи $P(\Phi, G)$, а U^* (V^*) – множество оптимальных стратегий первого (второго) игрока игры $\Gamma(\Phi, G)$.

Ослабим условие $\mathbf{Q}_1$ за счет того, что вместо (1) будем предполагать вогнутость функции $\Phi(u, u)$ на G. Ослабленный вариант условия $\mathbf{Q}_1$ обозначим $\mathbf{Q}_2$. Положим $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}(u, v) = \Phi(u, v) - \Phi(v, v), (u, v) \in G \times G$.

Если функция Φ удовлетворяет условию $\mathbf{Q}_2$, то, очевидно, функция $\tilde{\Phi}$ удовлетворяет условию $\mathbf{Q}_1$. Заметим также, что, поскольку $\Phi - \tilde{\Phi}$ зависит лишь от аргумента v, множества решений задач $P(\Phi, G)$ и $P(\tilde{\Phi}, G)$ совпадают. С учетом этих двух фактов и (15) из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть функция* Φ *удовлетворяет условию* $\mathbf{Q}_2$. *В таком случае седловое множество антагонистической игры* $\Gamma(\tilde{\Phi}, G)$ *имеет вид* $U^* \times U^*$, *где* U^* *– множество решений (точек равновесия) задачи* $P(\Phi, G)$, *причем цена игры* $\Gamma(\tilde{\Phi}, G)$ *равна нулю.*

Значение теоремы 2 состоит в том, что в соответствии с ней численный анализ задачи $P(\Phi, G)$ при Φ, удовлетворяющей условию $\mathbf{Q}_2$, может быть проведен при помощи методов отыскания седловых точек вогнуто-выпуклой функции, определенной на прямом произведении двух одинаковых выпуклых компактов. Как известно, среди таких методов имеются весьма эффективные. Доказательство теоремы 2 при дополнительном предположении о липшицевости функции Φ содержится в (Гольштейн, 2009).

Заметим, что вогнутая непрерывная и супердифференцируемая на выпуклом компакте функция не обязана быть липшицевой. Приведем подтверждающий пример.

Пусть

$$G = \{(x, y): -1 \leq y \leq -|x|^{3/2}, \quad |x| \leq 1\},$$

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2/y, & (x, y) \in G, \quad (x, y) \neq (0,0), \\ 0 & (x, y) = (0,0). \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что функция f вогнута и непрерывна на выпуклом компакте G. Кроме того, она дифференцируема во всех точках G, отличных от (0, 0), а в точке (0, 0) супердифференцируема. Вместе с тем эта функция не является липшицевой в любой окрестности точки (0, 0).

Рассмотрим бескоалиционную игру R с числом игроков $k \geq 2$, которая задается для каждого игрока множеством X_i его стратегий (предполагается, что X_i – непустой выпуклый компакт) и функцией выигрышей f_i, определенной на прямом произведении $X = X_1 \times \ldots \times X_k$ множеств стратегий всех игроков, $1 \leq i \leq k$. Обозначим $X^*(X^* \subset X)$ множество точек Нэша игры R.

Условимся говорить, что игра R удовлетворяет условию **S**, если функция f_i непрерывна, вогнута относительно $x_i \in X_i$, выпукла относительно

$$\hat{x}_i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k) \in \hat{X}_1 = X_1 \times \ldots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \ldots \times X_k, \quad 1 \leq i \leq k,$$

а функция $f = \sum_{i=1}^{k} f_i$ суммарных выигрышей всех игроков игры R вогнута.

Игре R сопоставим функцию $\Phi_R(u, v)$, $u \in G, v \in G,$ используя соотношение

$$\Phi_R(u, v) = \sum_{i=1}^{k} f_i(v_1, ..., v_{i-1}, u_i, v_{i+1}, ..., v_k) - f(v_1, ..., v_k), \tag{16}$$

где

$$f(v_1, ..., v_k) = \sum\nolimits_{i=1}^{k} f_i(v_1, ..., v_k),\ G = X_1 \times ... \times X_k,\ u = (u_1, ...u_k) \in G,\quad v = (v_1, ..., v_k) \in G.$$

Из определения (14) задачи $P(\Phi, G)$ и (16) функции Φ_R следует:

1) что множество решений U^* задачи $P(\Phi_R, G)$ совпадает с множеством X^* точек Нэша игры R;

2) функция Φ_R удовлетворяет условию $\mathbf{Q}_1$, если игра R удовлетворяет условию **S**.

С учетом этого в качестве следствия теоремы 2 получаем следующий результат.

Теорема 3. *Если бескоалиционная игра R удовлетворяет условию **S**, а функция Φ_R задается соотношением* (16), *то седловое множество антагонистической игры* $\Gamma(\Phi_R, G)$ *имеет вид* $X^* \times X^*$, *где* X^* *– множество точек Нэша игры R.*

3. Рассмотрим частный случай бескоалиционной игры многих лиц, в которой каждый из игроков имеет конечное число стратегий. Такие игры называют *конечными*. Дальнейшие наши рассмотрения связаны с выделением подкласса конечных игр многих лиц, удовлетворяющих условию **S** и, следовательно, допускающих сведение к антагонистической игре с нулевой ценой.

Для описания конечных игр обычно используют таблицы, элементы которых нумеруются при помощи k индексов, где $k \geq 2$ – число игроков соответствующей игры. Условимся называть такие таблицы *k-мерными*. По аналогии с матрицами (двумерными таблицами) при записи k-мерной таблицы A будем пользоваться обозначением $A = (a_{s_1...s_k})_{n_1...n_k}$, где s_α – индекс с номером α, принимающий целые значения от 1 до n_α, $1 \leq \alpha \leq k$, $a_{s_1...s_k}$, – элемент таблицы A, определяемый k индексами $s_1, ..., s_k$ соответственно. Условимся при суммировании элементов таблицы A по $\rho \leq k$ индексам вместо обозначения $\sum\nolimits_{s_1=1}^{n_1} ... \sum\nolimits_{s_\rho=1}^{n_\rho} a_{s_1...s_k}$ использовать более экономное обозначение $\sum\nolimits_{s_1...s_\rho} a_{s_1...s_k}$.

Рассмотрим конечную игру с числом игроков k, в которой игрок i имеет n_i стратегий, а его выигрыш задается k-мерной таблицей $A_i = (a^{(i)}_{s_1...s_k})_{n_1...n_k}$, где $a^{(i)}_{s_1...s_k}$ – выигрыш игрока i, если игрок α выбирает стратегию s_α, $1 \leq \alpha \leq k$. Если расширить множества стратегий игроков смешанными стратегиями, то приходим к конечной игре R в смешанных стратегиях с k участниками, в которой

$$X_i = \{x_i = (x_{i1}, ..., x_{in_i}): \sum_{s_i=1}^{n_i} x_{is_i} = 1,\quad x_{is_i} \geq 0,\ 1 \leq s_i \leq n_i\}, \tag{17}$$

$$f_i(x) = \sum_{s_1...s_k} a^{(i)}_{s_i...s_k} x_{1s_1, ..., x_{ks_k}},\quad 1 \leq i \leq k,$$

где $x = (x_1, ..., x_k) \in X = X_1 \times ... \times X_k$.

Заметим, что для конечной игры, определяемой соотношениями (17), условие **S** сводится к двум требованиям: при любом фиксированном значении вектора $x_i \in X_i$ функция f_i выпукла относительно $\hat{x}_i = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_k) \in \hat{X}_i, 1 \leq i \leq k$; функция $f(x) = \sum\nolimits_{i=1}^{k} f_i(x)$ вогнута относительно $x \in X$.

Теорема 4. *Конечная игра R, задаваемая соотношениями* (17), *удовлетворяет условию* **S** *в том и только в том случае, если соблюдаются следующие требования:*

$$f_i(x) = \sum_{t=1,\, t\neq i}^{k} x_i a_{it} x_t^T + \sum_{t=1,\, t\neq i}^{k} (b_{it}, x_t),\ x \in L = L_1 \times ... \times L_k, 1 \leq i \leq k, \tag{18}$$

где a_{it} – *матрица с* n_i *строками и* n_t *столбцами,* b_{it} – n_t*-мерный вектор,* $L_i = \{x_i = (x_{i1}, ..., x_{in_i}): \sum_{s_i=1}^{n_i} x_{is_i} = 1\}$;

$$a_{it} + a_{ti}^T = 0, \quad 1 \le i \ne t \le k. \tag{19}$$

Доказательство теоремы 4 опирается на следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *Полилинейная функция* $\varphi(x) = \sum_{s_1...s_j} b_{s_1...s_j} x_{1s_1} ... x_{js_j}$, $x = (x_1, ..., x_j)$, $j \ge 2$, *является выпуклой (вогнутой) функцией на* $X = X_1 \times ... \times X_j$ *в том и только в том случае, если элементы таблицы* $B = (b_{s_1...s_j})_{n_1...n_j}$ *допускают представление*

$$b_{s_1...s_j} = b_{s_1}^{(1)} + ... + b_{s_j}^{(j)}, \quad 1 \le s_\alpha \le n_\alpha, \ 1 \le \alpha \le j \tag{20}$$

или, что то же самое,

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{j} (b_i, x_i), \ x \in L = L_1 \times ... \times L_j, \tag{21}$$

где b_i – n_i*-мерный вектор.*

Доказательство. Вначале убедимся в *эквивалентности* (20) и (21). Из представления (20) вытекает соотношение

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{j} (b_i, x_i) \prod_{\substack{1 \le t \le j, \\ t \ne i}} \left(\sum_{s_t=1}^{n_t} x_{ts_t} \right),$$

которое приводит к (21). Если же в равенстве (21) в качестве x_i выбрать единичный вектор с единицей на s_i, $1 \le i \le j$, то получаем (20).

Доказательство *необходимости* проведем, используя индукцию по j. Рассмотрим случай $j = 2$. Тогда

$$\varphi(x) = \sum_{s_1 s_2} b_{s_1 s_2} x_{1s_1} x_{2s_2}, \quad x = (x_1, x_2). \tag{22}$$

Пусть

$$x_1 = (x_{11}, 0, ..., 0, x_{1s_1}, 0, ..., 0), \quad x_{11} + x_{1s_1} = 1, \ x_{11} \ge 0, \ x_{1s_1} \ge 0,$$

$$x_2 = (x_{21}, 0, ..., 0, x_{2s_2}, 0, ..., 0), \quad x_{21} + x_{2s_2} = 1, \ x_{21} \ge 0, \ x_{2s_2} \ge 0.$$

Обозначим $x_{11} = z_1$, $x_{21} = z_2$ и подставим в (22) выбранные x_1 и x_2. Тогда с учетом ограничений на $x_{11}, x_{1s_1}, s_{21}, x_{2s_2}$ имеем

$$\bar{\varphi}(z_1, z_2) = z_1 z_2 (b_{11} + b_{s_1 s_2} - b_{1s_2} - b_{s_1 1}) + \bar{\bar{\varphi}}(z_1, z_2),$$

где $\bar{\varphi}(z_1, z_2)$ – выпуклая либо вогнутая функция на квадрате $\Delta = \{(z_1, z_2): 0 \le z_1 \le 1, 0 \le z_2 \le 1\}$ (по предположению), а $\bar{\bar{\varphi}}(z_1, z_2)$ – линейная функция плюс константа. Поскольку $z_1 z_2$ не является ни выпуклой, ни вогнутой функцией на Δ, отсюда следует

$$b_{11} + b_{s_1 s_2} - b_{1s_2} - b_{s_1 1} = 0, \ 1 \le s_1 \le n_1, \ 1 \le s_2 \le n_2. \tag{23}$$

Положим $b_{s_1}^{(1)} = b_{s_1 1}$, $b_{s_2}^{(2)} = b_{1s_2} - b_{11}$. Тогда из (23) получим искомое представление (20) для случая $j = 2$.

Предположив верность утверждения леммы 2 в части необходимости для $j = l - 1$, $l \ge 3$, докажем, что оно имеет место и при $j = l$.

Пусть $\varphi_{s_1}(x_2, ..., x_l) = \sum_{s_2...s_l} b_{s_1 s_2 ... s_l} x_{2s_2} ... x_{ls_l}$, $1 \le s_1 \le n_1$. Если функция $\varphi(x)$ выпукла (вогнута) на X, то $\varphi_{s_1}(x_2, ..., x_l)$ обладает тем же свойством на $X_2 \times ... \times X_l$. Поэтому согласно предположению индукции из (21) имеем

$$\varphi_{s_1}(x_2, ..., x_l) = \sum_{i=2}^{l} (b_{s_1 i}, x_i),\ 1 \le s_1 \le n_1. \tag{24}$$

Из (24) вытекает, что

$$\sum_{s_1 ... s_l} b_{s_1 ... s_l} x_{1s_1} ... x_{ls_l} = \sum_{i=2}^{l} \sum_{s_1 s_i} b_{s_1 s_i} x_{1s_1} x_{is_i}. \tag{25}$$

Если левая часть (25) выпукла (вогнута) на X, то $\sum_{s_1 s_i} b_{s_1 s_i} x_{1s_1} x_{is_i}$ также выпукла (вогнута) на $X_1 \times X_i$. Следовательно, с учетом рассмотренного ранее случая $j = 2$ имеем

$$\sum_{s_1 s_i} b_{s_1 s_i} x_{1s_1} x_{is_i} = (b_1^{(i)}, x_1) + (b_i, x_i), \quad 2 \le i \le l,$$

откуда согласно (25) получаем (21) при $j = l$ и $b_1 = \sum_{i=2}^{l} b_1^{(i)}$. Лемма 2 в части необходимости доказана.

Что касается *достаточности* условий (21) для выпуклости либо вогнутости функции φ, то она очевидна, так как, согласно (21), функция $\varphi(x)$ является аффинной на линейном многообразии L.

Доказательство теоремы 4.

Необходимость. Предположим, что условие **S** соблюдается. Зафиксируем вектор x_i, положив $x_i = e_{s_i}$, где $e_{s_i} \in X_i$ – единичный вектор с единицей в позиции s_i, $1 \le s_i \le n_i$, $1 \le i \le k$. Положим

$$\varphi_{is_i}(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_k) = f_i(x_1, ..., x_{i-1}, e_{s_i}, x_{i+1}, ..., x_k).$$

Поскольку согласно **S** функция φ_{is_i} выпукла на $X_1 \times ... \times X_{i-1}, \times X_i \times ... \times X_k$, то по лемме 2 при любых $x_t \in L_t$, $1 \le t \le k$, $t \ne i$ имеем

$$f_i(x_1, ..., x_{i-1}, e_{s_i}, x_{i+1}, ..., x_k) = \sum_{\substack{1 \le t \le k, \\ t \ne i}} (b_{its_i}, x_t),\ 1 \le s_i \le n_i, \tag{26}$$

где b_{its_i} – n_t-мерный вектор.

Умножая обе части равенств (26) на x_{is_i} и складывая результаты, получим

$$f_i(x) = f_i(x_1, ..., x_k) = \sum_{\substack{1 \le t \le k, \\ t \ne i}} x_i \bar{a}_{it} x_t^T, \quad x \in L, 1 \le i \le k, \tag{27}$$

где $\bar{a}_{it}$ – матрица, строками которой являются векторы b_{its_i} при индексе s_i, принимающем значения от 1 до n_i. Общий выигрыш $f = \sum f_i$ всех игроков игры R согласно (27) является суммой $k(k-1)$ функций $x_i \bar{a}_{it} x_t^T$ или суммой $k(k-1)/2$ пар $x_i \bar{a}_{it} x_t^T, x_t \bar{a}_{ti} x_i^T$ таких функций, где $1 \le i < t \le k$.

Положим $x_i \bar{a}_{it} x_t^T + x_i \bar{a}_{ti} x_i^T = x_i(\bar{a}_{it} + \bar{a}_{ti}^T) x_t^T = x_i d_{it} x_t^T$. Из (27) имеем

$$f(x) = \sum_{1 \le i < t \le k} x_i d_{it} x_t^T, \quad x = (x_1, ..., x_k) \in L. \tag{28}$$

Согласно условию **S**, функция f должна быть вогнутой на $X \subset L$, откуда с учетом (28) вытекает вогнутость билинейных функций $x_t d_{it} x_t^T, (x_i, x_t) \in X_i \times X_t$ при $1 \le i < t \le k$. Но согласно лемме 2 это означает, что

$$x_i d_{it} x_t^T = (b'_{it}, x_i) + (b''_{it}, x_t), x_i \in L_i, x_t \in L_t, 1 \le i \le t \le k, \tag{29}$$

где b'_{it} и b''_{it} – n_i-мерный и n_t-мерный векторы соответственно.

Пусть матрица a_{it} при $i < t$ ($i > t$) есть результат добавления к каждой строке матрицы $\bar{a}_{it}$ вектора $-b''_{it}(-b'_{ti})$. Очевидно, что

$$x_i a_{it} x_t^T = \begin{cases} x_i \bar{a}_{it} x_i^T - (b''_{it}, x_t), & i < t, \\ x_i \bar{a}_{it} x_i^T - (b'_{ti}, x_t), & i > t. \end{cases} \tag{30}$$

Из (27) и (30) следует представление (18) при

$$b_{it} = \begin{cases} b''_{it}, & i < t, \\ b'_{ti}, & i > t. \end{cases}$$

Заметим, что согласно (29) и (30) при $i < t$ получаем

$$x_i(a_{it} + a_{ti}^T)x_t^T = x_i d_{it} x_t^T - (b''_{it}, x_t) - (b'_{it}, x_i) = 0, x_i \in L_i, \ x_t \in L_t,$$

откуда вытекают равенства (19) для случая $i < t$. Если же $i > t$, то эти равенства также имеют место, так как $(a_{it} + a_{ti}^T)^T = a_{it}^T + a_{ti}$.

Достаточность. Пусть требования (18) и (19) соблюдаются. В таком случае

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} f_i(x) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\substack{t=1,\\ t\neq i}}^{k} (b_{it}, x_t) = \sum_{t=1}^{k} (b_t, x_t), \ x = (x_1, ..., x_k) \in L, \tag{31}$$

где $b_t = \sum_{i=1,\, i\neq t}^{k} b_{it}$.

Из (18) следует, что функция f_i является аффинной относительно $\hat{x}_i \in \hat{L}_i = L_1 \times ... \times L_{i-1} \times L_{i+1} \times ... \times L_k$ при любом фиксированном $x_i \in L_i, 1 \le i \le k$. Из (31) вытекает аффинность функции f на L. Следовательно, игра R удовлетворяет условию **S**.

Теорема 4 позволяет уточнить антагонистическую игру Γ (Φ_R, G), к которой сводится решение игры R в случае, если последняя задается соотношениями (17) и удовлетворяет условию **S**. Итак, пусть конечная игра R в смешанных стратегиях определяется соотношениями (17). Если R удовлетворяет условию **S**, то по теореме 4 функция Φ_R, порождаемая игрой R согласно (16), имеет вид

$$\Phi_R(u, v) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\substack{t=1,\\ t\neq i}}^{k} u_i a_{it} v_t^T, \quad u = (u_1, ..., u_k) \in X, \quad v = (v_1, ..., v_k) \in X,$$

$$X = X_1 \times ... \times X_k, \quad X_i = \left\{ x_i = (x_{i1}, ..., x_{in_i}) : \sum_{s_i=1}^{n_i} x_{is_i} = 1, \, x_{is_i} \ge 0 \ \forall s_i \right\}, \tag{32}$$

$1 \le i \le k$, причем $a_{it} = -a_{ti}^T$ для всех t от 1 до k, $t \neq i$.

Введем квадратную матрицу A порядка $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1k} \\ -a_{12}^T & a_{22} & ... & a_{2k} \\ ... & ... & ... & ... \\ -a_{1k}^T & -a_{2k}^T & ... & a_{kk} \end{pmatrix}, \tag{33}$$

где матрица a_{ij}, $j > i$, содержит n_i строк и n_j столбцов, a_{ii} – нулевая матрица порядка n_i, $1 \le i \le k$. Очевидно, A – кососимметричная матрица, и согласно (32) имеем $\Phi_R(u, v) = uAv^T$.

Из теорем 3, 4 вытекает следующий результат.

Теорема 5. *Пусть R – конечная бескоалиционная игра в смешанных стратегиях, задаваемая соотношениями* (17) *и удовлетворяющая условию* **S**, X^* *– множество точек Нэша игры*

R, X_i – множества смешанных стратегий игрока i игры R, $1 \le i \le k$. Седловое множество антагонистической игры $\Gamma\ (\Phi_R,\ G)$ *при* $\Phi_R(u, v) = uAv^T$, $G = X_1 \times \ldots \times X_k$, *где A – кососимметричная матрица* (33), *совпадает с* $X^* \times X^*$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Гольштейн Е.Г. (2009): Об одной задаче равновесия, связанной с бескоалиционными играми // *Экономика и мат. методы*. Т. 45. № 4.

Поступила в редакцию
17.02.2012 г.

On a Class of Antagonistic Games

Ye.G. Golshtein

A class of antagonistic games with the properties of skew-symmetric matrix game is selected. Under certain conditions, noncooperative game of many individuals is equivalent to a game from this class. If a game of many individuals is finite, then the payoff function of the equivalent antagonistic game is bilinear and skew-symmetric.

Keywords: an antagonistic game, a skew-symmetric matrix, a noncooperative game of many individuals.