

---

---

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ  
ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

---

---

МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА  
С УЧЕТОМ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ\*

© 2012 г. Е.А. Ровенская

(Москва)

В работе предлагается упрощенная модель экономического роста страны с ограничениями на затраты экологически значимых ресурсов. Предполагается, что затраты ресурсов растут с ростом производства, но могут снижаться при наличии инвестиций в ресурсоэффективные технологии. Управление инвестициями нацелено на максимизацию интегрального дисконтированного ВВП страны. Модель калибруется для России на примере выбросов парниковых газов. Анализируются оптимальный, а также некоторые другие сценарии роста и выбросов.

**Ключевые слова:** модель экономического роста, устойчивое развитие, экологически значимые ресурсы.

### 1. МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО ПОТРЕБЛЕНИЯ

Вопросы, связанные с управлением экологически значимыми ресурсами, активно обсуждаются как научной, так и широкой общественностью. При текущем уровне технологий снижение темпа потребления этих ресурсов подразумевает инвестиции в ресурсоэффективные технологии – использование вторсырья, альтернативные источники энергии, энергосбережение и т.д. Ясно, однако, что слишком большие инвестиции в краткосрочной перспективе могут привести к рецессии экономического роста и, как следствие, к снижению уровня потребления. Следовательно, возникает задача оптимального распределения инвестиций в экономический рост и в меры по снижению затрат экологически значимых ресурсов, решение которой может быть основано на результатах математического моделирования.

Сегодня существует большое число моделей, достаточно детально описывающих динамическое взаимодействие экономики и окружающей среды на региональном, национальном и глобальном уровнях. Отметим среди них DICE-модель глобального экономического роста, глобального потепления и его влияния на рост (Nordhaus, Boyer, 2000). Являясь достаточно агрегированной, модель DICE, однако, достаточно сложна как с аналитической, так и с вычислительной точек зрения. Другой известной моделью, учитывающей в явном виде и энергетику, является модель MERGE (Manne, Richels, 2004). Модель базируется на максимизации функции полезности, основные факторы производства – капитал, трудовые ресурсы и энергия. Изменение климата моделируется в зависимости от объема производства. В (Digas, Maksimov, Schrattenholzer, 2009), где используется вариация модели MERGE-5I, моделируются экономические и климатические последствия для России ряда типовых сценариев, базируясь на докризисной экономической ситуации.

В данной работе предлагается упрощенная модель оптимального использования экологически значимых ресурсов. Простота модели позволяет провести все вычисления аналитически, что, в свою очередь, дает возможность провести полный анализ возможных сценариев и их последствий.

Представленный анализ исходит из предпосылки доминирования идеи максимизации потребления как движущей силы экономического роста. Считаем, что общество сначала строит стратегию развития таким образом, чтобы максимизировать совокупное (дисконтированное)

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (проект 10-02-00516а).

потребление, а затем, в рамках этой стратегии, устанавливает другие, в том числе связанные с окружающей средой, цели.

Следуя этой предпосылке, в данном разделе рассматривается стандартная неоклассическая односекторная модель эндогенного экономического роста типа Рамсея с линейной производственной функцией (АК-модель) (Acemoglu, 2009). В данной модели рост производственного фактора (капитала или технологий) эквивалентен росту объема производства. В расчетах объемом производства будем отождествлять с национальным ВВП (см. например (Nordhaus, Boyer, 2000)). В качестве параметра, управляющего ростом, выступает объем потребления (считается, что часть произведенного потребляется, а оставшаяся часть инвестируется в рост). Управление происходит таким образом, чтобы максимизировать совокупную (интегральную) дисконтированную логарифмическую функцию полезности потребления на бесконечном интервале времени.

Математическая формулировка модели имеет вид:

$$J = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \ln(c(t)Y(t)) \rightarrow \max_{c(\cdot)}, \tag{1}$$

$$\dot{Y}(t) = A(1 - c(t))Y(t), \quad Y(0) = Y_0, \quad c(t) \in [\bar{c}, 1] \quad (t \geq 0).$$

Здесь  $Y(t)$  и  $c(t)$  – валовый объем производства и часть объема производства, направляемая на потребление в момент времени  $t$  ( $t \geq 0$ ) соответственно;  $Y_0 > 0$  – заданное начальное значение объема производства,  $\rho$  – дисконтирующий множитель,  $A$  – коэффициент капиталоотдачи экономики (объем производства, соответствующий единице производственного фактора),  $\bar{c} \in (0, 1)$  – минимально возможный уровень потребления. Потребление  $c(\cdot)$  предполагается измеримой функцией и является управлением в рассматриваемой задаче. Задача (1), таким образом, подразумевает нахождение такого сценария потребления  $c(\cdot)$ , при котором функционал  $J$  принимает наибольшее возможное значение, считая, что фазовая траектория  $Y(\cdot)$  соответствует выбранному управлению (т.е. определяется как решение задачи Коши из (1)).

Задача (1) относится к классу задач оптимального управления на бесконечном горизонте. Известно, что классическим инструментом решения задач оптимального управления является принцип максимума Л.С. Понтрягина (Понтрягин и др., 1983). Его утверждения устанавливают необходимые условия оптимальности, что во многих случаях позволяет выделить единственную оптимальную траекторию, причем так называемое условие трансверсальности на конце временного интервала играет ключевую роль. Однако общая формулировка принципа максимума для задач оптимального управления на бесконечном горизонте не содержит конструктивного условия трансверсальности. Его выполнение на бесконечности требует дополнительного анализа и возможно лишь для некоторых классов задач. Для решения задачи (1) применяется принцип максимума для задач оптимального управления на бесконечном интервале времени, разработанный в (Асеев, Кряжимский, 2007) для так называемого класса задач с условием монотонности.

Для начала установим применимость теоремы 10.1 из (Асеев, Кряжимский, 2007) для задачи (1) (отметим, что из вида управляемой системы и ограничения на управление следует, что для любого допустимого управления для соответствующей ему траектории верно, что  $Y_0 \leq Y(t) \leq Y_0 e^{(1-\bar{c})t}$  для всех  $t \geq 0$ ).

**Лемма 1.** Пусть для задачи (1) выполнены условия (Асеев, Кряжимский, 2007):

- 1) существует такое  $M_0$ , что  $YA(1 - c)Y \leq M_0(1 + Y^2)$  для любых  $Y \geq 0$ ,  $c \in [\bar{c}, 1]$ ;
- 2) для любого  $Y \geq 0$  множество  $Q(Y) = \{(y_0, y) : y_0 \leq \ln(cY); y = A(1 - c)Y, c \in [\bar{c}, 1]\}$  является выпуклым;
- 3) существуют такие положительные функции  $\mu(\cdot)$  и  $\omega(\cdot)$  на  $[0, \infty)$ , что  $\mu(t) \rightarrow +0$  и  $\omega(t) \rightarrow +0$ , а для любой допустимой пары  $(Y(\cdot), c(\cdot))$   $e^{-\rho t} \max_{c \in [\bar{c}, 1]} |\ln(cY(t))| \leq \mu(t)$ ,  $t \geq 0$  и

$$\int_T^{\infty} e^{-\rho t} |\ln(c(t)Y(t))| \leq \omega(t), \quad T \geq 0;$$

4) (условие монотонности) для любой допустимой траектории  $Y(\cdot)$  управляемой системы задачи (1) и любого  $c \in [\bar{c}, 1]$  выполняется  $\frac{\partial}{\partial Y} \ln(cY(t)) > 0$ ,  $t \geq 0$ ; кроме того, существует число  $c_0 \in [\bar{c}, 1]$  такое, что  $A(1 - c_0)Y_0 > 0$ .

**Доказательство.** Существование упомянутых в формулировке леммы констант и функций докажем их конструктивным построением. Так, утверждение 1 верно для любого  $M_0 \geq A$ .

Утверждение 4 верно для любого  $c_0 \in [\bar{c}, 1]$ , поскольку  $\bar{c} \in (0, 1)$ .

Нормируя  $Y(t)$  на  $Y_0$ , полагаем  $Y_0 = 1$ . Вычисляя максимум по  $c \in [\bar{c}, 1]$ , получаем, что первое из условий 3 верно при  $\mu(t) = A(1 - \bar{c})t e^{-\rho t}$ , а второе условие верно при  $\omega(t) = A(1 - \bar{c})(t + 1/\rho)e^{-\rho t}/\rho$ ,  $t \geq 0$ .

Для доказательства условия 2 отметим, что для любого  $Y \geq 0$  множество  $Q(Y)$  представляет собой такой прямоугольник на плоскости  $uy_0$ , что  $y_0 \leq \ln Y$  и  $y \in [0, (1 - \bar{c})Y]$ , и, таким образом, является выпуклым. Очевидно, что условие монотонности выполняется ввиду того, что  $\frac{\partial}{\partial Y} \ln(cY) = 1/c > 0$  для всех  $c \in [\bar{c}, 1]$ .

Доказанная лемма дает возможность применить принцип максимума для задач оптимального управления на бесконечном горизонте с условием монотонности, сформулированный в (Асеев, Кряжимский, 2007) в теореме 10.1, для получения необходимых условий оптимальности для задачи (1).

Построим функцию Гамильтона–Понтрягина для задачи (1) в виде  $H(Y, \lambda, c) = \ln cY + \lambda A(1 - c)Y$ , где  $\lambda$  – текущее значение сопряженной переменной. Заметим, что  $H_{cc}(Y, \lambda, c) = -1/c^2 < 0$  для всех  $c \in [\bar{c}, 1]$ , следовательно, функция  $c \mapsto H(Y, \lambda, c)$  вогнута и имеет единственный глобальный максимум.

Условие максимума и сопряженное уравнение имеют вид

$$c^* = \begin{cases} 1/(\lambda AY), & \text{если } \lambda AY \geq 1; \\ 1, & \text{если } \lambda AY \leq 1, \end{cases} \quad \dot{\lambda}(t) = \rho\lambda(t) - 1/Y(t) - \lambda(t)A(1 - c(t))$$

соответственно.

**Теорема 1.** Управление  $c^*(t) = \frac{\rho}{A}$  и траектория  $Y^*(t) = Y_0 e^{(A-\rho)t}$  ( $t \geq 0$ ) оптимальны в задаче (1).

**Доказательство.** Следующие три допустимые пары управления  $c(\cdot)$  и фазовой переменной  $Y(\cdot)$  удовлетворяют всем необходимым условиям оптимальности, получаемым из принципа максимума, сформулированного выше:

i)  $c(t) = 1$  и  $Y(t) = Y_0$  для всех  $t \geq 0$ ;

ii)  $c(t) = 1 / \left[ \frac{A}{\rho} + \left( A\lambda_0 Y_0 - \frac{A}{\rho} \right) e^{\rho t} \right]$ ,  $Y(t) = e^{At} \left( Y_0 - \frac{1}{\rho\lambda_0} + \frac{1}{\rho\lambda_0} e^{-\rho t} \right)$ ,  $t \geq 0$  ( $\lambda_0 \geq 1/\rho Y_0$ );

iii)  $c(t) = 1 / \left[ \frac{A}{\rho} + \left( A\lambda_0 Y_0 - \frac{A}{\rho} \right) e^{\rho t} \right]$ ,  $Y(t) = e^{At} \left( Y_0 - \frac{1}{\rho\lambda_0} + \frac{1}{\rho\lambda_0} e^{-\rho t} \right)$ ,  $t \in [0, \hat{t}]$ ,  $c(t) = 1$  и

$Y(t) = e^{At} \left( Y_0 - \frac{1}{\rho\lambda_0} + \frac{1}{\rho\lambda_0} e^{-\rho t} \right)$  для всех  $t \geq \hat{t}$  ( $\lambda_0 \in [1/(AY)_0, 1/(\rho Y_0)]$ ).

Сравнивая соответствующие значения функционала  $J$  задачи (1), получаем, что оптимальной парой является управление и траектория, заданные по (ii), причем  $\lambda_0 \geq 1/\rho Y_0$ , что и приводит к утверждению теоремы.

Таким образом, показано, что оптимальной стратегией потребления в рамках рассматриваемой модели является потребление постоянной части ВВП, равной  $\rho/A$ , и соответственно, инвестирование части ВВП, равной  $1 - \rho/A$ . Такая стратегия потребления приводит к экспоненциальному тренду экономического роста с темпом прироста  $A - \rho$  (теорема 1).

## 2. МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ЗАТРАТАМИ ЭКОЛОГИЧЕСКИ ЗНАЧИМЫХ РЕСУРСОВ

Связь между экономическим ростом, мерами по управлению затратами экологически значимых ресурсов и самими затратами этих ресурсов зависит от стадии экономического и социального развития общества, структуры экономики и ряда других факторов. В данной работе предлагается считать, что в среднесрочной перспективе затраты экологически значимых ресурсов пропорциональны объему производства  $Y$  и обратно пропорциональны запасу ресурсоэффективных технологий  $C$  с некоторой эластичностью  $\gamma$ :

$$E = \alpha(Y/C)^\gamma, \tag{2}$$

где  $\alpha > 0$  – коэффициент пропорциональности. Далее будем считать, что общество определяет уровень своего потребления (через соответствующую часть ВВП  $c^*$ ) так, чтобы оптимизировать интегральное дисконтированное потребление, т.е. как решение оптимизационной задачи (1). Оставшаяся часть,  $1 - c^*$ , расходуется на инвестиции. Следуя (Rovenskaia, 2006), будем считать, что часть ВВП  $u(t) \in [0, 1 - c^*]$  расходуется на инвестиции в производство в момент времени  $t$  ( $t \geq 0$ ), тогда как соответствующая часть  $1 - c^* - u(t)$  расходуется на развитие ресурсоэффективных технологий. Рассмотрим задачу оптимального управления ресурсами при наличии заданного ограничения  $E^*(\cdot)$  с точки зрения максимизации интегральной дисконтированной функции полезности объема производства:

$$J = \int_0^\infty e^{-\rho t} \ln Y(t) \rightarrow \max_{u(\cdot)},$$

$$\dot{Y}(t) = Au(t)Y(t), \quad Y(0) = Y_0, \quad \dot{C}(t) = A(1 - c^* - u(t))Y(t), \quad C(0) = C_0, \tag{3}$$

$$\alpha(Y(t)/C(t))^\gamma \leq E^*(t) \in [0, 1 - c^*] \quad (t \geq 0).$$

Параметр  $u(\cdot)$  играет роль управления в данной задаче и предполагается измеримой функцией. Задача (3) представляет собой задачу оптимального управления с фазовыми ограничениями.

Известно, что принцип максимума Л.С. Понтрягина для задач с фазовыми (и смешанными) ограничениями имеет усложненный вид и может быть использован для конструктивного построения решения лишь в исключительных, простых случаях. Переобозначив переменные, получим, что задача (3) сводится к задаче, рассмотренной в (Ровенская, 2009; Rovenskaia, 2005), где для ее решения применялся так называемый метод двойных вариаций. С помощью этого метода для определенного класса функций  $E^*(\cdot)$  было выдвинуто предположение и обосновано аналитическое решение данной задачи, т.е. найдена форма оптимального управления. Приведем (без доказательства) этот результат.

**Теорема 2.** Пусть  $E^*(\cdot)$  – возрастающая функция и, кроме того, для всех  $t \geq 0$  верно

$$\frac{|\dot{E}^*(t)|}{E^*(t)} \leq (1 - c^*) \left( \frac{E^*(t)}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Тогда оптимальным в задаче (3) является управление

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 - c^*, & \text{если } t \in [0, \xi]; \\ \left[ \frac{(1 - c^*)E^{*1/\gamma}(t) + \alpha^{1/\gamma} \dot{E}^*(t)/E^*(t)}{(1 - c^*)E^{*1/\gamma}(t) + A\alpha^{1/\gamma}} \right], & \text{если } t \geq \xi, \end{cases}$$

где  $\xi$  – корень уравнения  $E^*(\xi) = E_0 e^{A(1 - c^*)\xi/\gamma}$  ( $E_0 = \alpha(Y_0/C_0)^\gamma$ ).

**Следствие.** В ходе доказательства теоремы 2 (Ровенская, 2009; Rovenskaya, 2005) установлено, что оптимальное управление  $u^*(t) = \left[ (1 - c^*)E^{*1/\gamma}(t) + \alpha^{1/\gamma} \dot{E}^*(t) / E^*(t) \right] / \left( E^{*1/\gamma}(t) + A\alpha^{1/\gamma} \right)$  после момента переключения  $\xi$  есть управление, ведущее выбросы  $E(t) = \alpha(Y(t)/C(t))^\gamma$  строго вдоль границы ограничения  $E^*(t)$  ( $t \geq \xi$ ).

### 3. ПРОБЛЕМА УПРАВЛЕНИЯ ВЫБРОСАМИ ПАРНИКОВЫХ ГАЗОВ КАК ПРИМЕР ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ЭКОЛОГИЧЕСКИ ЗНАЧИМЫХ РЕСУРСОВ

В данном разделе приводятся расчеты по описанной выше модели на примере выбросов парниковых газов.

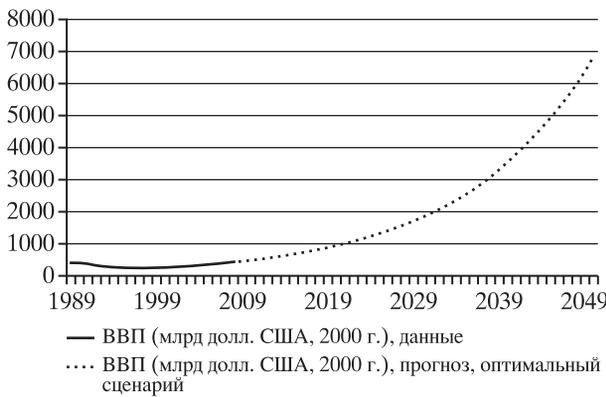
С начала индустриальной эпохи для производства энергии и товаров стало активно использоваться ископаемое топливо. Совместно с вырубкой лесов это привело к резкому росту концентрации парниковых газов (углекислого газа, метана и др.) в атмосфере на 40% (Ильинский, 2005). При этом зафиксировано увеличение средней мировой температуры на 0,8 °С (Pachauri, Reisinger, 2007). На сегодняшний день научный консенсус относительно управления глобальным изменением климата, выраженный в докладе Межправительственной комиссии по изменению климата (Pachauri, Reisinger, 2007), состоит в том, что глобальное потепление должно быть ограничено отметкой 2 °С, превышающей прединдустриальный уровень. Это, в свою очередь, влечет за собой необходимость снижать мировые выбросы парниковых газов к 2100 г. на 25% по сравнению с уровнем выбросов в 2000 г. (Pachauri, Reisinger, 2007, сценарий B1). Такие последствия глобального изменения климата для России, как повышение риска для здоровья, рост засух, экстремальных осадков, наводнений, повышение пожароопасности, таяние вечной мерзлоты с ущербом для строений и коммуникаций, распространение вирусных и паразитарных заболеваний, могут нести угрозу национальной безопасности, что отмечено в (Климатическая доктрина РФ, 2009).

*Калибровка параметров экономического роста.* Для калибровки моделей эндогенного экономического роста принято считать, что экономическое развитие (т.е. рост ВВП) в прошлом происходило приблизительно в соответствии с оптимальным сценарием (Nordhaus, Boyer, 2000). Данное допущение довольно хорошо подкрепляется эконометрическим анализом экономик западных стран за последние 50–60 лет. Применим этот подход для калибровки экономического роста России за последние 10 лет. Определим соответствующие параметры  $A$  и  $\rho$ .

По данным Мирового банка (World Bank, 2012) прирост ВВП с 1998 по 2008 гг. составлял в среднем 6,6% в год, т.е.  $A - \rho = 0,066$ . Отметим, что в случае сохранения такого темпа прироста экономики (см. рис. 1) российский ВВП удвоится к 2020 г. (по сравнению с 2010 г.) и увеличится примерно в 15 раз к 2050 г. (в абсолютных цифрах при этом он будет равен ВВП США в 1990 г.). По данным Организации экономического сотрудничества и развития (OECD.Stat Extracts, 2012), средний процент инвестиций в России за период с 1998 по 2008 г. составил 18%, т.е.  $\rho/A = 0,82$ . Отсюда получаем, что  $A = 0,367$  и  $\rho = 0,3$ .

Достаточно большое значение коэффициента дисконтирования (30%) связано как с объективными, так и с субъективными факторами. К первым можно отнести высокий уровень инфляции – с 1998 по 2008 г. годовая инфляция потребительских цен составляла в среднем 22,0% (данные Мирового банка (World Bank, 2012)), а также низкое значение реальной процентной ставки, которая с 1999 г. принимала отрицательные или очень малые положительные значения, в среднем составляя –3,3% (данные Мирового банка (World Bank, 2012)) (рис. 2). Субъективные факторы – неуверенность населения в будущей экономической и политической ситуации – только способствовали высокой норме дисконтирования будущих доходов по сравнению с настоящими. Однако в последние несколько лет наблюдается снижение темпов роста инфляции – с 2005 по 2008 г. годовая инфляция потребительских цен составляла в среднем уже 11,4%, что позволяет рассчитывать на снижение коэффициента дисконтирования в будущем.

*Калибровка параметров модели выбросов парниковых газов.* Будем считать, что за десятилетие с 1998 по 2008 г. запас ресурсоэффективных технологий оставался примерно одинаковым,



**Рис. 1.** График прогнозного прироста ВВП (долл.) России при условии сохранения текущего тренда в 6,6% в год



**Рис. 2.** Графики исторической динамики инфляции и реальной процентной ставки в России, %

$C_0$ , незначительные инвестиции лишь покрывали амортизацию. Для верификации модели (2) и калибровки параметров  $\alpha$  и  $\gamma$  построим МНК-регрессию выбросов  $CO_2$  на ВВП в логарифмической шкале по данным за 9 лет (1998–2006 гг.):  $\ln E_t = \ln(a/C_0^\gamma) + \gamma Y_t + \varepsilon_t$ , где  $\varepsilon_t$  отражают все неучтенные факторы,  $t = 1, \dots, 9$ . Достаточно высокие полученные значения  $R^2$  (94%) и  $t$ -статистики коэффициента  $\gamma$  (6,99) указывают на адекватность применения модели и значений параметров  $\gamma = 0,1740 \pm 0,59$  и  $\ln(\alpha/C_0^\gamma) = 6,307 \pm 0,334$  или  $\alpha/C_0^\gamma = 548,318 \pm 6,2$  (доверительный интервал 95%). Иными словами, при текущем технологическом уровне производство единицы ВВП в России (1 долл. США в ценах 2000 г.) приводит к выбросам 0,6 кг  $CO_2$  в атмосферу (интенсивность выбросов).

Далее отметим, что, согласно экспертным оценкам, Россия имеет энергорасточительную экономику и потому обладает большими резервами сокращения выбросов парниковых газов за счет относительно недорогих мероприятий. Так, по оценкам экспертов (СЗФО, 2006), средняя удельная стоимость снижения выбросов по российским проектам лежит в пределах 1–20 долл. США за 1 т  $CO_2$ ; в (Ильинский, 2005) также приводится оценка стоимости снижения выбросов порядка 10 долл. США за 1 т  $CO_2$ , которую и возьмем за основу для дальнейших вычислений (0,01 млрд долл. США за 1 млн т  $CO_2$ ). Для сравнения (СЗФО, 2006), в Европейском союзе этот показатель равен 65–200 долл. США за 1 т  $CO_2$ . Из уравнения (1) получаем, что снижение выбросов на  $\Delta E$  при текущем значении ВВП  $Y$  может быть приближенно выражено как  $\Delta E = \alpha Y^\gamma \Delta C / C_0^{1+\gamma}$ , где  $\Delta C$  – затраты на снижение выбросов. Выбирая за базовый (для значения ВВП) 2008 г., получаем, что  $C_0 = 2,733$  млрд долл. США, или не более 0,6% ВВП.

Комбинируя полученные выше оценки, получаем оценку  $\alpha = 653,0$  млн т  $CO_2$ . Все оценки параметров, сделанные на основе данных за 1998–2008 гг. и используемые далее для моделирования, приведены в таблице.

**Таблица.** Значения параметров, используемых для моделирования

Параметр	Значение	Единица измерения
$\rho$	0,264	1/год
$A$	0,367	
$\alpha$	653,0	млн т $CO_2$
$C_0$	2,733	млрд долл. США
$Y_0$	430,1	млрд долл. США

*Возможные сценарии ограничений на выбросы CO<sub>2</sub> до 2050 г.* Выбор обязательств по ограничению выбросов парниковых газов как для всех стран в целом, так и для отдельных государств должен базироваться на научно-обоснованном сопоставлении затрат на предотвращение выбросов и ущерба (понимаемого в широком смысле, включающего экологические потери и потери в качестве жизни людей). Несмотря на существенные неопределенности, существует научный консенсус относительно того, что негативные проявления климатических изменений уже сейчас приводят к ущербу для мировой экономики и в будущем ущерб может резко возрасти (Гринкевич и др., 2006).

Поэтому широко дискутируется необходимость принимать превентивные меры для перехода на сценарии развития, подразумевающие управление выбросами. Первым шагом на этом пути стал Киотский протокол Рамочной конвенции ООН об изменении климата, срок действия которого ограничен концом 2012 г. Согласно Киотскому протоколу обязательства России состояли в сохранении среднегодовых выбросов в 2008–2012 гг. на уровне 1990 г.

Как отмечалось выше, доклад Межправительственной комиссии по изменению климата (Pachauri, Reisinger, 2007) предлагает установить планку повышения глобальной температуры в 2 °С. По оценкам ИРСС, это потребует стабилизации мировых выбросов парниковых газов к 2050 г. на уровне около 50 Гт экв. С в год (что примерно на 10% выше текущего значения) и их последующего снижения до около 30 Гт экв. С в год (сценарий В1). Таким образом, ясно, что для достижения объявленных целей меры по снижению выбросов парниковых газов должны быть усилены по сравнению с теми, что были прописаны в Киотском протоколе. Основная нагрузка при этом ложится на развитые страны. Так, Германия пообещала сократить выбросы парниковых газов к 2020 г. на 40%, Великобритания – на 34%, Евросоюз в целом – на 20% (Объемы выбросов, 2009).

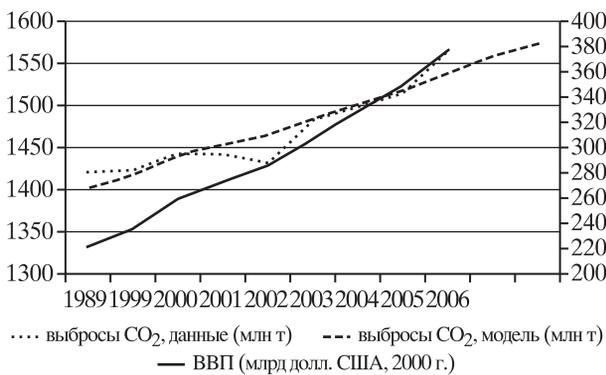
О неофициальной позиции России неоднократно заявлял Президент РФ Д.А. Медведев: к 2020 г. планируется снизить выбросы парниковых газов на 20–25% по отношению к 1990 г. (Видеоблог Дмитрия Медведева, 2009). Вопрос о среднесрочных целях снижения выбросов парниковых газов также находится в центре внимания российских неправительственных организаций, работающих в сфере экологии и климата. Так, “Гринпис” России говорит о необходимости снижения выбросов в энергетике на 37%, WWF России считает, что цель должна соответствовать рекомендациям МГЭИК, а именно: снижение на 40% относительно 1990 г. Менее радикально высказались участники Всероссийской конференции НПО “Зеленое движение и экологические вызовы”, призвавшей правительство РФ остановить рост выбросов к 2020 г. на уровне по крайней мере на 25% ниже уровня 1990 г., что совпадает с позицией Д.А. Медведева, и принять долгосрочные обязательства по снижению выбросов парниковых газов не менее чем на 80% к 2050 г. (Объемы выбросов, 2009).

В данной работе будем рассматривать следующие сценарии снижения выбросов к 2050 г.:

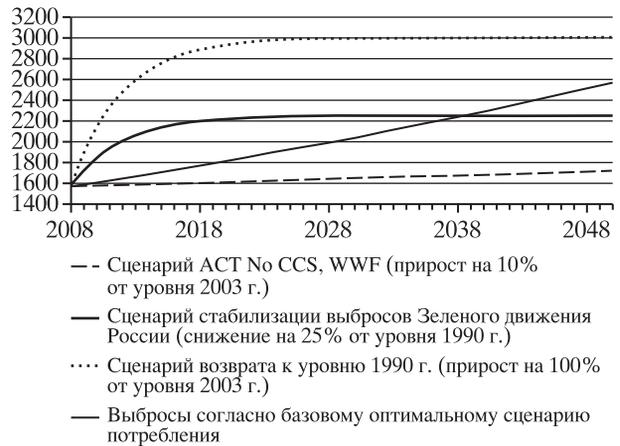
- 1) стабилизация выбросов на уровне 1990 г.,
- 2) стабилизация выбросов на уровне 75% параметров 1990 г.,
- 3) рост выбросов относительно уровня 2003 г. на 10%.

Три данных сценария являются примерами трех возможных подходов к ограничению выбросов – сценарий 1 разрешает достаточно большой прирост выбросов, сценарий 3 предлагает радикально снижать выбросы, начиная с текущего момента, тогда как сценарий 2 представляет собой компромиссный вариант.

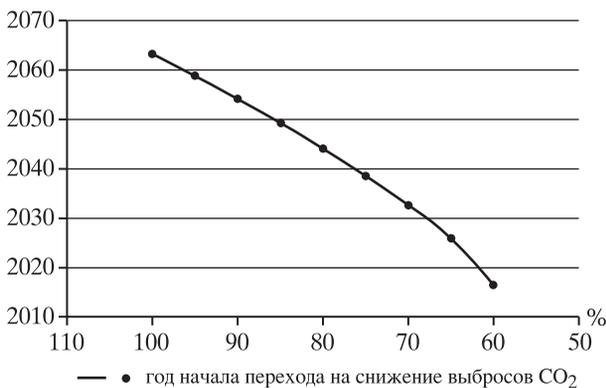
На рис. 4 изображена динамика ограничения выбросов согласно трем указанным сценариям, а также прогноз выбросов, рассчитанный по предлагаемой модели (2) (расчет ведется от 2008 г.). В этом прогнозе не предполагается специального управления по снижению выбросов и рост экономики происходит согласно оптимальному сценарию максимизации потребления. В этом случае выбросы парниковых газов к 2050 г. вырастут на 63% по сравнению с 2008 г., но останутся ниже уровня 1990 г. на 14%. При условии продолжения развития согласно этому тренду, выбросы парниковых газов будут прирастать примерно на 1% в год и выйдут на уровень 1990 г. в 2063 г. Таким образом, сценарий 1 не потребует специальных мер, направленных на снижение выбросов до как минимум 2050 г.



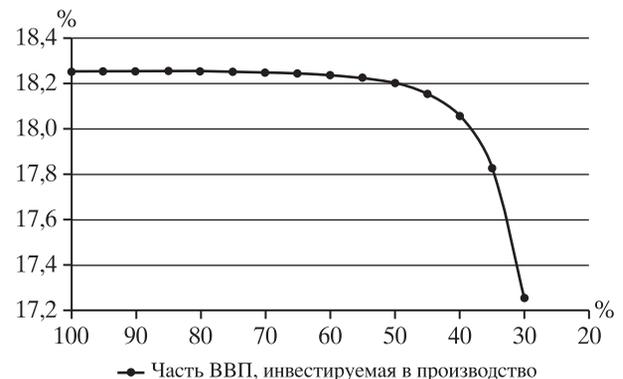
**Рис. 3.** Графики исторической динамики ВВП и выбросов CO<sub>2</sub>, а также выбросов CO<sub>2</sub> согласно модели с эластичностью



**Рис. 4.** Графики сценариев 1–3 ограничений выбросов CO<sub>2</sub>, а также прогноз выбросов CO<sub>2</sub> согласно модели с эластичностью при условии сохранения текущего тренда прироста ВВП 6,6% в год и отсутствии специальных мер по снижению выбросов



**Рис. 5.** График зависимости прогнозного времени выхода на установленное ограничение от уровня ограничения относительно 1990 г.



**Рис. 6.** График зависимости прогнозной части ВВП, затраченной на развитие “чистых” технологий и необходимой для стабилизации выбросов на установленном ограничении от уровня ограничения относительно 1990 г.

Рассмотрим теперь сценарий, в котором подразумевается стабилизация к 2050 г. выбросов на уровне ниже 1990 г. Траектория выбросов, соответствующая оптимальному сценарию максимизации потребления, пересекает кривую-ограничение в некоторый момент времени, начиная с которого необходимо применять меры по снижению. В последующий период для удержания выбросов на уровне предписанного ограничения потребуется инвестиция части ВВП в “чистые” технологии. Для простоты будем моделировать сценарий выбросов со стабилизацией формулой вида  $E^*(t) = E_0 + B(1 - e^{-\kappa t})$ ,  $t \geq 0$ , где  $E_0$  – начальное значение выбросов,  $E_0 + B$ ,  $B > 0$  – уровень стабилизации,  $\kappa > 0$  – эластичность.

Близкое к линейному уменьшение времени выхода на установленное ограничение от уровня ограничения относительно 1990 г. показано на рис. 5. На рис. 6 приведена зависимость части ВВП, которую необходимо затрачивать на развитие “чистых” технологий, чтобы стабилизировать выбросы на установленном ограничении относительно уровня 1990 г. Зависимость имеет вогнутый характер, т.е. снижение уровня ограничений требует прироста темпов инвестирования.

В случае второго сценария, предполагающего снижение выбросов на 25% ниже уровня 1990 г., начало применения специальных мер по снижению можно отложить до 2039 г., после

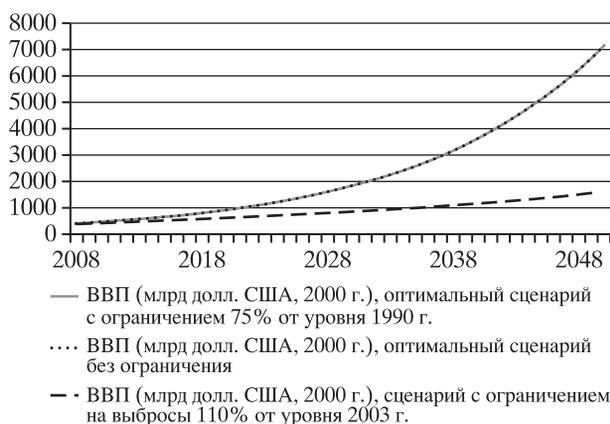


Рис. 7. График зависимости прогнозного ВВП в соответствии со сценариями 1–3

к 2003 г., необходимо, чтобы  $\mu = 0,002$ . В этом случае в рост производства необходимо вкладывать лишь около 3% ВВП (против 18% в сценарии без ограничений), остальные 15% – в развитие “чистых” технологий. Суммарные инвестиции составят 2065 млрд долл. США в ценах 2000 г. Суммарная потеря ВВП по сравнению со сценарием без ограничений составит около 63%. На рис. 7 приведены соответствующие графики ВВП.

чего необходимо вкладывать порядка 0,1% ВВП ежегодно в развитие “чистых” технологий. В общей сложности за 11 лет (с 2039 г., времени начала принятия специальных мер, до 2050 г.) суммарные инвестиции составят 6,1 млрд долл. в ценах 2000 г. Столь незначительное снижение темпа прироста ВВП практически не скажется на его абсолютных цифрах – суммарная потеря ВВП по сравнению со сценарием без ограничений составит около 0,1%.

В рамках третьего сценария начинать специальное инвестирование в “чистые” технологии необходимо уже сейчас. Для простоты будем моделировать сценарий прироста выбросов формулой вида  $E^*(t) = E_0 e^{\mu t}$ ,  $t \geq 0$ , где  $E_0$  – начальное значение выбросов,  $\mu > 0$  – эластичность. Чтобы удержать выбросы на уровне 10%

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Асеев С.М., Кряжмский А.В.** (2007): Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста. Труды МИАН. 257. М.: МАИК Наука, Интерпериодика.
- Видеоблог Дмитрия Медведева** (2009): Крупнейшие эмитенты парниковых газов должны одновременно принять на себя необходимые обязательства. [Электронный ресурс] 14 декабря 2009 г. Режим доступа: <http://blog.kremlin.ru/post/53>, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: февраль 2012 г.).
- Гринкевич И.Г., Кокорин А.О., Луговой О.В.** и др. (2006): Развитие энергетики и снижение выбросов парниковых газов. М.: WWF России.
- Ильинский А.И.** (2005): Киотский протокол и новый углеродный ресурс России // *Электронный журнал энергетической компании “Экологические системы”*. № 8.
- Климатическая доктрина РФ** (2009): О Климатической доктрине Российской Федерации. [Электронный документ] Распоряжение Президента РФ от 17 декабря 2009 г. № 861-рп, сайт Президента РФ. Режим доступа: <http://text.document.kremlin.ru/SESSION/PILOT/main.htm>, свободный. Загл. с экрана. Яз. русск. (дата обращения: февраль 2012 г.).
- Объемы выбросов** (2009): Объемы выбросов и позиция на саммите стран G20. [Электронный ресурс]. 4 декабря 2009 г. Режим доступа: [http://www.bbc.co.uk/russian/science/2009/12/091204\\_co2\\_emission\\_by\\_country.shtml](http://www.bbc.co.uk/russian/science/2009/12/091204_co2_emission_by_country.shtml), свободный. Загл. с экрана. Яз. рус., англ. (дата обращения: февраль 2012 г.).
- Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В.** и др. (1983): Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука.
- Ровенская Е.А.** (2009): К решению задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями методом двойных вариаций // *Вестник Московского государственного университета. Серия “Вычислительная математика и кибернетика”*. Т. 33. № 3.
- СЗФО** (2006): СЗФО – главный продавец квот на выбросы CO<sub>2</sub> в Европу. [Электронный документ]. О разном. 17 января 2006 г. Режим доступа: <http://www.drevesina.com/materials.htm/a6/b263/>, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: февраль 2012 г.).
- Acemoglu D.** (2009): *Introduction to Modern Economic Growth*. Princeton: Princeton University Press.
- Digas B., Maksimov V., Schrattenholzer L.** (2009): On Costs and Benefits of Russia’s Participation in the Kyoto Protocol. IIASA Interim Report IR-09-001.

- Manne A., Richels R.** (2004): US rejection of the Kyoto Protocol: the impact on compliance costs and CO<sub>2</sub> emissions // *Energy Policy*. Vol. 32.
- Nordhaus W.D., Boyer J.** (2000): *Warming the World: Economic Models of Global Warming*. Cambridge, UK: MIT Press.
- OECD.Stat Extracts** (2012): Welcome to OECD.Stat Extracts. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://stats.oecd.org/Index.aspx>, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус., англ. (дата обращения: февраль 2012 г.).
- Pachauri R.K., Reisinger A.** (Eds.) (2007): *IPCC Fourth Assessment Report (AR4)*. Geneva, Switzerland: IPCC.
- Rovenskaya E.A.** (2005): Sensitivity and cost-benefit analyses of emission-constrained technological growth under uncertainty in natural emission. IIASA Interim Report IR-05-051.
- Rovenskaya E.A.** (2006): A model of technological growth under emission constraints. IIASA Interim Report IR-06-021.
- World Bank** (2012): Russian Federation. [Электронный ресурс]. World Bank. Режим доступа: <http://data.worldbank.org/country/russian-federation>, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: февраль 2012 г.).

Поступила в редакцию  
29.10.2010 г.

## A Model of Optimal Economic Growth and Environmental Constraints

**E.A. Rovenskaya**

A simplified model of economic growth under the constraints on the environmental services consumption is proposed. The environmental services consumption are supposed to grow together with production, but can be reduced owing to the investment in resource-effective technology. Investment control is aimed to the integral discounted country's GDP maximization. The model is calibrated for Russia for the case of the greenhouse gases emissions. We analyze an optimal growth and emissions scenario as well as several others.

**Keywords:** economic growth model, sustainable development, environmental services.