МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ СРЕДСТВ ДЕПРЕССИВНЫХ ПРОИЗВОДСТВ*

Е.М. Бронштейн

(Уфа)

Рассмотрена оптимизационная задача распределения средств, полученных в результате деятельности предприятия, на реинвестиции и потребление на бесконечном временном интервале при переменной производственной функции. Для депрессивных (и стабильных) предприятий установлены свойства решения.

Ключевые слова: производство, потребление, оптимизация, производственная функция.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рациональное распределение средств, полученных в результате производственной деятельности, является важной задачей, стоящей перед менеджментом предприятия. Понятия "инвестирование" и "сбережения" были проанализированы во многих работах (см. обзор литературы в (Костромской, 2010, с. 1–6)).

В ряде работ ставится вопрос об оптимальном в некотором смысле распределении ресурсов. Чаще всего при этом рассматриваются экономические системы в условиях неопределенности. В (Смоляк, 2002, с. 168–175; Бронштейн, 2005, с. 17–29) в качестве управляющих факторов приняты те или иные временные характеристики инвестиционных проектов. В (Баркалов, Бакунец и др., 2002, с. 1–68) исследуется задача оптимального распределения средств по видам деятельности; в (Наталуха, 2005, с. 34–40) строятся оптимальные стратегии распределения средств на инвестирование и потребление с учетом риска на конечном временном горизонте; в (Нурминский, Ащепков, Трифонов 2000, разд. 2.3) анализируются краткосрочные стратегии оптимального инвестирования в детерминированных условиях; в (Cai, 2006, p. 1359–1377) – детерминированная динамическая задача оптимального соотношения между затратами на труд и капитал; в работах Р. Мертона и др. – непрерывная динамическая задача оптимального (в смысле дисконтированной функции полезности) распределения средств на потребление и инвестиции в ценные бумаги в условиях случайной процентной ставки (см. обзор результатов в (Kabanov, Safarian 2010, гл. 4)).

Задача, рассматриваемая в данной работе, относится к классу дискретных задач экономической динамики Рамсея–Касса–Купманса. Более общая проблема, в которой в качестве одного из факторов принят труд, по-видимому, впервые исследована в (Ramsey, 1928, p. 553–559), подробное изложение результатов приведено в (Интриллигатор, 2002), уточнение постановки и свойства решения см. в (Лобанов, 1999, с. 28–41). Близкие задачи подробно исследованы в обстоятельной монографии (Беленький, 2007, гл. 5).

Особенностями анализируемой задачи являются бесконечномерность и нестационарность производственной функции. В качестве целевой функции принимается чистая приведенная стоимость (*NPV*) потока платежей-расходов на потребление по некоторой ставке дисконта (ли-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-06-00001) и гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации № НШ-65497.2010.9 во время пребывания автора в Римском университете Ла Сапиенца по программе "Эразмус Мундус".

нейная целевая функция). Подобная постановка исходит из того, что цель производственной деятельности заключается в получении средств на потребление.

Отметим, что в данной работе применяются элементарные методы исследования. При анализе более общих задач используются принцип максимума, динамическое программирование.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается производство в дискретные моменты времени, обозначенные числами 0, 1, … . Предполагается, что вложение средств в производство в момент n дает определенную отдачу в момент $n + 1$ и не сказывается далее. Пусть эта отдача описывается производственной функцией $f_{n+1}(t)$, где t – средства, вложенные в производство в момент n. Предполагается, что все средства, не вложенные в производство, расходуются на потребление. Таким образом, если в момент n в результате производственной деятельности получены средства в размере a_n, а в потребительский сектор поступает b_n, то реинвестиции составят $a_n - b_n$, т.е. $a_{n+1} = f_{n+1}(a_n - b_n)$, $n = 0, 1, \ldots$. При этом в начальный (нулевой) момент в производство вкладывается некоторая положительная сумма a_0, а потребление отсутствует $b_0 = 0$.

Целью производства является обеспечение высокого уровня потребления, поэтому в качестве целевой функции принимается чистая приведенная стоимость потока платежей, направляемых в потребительский сектор, при некотором дисконт-множителе $q \in (0, 1)$.

Таким образом, задача имеет следующий вид: необходимо найти последовательности (бесконечномерные векторы) $(a_1, a_2, \ldots)$ и $(b_1, b_2, \ldots)$ такие, что при заданных $a_0 > 0$, $b_0 = 0$ и дисконт-множителе $q \in (0,1)$:

$$0 \le b_n \le a_n, \quad n = 1, 2, \ldots; \tag{1}$$

$$a_{n+1} = f_{n+1}(a_n - b_n), \quad n = 0, 1, \ldots; \tag{2}$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n \to \max. \tag{3}$$

Поясним смысл целевой функции. Пусть свободные средства хранятся в банке, обеспечивающем фиксированную на неограниченное время процентную ставку i, где $i = 1/q - 1$. Целевая функция S – минимальная сумма на счете в начальный момент, которая допускает выплаты в размерах $b_1, \ldots, b_n, \ldots$ в соответствующие моменты времени.

Вектор $(b_1, b_2, \ldots)$ однозначно определяет вектор $(a_1, a_2, \ldots)$, поэтому в дальнейшем мы будем искать именно его.

В общем случае (1)–(3) это бесконечномерная задача нелинейной оптимизации. Наложим некоторые естественные ограничения как на отдельные производственные функции f_n, так и на их совокупность.

1. Все функции f_n – возрастающие (с ростом вложений производство сокращаться не может).

2. Из сказанного выше следует, что если в момент n нет вложений в производство, то отдачи в момент $n + 1$ не будет. Это означает, что $f_n(0) = 0$. Следовательно, если $b_n = a_n$ при некотором n (все заработанные средства направлены в потребительский сектор), то производственный процесс прекращается: $b_k = a_k = 0$ при $k > n$.

3. Эффективность приращения вложения средств в размере Δt в производственный сектор в момент n при исходных вложениях t определяется как $(f_n(t + \Delta t) - f_n(t))/\Delta t$. Естественно полагать, что с ростом t эффективность приращения вложения уменьшается при любом Δt. Это означает, что все функции f_n вогнутые.

4. Все функции f_n дифференцируемые (т.е. в экономической терминологии всегда существует предельная эффективность приращения средств). Полагаем, что производная каждой функции f_n строго убывает.

5. Поскольку производственные возможности не безграничны, все функции f_n равностепенно ограничены, т.е. существует такое число M, что $f_n(t) \le M$ при любых t, n. Отсюда следует, что целевая функция (3) ограничена.

6. Аналогично ограничена эффективность приращения средств, т.е. предполагается существование такого числа N, что $f_n'(t) \le N$ при любых t, n. Из убывания производных следует, что для этого достаточно выполнения неравенств $f_n'(0) \le N$.

7. Рассматриваемая производственная система невырожденная. Это означает, что $f_n > t$ на некотором интервале $(0, c)$ при всех n. Дополнительно полагаем, что $a_0 \le c$.

В общем случае решение бесконечномерной задачи (1)–(3) не существует. Тем не менее, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *При принятых ограничениях на производственные функции решение* (1)–(3) *существует, т.е. супремум целевой функции достигается.*

Доказательство. Введем в пространстве ограниченных последовательностей $m = (a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots)$ норму $\|m\| = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n/2}(|a_n| + |b_n|)$. Множество последовательностей, ограниченных по модулю числом M, в этом пространстве является компактным (проверка аналогична доказательству компактности гильбертова куба). Условия (1), (2) определяют замкнутое подмножество этого множества, таким образом, допустимое множество задачи (1)–(3) компактно.

Целевая функция (3) является непрерывной на допустимом множестве. Действительно, справедлива оценка

$$0 \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n/2}(q^{n/2} b_n) \le \|m\| \sum_{n=1}^{\infty} q^{n/2},$$

откуда в силу сходимости ряда в правой части следует нужное утверждение. При доказательстве использовано только пятое ограничение на производственные функции.

В описанное семейство производственных систем попадает множество производственных процессов. Выделим некоторые их классы.

Мы называем производство *депрессивным*, если предельная эффективность приращения вложения средств с течением времени не растет. Аналитически это означает, что $f_{n+1}'(t) \le f_n'(t)$ при всех n, t. Отсюда и из ограничения 2 следует, что $f_{n+1}(t) \le f_n(t)$. Примеры таких последовательностей

$$f_n(t) = a(1 + 1/(n+1))t/(t+b), \quad f_n(t) = a(1 + 1/(n+1))(1 - \exp(-t/b)).$$

Производство называется *прогрессирующим*, если выполняется противоположное условие, т.е. $f_{n+1}'(t) \ge f_n'(t)$ при всех n, t. Отсюда аналогично $f_{n+1}(t) \ge f_n(t)$. Приведем примеры таких последовательностей: $f_n(t) = a(2 - 1/(n+1))t/(t+b)$, $f_n(t) = a(2 - 1/(n+1))(1 - \exp(-t/b))$.

Производство называется *стабильным*, если функции f совпадают. В этом случае мы опускаем индекс n. Согласно данным определениям, стабильные производства одновременно депрессивные и прогрессирующие.

Дальнейшее изложение посвящено исследованию решения задачи (1)–(3) для депрессивного производства.

3. СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1)–(3) ДЛЯ ДЕПРЕССИВНЫХ ПРОИЗВОДСТВ

Введем обозначения: $f_{(n,k)} = f_{n+1} \circ \ldots \circ f_{n+k}$, $n = 0, 1, \ldots$; $k = 1, 2, \ldots$; t_n^* – корень уравнения $f_n'(t) = 1/q$. Из ограничений на производственные функции следует, что существует не более одного положительного корня этого уравнения, причем при $f_n'(0) > 1/q$ такой корень существует.

В силу принятых ограничений существуют числа $u_n > 0$, для которых $f_n(u_n) = u_n$. Последовательность $\{u_n\}$ убывающая. Из невырожденности следует, что $\lim_{n\to\infty} u_n > 0$, причем $a_0 \in \left(0, \lim_{n\to\infty} u_n\right)$.

Для депрессивного производства последовательность $t_1^*, t_2^*, \ldots$ убывающая. Она может содержать как конечное (в том числе нулевое) число элементов, так и бесконечное.

Предложение 1. *В оптимальном векторе* $(b_1, b_2, \ldots)$ *между положительными элементами отсутствуют нулевые элементы, причем если номера последовательных положительных элементов* n *и* $n+1$, *то* $a_n - b_n = t_{n+1}^*$.

Доказательство. Естественно, первый из этих двух платежей меньше допустимого максимума из условия (1): в противном случае процесс прекращается, поэтому последующих положительных элементов не существует.

Пусть n и $n+p$ – номера последовательных положительных элементов ($p \geq 1$). Значение b_n можно увеличить на достаточно малое значение Δb_n и соответственно уменьшить b_{n+p} таким образом, чтобы новое значение b_{n+p} оставалось допустимым, сохранялись промежуточные нули и не изменялись величины $b_{n+s} (s > p)$, если среди них есть ненулевые. Для этого достаточно, чтобы не изменилась разность $a_{n+p} - b_{n+p}$. Поскольку промежуточные значения нулевые, то $a_{n+p} = f_{(n,p)}(a_n - b_n)$, а допустимое уменьшение b_{n+p} равно

$$f_{(n,p)}(a_n - b_n) - f_{(n,p)}(a_n - b_n - \Delta b_n).$$

При этом целевая функция изменится на величину

$$\Delta b_n q^n - (f_{(n,p)}(a_n - b_n) - f_{(n,p)}(a_n - b_n - \Delta b_n)) q^{n+p}.$$

Если исходная последовательность является оптимальной, то должно выполняться неравенство $\Delta b_n q^n - (f_{(n,p)}(a_n - b_n) - f_{(n,p)}(a_n - b_n - \Delta b_n))\, q^{n+p} \leq 0$. Поделив обе части неравенства на положительную величину $\Delta b_n q^n$ и переходя к пределу при $\Delta b_n \to +0$, получим неравенство $f'_{(n,p)}(a_n - b_n) \geq 1/q^p$.

Уменьшим теперь b_n на достаточно малую величину Δb_n и соответственно увеличим b_{n+p}. При этом если существуют положительные значения b_{n+s} при некотором $s > p$, то максимально допустимое приращение b_{n+p} равно $f_{(n,p)}(a_n - b_n + \Delta b_n) - f_{(n,p)}(a_n - b_n)$, если же таких s нет, то это значение приращения обеспечивает выполнение равенства $b_{n+p} = a_{n+p}$. Аналогично предыдущему должно выполняться неравенство $-\Delta b_n q^n + (f_{(n,p)}(a_n - b_n + \Delta b_n) - f_{(n,p)}(a_n - b_n)) q^{n+p} \leq 0$.

Выполняя те же действия, получим $f'_{(n,p)}(a_n - b_n) \leq 1/q^p$. Окончательно имеем:

$$f'_{(n,p)}(a_n - b_n) = 1/q^p. \tag{4}$$

Этот вывод справедлив для любых типов производств.

Пусть теперь $p > 1$. Можно уменьшить b_n на достаточно малую величину и соответственно увеличить b_{n+1} (эта величина первоначально равна 0) таким образом, чтобы это не повлияло на другие значения b_k. Аналогично предыдущему $f'_{n+1}(a_n - b_n) \leq 1/q^p$. Увеличим теперь на достаточно малую величину $b_{n+p-1} = 0$ и соответственно уменьшим b_{n+p}. В результате получим: $f'_{n+p}(a_{n+p-1} - b_{n+p-1}) \geq 1/q^p$.

При этом выполняются следующие неравенства:

1) в силу исходных предположений $a_{n+p-1} - b_{n+p-1} = a_{n+p-1} = f_{(n,p)}(a_n - b_n) > a_n - b_n$, откуда вследствие вогнутости производственных функций $f'_{n+p}(a_{n+p-1} - b_{n+p-1}) < f'_{n+p}(a_n - b_n)$;

2) вследствие депрессивности производства $f'_{n+p}(a_n - b_n) \leq f'_{n+1}(a_n - b_n)$.

Окончательно получили противоречивую цепочку неравенств

$$\frac{1}{q} \leq f'_{n+p}(a_{n+p-1} - b_{n+p-1}) \leq f'_{n+p}(a_n - b_n) \leq f'_{n+1}(a_n - b_n) \leq \frac{1}{q}.$$

При $p = 1$ из условия (4) вытекает, что $f'_{(n,1)}(a_n - b_n) = f'_{n+1}(a_n - b_n) = 1/q$, т.е. $a_n = b_n = t'_{n+1}$, что и требовалось доказать.

Таким образом, если в последовательности $\{b_n\}$ положительных величин не менее двух:

– то оптимальная последовательность $(b_1, b_2, \ldots)$ имеет вид $(0, \ldots, 0, f_{(0,k)}(a_0) - t_k^*, f_{k+1}(t_k^*) - t_{k+1}^*, \ldots, f_{k+s}(t_{k+s-1}^*) - t_{k+s}^*, f_{k+s+1}(t_{k+s}^*))$,

– последовательность $(a_1, a_2, \ldots)$ –

$$(f_{(0,1)}(a_0), \ldots, f_{(0,k)}(a_0), f_{k+1}(t_k^*), \ldots, f_{k+s+1}(t_{k+s}^*), 0, \ldots),$$

– затраты на производство (реинвестиции) –

$$(f_{(0,1)}(a_0), \ldots, f_{(0,k)}(a_0), t_k^*, \ldots, t_{k+s}^*, 0, \ldots).$$

При этом возможны случаи $s = 0$, $s = \infty$. Средства, направляемые на реинвестиции, растут до момента *k,* а затем уменьшаются.

Проверим корректность выписанного выражения. Для этого надо убедиться в том, что если t_{k+1}^* существует (а тогда существует и t_k^*), то $f_{k+1}(t_k^*) > t_{k+1}^*$. Действительно, $t_k^* \geq t_{k+1}^*$. Отсюда вследствие невырожденности и возрастания $f_{k+1}(t_k^*) \geq f_{k+1}(t_{k+1}^*) > t_{k+1}^*$.

Рассмотрим все возможные ситуации.

1. Не существует значений t_k^* ни при каких k. Это означает, что $f_1'(0) \leq 1/q$, откуда с учетом ограничений справедливо неравенство $f_1(t) \leq t/q$, а тогда $f_n(t) \leq t/q$ при всех n.

Предложение 2. *В случае* 1 *оптимальной является стратегия фирмы-однодневки: все полученные средства в момент* 1 *надо израсходовать на потребление*.

Доказательство. Сравним стратегию фирмы-однодневки с любой альтернативной. Целевая функция фирмы-однодневки равна $a_1 q = f_1(a_0)q$, для альтернативной стратегии – $\sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n$ при выполнении условий (1), (2). Имеем:

$$a_2 = f_2(a_1 - b_1) \leq \frac{a_1 - b_1}{q}, \quad a_3 = f_3(a_2 - b_2) \leq \frac{a_1 - b_1}{q^2} - \frac{b_2}{q} \leq \ldots, a_{n+1} \leq \frac{a_1 - b_1}{q^n} - \frac{b_2}{q^{n-1}} - \ldots - \frac{b_n}{q}.$$

Умножая последнее неравенство на q^{n+1}, получим: $\sum_{i=1}^{n} b_i q^i \leq a_1 q$, т.е. стратегия закрытия производства на первом шаге – в числе оптимальных.

2. Для конечного (положительного) числа моментов времени существуют значения t_k^*, причем k – максимальный из таких индексов. Это означает, что $f_s'(0) > 1/q$ при $s \leq k$, при $f_s'(0) \leq 1/q$ при $s > k$.

2А. $f_{(0,s)}(a_0) \leq t_s^*$ при всех s, при которых t_s^* существует. Тогда по предложению 2 в последовательности $(b_1, b_2, \ldots)$ имеется один ненулевой элемент.

Предложение 3. *Максимум целевой функции достигается, когда ненулевой элемент в последовательности сумм, направляемых в потребительский сектор, расположен на месте с номером k.*

Доказательство. Поскольку последовательность $\{f_{(0,s)}(a_0)\}$ возрастает, а $\{t_s^*\}$, соответственно, убывает, то в случае 2А $f_{(0,s)}(a_0) \leq \min\{t_s^*\}$ при всех s, в частности, $f_{(0,s-1)}(a_0) \leq t_s^*$.

Сравним значения целевых функций для последовательностей сумм, направляемых на потребление, у одной из которых единственный ненулевой элемент расположен на месте $s - 1$, а у второй – на месте s. Они равны $f_{(0,s-1)}(a_0)q^{s-1}$ и $f_{(0,s)}(a_0)q^s = f_s(f_{(0,s-1)}(a_0))q^s$ соответственно.

Поскольку $f_{(0,s-1)}(a_0) \leq t_s^*$, то из свойств функций следует, что $f_s(f_{(0,s-1)}(a_0)) \geq f_{(0,s-1)}(a_0)/q$, а тогда

$$f_{(0,s)}(a_0)q^s \geq \frac{f_{(0,s-1)}(a_0)}{q} q^s = f_{(0,s-1)}(a_0)q^{s-1}.$$

Таким образом, в оптимальном векторе единственная ненулевая компонента находится на максимально дальнем допустимом месте, что и требовалось доказать.

2Б. $f_{(0,s)}(a_0) > t_s^*$ при некотором s. Поскольку последовательность $\{t_s^*\}$ убывает, а $\{f_{(0,s)}(a_0)\}$ – возрастает, то существует такое p, что $f_{(0,s)}(a_0) > t_s^*$ при $s \geq p$ и $f_{(0,s)}(a_0) \leq t_s^*$ при $s < p$. В этом случае в оптимальный вектор может войти несколько ненулевых компонент. Разумеется, их нет в моменты времени, при которых не существует t_s^*. Таким образом, в оптимальном векторе число ненулевых компонент конечное.

Предложение 4. *Первой ненулевой компонентой в оптимальном векторе является компонента с номером p.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $p = 1$, т.е. $a_1 = f_1(a_0) > t_1^*$. Рассмотрим первые два элемента двух последовательностей при $k = 1$ и $k = 2$ (если t_2^* существует), у которых все остальные элементы совпадают. При $k = 1$ эти элементы равны $(a_1 - t_1^*, f_2(t_1^*) - t_2^*)$, при $k = 2 - (0, f_2(a_1) - t_2^*)$. Соответствующие отрезки целевых функций имеют вид $(a_1 - t_1^*)q + (f_2(t_1^*) - t_2^*)q^2$ и $(f_2(a_1) - t_2^*)q^2$, а их разность –

$$(a_1 - t_1^*)q + (f_2(t_1^*) - t_2^*)q^2 - (f_2(a_1) - t_2^*)q^2 = (a_1 - t_1^*)q - (f_2(a_1) - f_2(t_1^*))q^2 =$$
$$= (a_1 - t_1^*)q - f_2'(\xi)(a_1 - t_1^*)q^2 = (a_1 - t_1^*)(1 - f_2'(\xi)q) > 0,$$

поскольку $\xi \in (t_1^*, a_1) \in (t_2^*, a_1)$ и $f_2'(\xi) < 1/q$. Предложение доказано.

Что касается последнего ненулевого члена оптимальной последовательности, то столь однозначно определить его невозможно. Сравним целевые функции при последних ненулевых компонентах вектора в моменты $k + s$ и $k + s + 1$, если они оба допустимы. Целевые функции отличаются двумя слагаемыми: в первом случае $f_{k+s+1}(t_{k+s}^*)q^{k+s+1} + 0$, во втором – $(f_{k+s+1}(t_{k+s}^*) - t_{k+s+1}^*)q^{k+s+1} + f_{k+s+2}(t_{k+s+1}^*)q^{k+s+2}$. Вычитая из второй суммы первую и поделив на q^{k+s+1}, получим величину $f_{k+s+2}(t_{k+s+1}^*)q - t_{k+s+1}^*$. Тем самым, достаточным (но не необходимым!) условием продолжения производственной деятельности является выполнение неравенства

$$\frac{f_{k+s+2}(t_{k+s+1}^*)}{t_{k+s+1}^*} > \frac{1}{q}. \tag{5}$$

В частности, если это неравенство нарушается для моментов времени r, $r + 1, \ldots, u$ (u – максимальный момент, для которого существует t_s^*), то производственный процесс следует прекратить не позднее момента r.

3. Величины t_k^* существуют при всех k.

Предложение 5. *В случае* 3 $f_{(0,k)}(a_0) > t_k^*$ *при достаточно больших k.*

Доказательство. Пусть это неверно, т.е. $f_{(0,k)}(a_0) \le t_k^*$ при всех k. Последовательность $\{t_k^*\}$ убывает, а $\{f_{(0,k)}(a_0)\}$ – возрастает. Отсюда вытекает, что $f_{(0,k)}(a_0) \le \lim\limits_{k\to\infty} t_k^*$, причем предел в правой части положительный. Из свойств функций следует, что на интервале $\left(0, \lim\limits_{k\to\infty} t_k^*\right)$ справедливы неравенства $f_k'(t) \ge 1/q$, т.е. $f_k(t) \ge t/q$, поскольку $f_k(0) = 0$. Но тогда

$$f_{(0,1)}(a_0) \ge \frac{a_0}{q}, \quad f_{(0,2)}(a_0) \ge \frac{a_0}{q^2}, \ldots, f_{(0,k)}(a_0) \ge \frac{a_0}{q^k}, \ldots,$$

т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} f_{(0,k)}(a_0) = +\infty$ – противоречие.

В этом случае анализ не отличается от 2Б. Первое ненулевое поступление средств в потребительский сектор в оптимальном режиме осуществляется в первый момент, при котором $f_{(0,k)}(a_0) > t_k^*$, но производственный процесс может продолжаться неограниченно долго.

Итогом проведенного анализа является следующая теорема.

Теорема 2. *Для депрессивных производств:*

– если $f_1'(0) \le 1/q$, то оптимальная последовательность расходов на потребление имеет вид $(f_0(a_0), 0, 0, \ldots)$ (*фирма-однодневка*);

– если $f_{(0,s)}(a_0) \le t_s^*$ для всех s, при которых величина t_s^* существует и k – максимальный из таких моментов времени, то $(0, \ldots, 0, f_{(0,k)}(a_0), 0, \ldots)$ *– оптимальная последовательность*;

– если $f_{(0,s)}(a_0) \le t_s^*$ для $s < p$, $f_{(0,s)}(a_0) > t_s^*$ для $s \le p \le k$, t_s^* существует только при $s \le k$, то $(0, \ldots, 0, f_{(0,p)}(a_0) - t_p^*, f_{p+1}(t_p^*) - t_{p+1}^*, \ldots, f_r(t_{r-1}^*) - t_r^*, f_{r+1}(t_r^*), 0, \ldots)$;

– оптимальная последовательность при некотором $r \le k$;

– если t_s^* существуют при всех значениях s, то оптимальная последовательность имеет тот же вид, что и в предыдущем случае, но r может быть бесконечным.

4. ПРИМЕР

Рассмотрим семейство дробно линейных функций $f_n(t) = a(1 + 1/n)t/(t + b)$, $a, b > 0$, $n = 1, 2,\ldots$. Эти функции вогнутые, возрастающие и ограниченные в совокупности числом $2a$. Далее $f'_{n+1}(t) < f'_n(t)$ – производные ограничены в совокупности величиной $2a/b$. Таким образом, ограничения 1–6 выполняются. Поскольку $f_\infty(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = \dfrac{at}{t+b}$, $f'_\infty(0) = a/b$, то условие невырожденности имеет вид $a/b > 1$. Отсюда следует, что при $a/b \ge 1/q$ значения t_n^* существуют при любых n, а при $1 < a/b < 1/q$ они определены при $n \le [aq/(b-aq)] = n^*$. При этих значениях n справедливо равенство: $t_n^* = (abq(1+1/n))^{1/2} - b$.

Достаточное условие (5) продолжения производственного процесса в момент n (в случае существования значения t_{n+1}^*) имеет вид:

$$\frac{f_{n+2}(t_{n+1}^*)}{t_{n+1}^*} = \frac{a(1+1/(n+2))}{t_{n+1}^*+b} > \frac{1}{q}.$$

Полученное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{aq}{b} > \frac{(n+1)^2(n+3)}{(n+2)^3}.$$

Полагая $x = n + 2$, имеем:

$$\frac{(n+1)^2(n+3)}{(n+2)^2} = 1 - \frac{x^2+x-1}{x^3}.$$

При $x > 1$ (т.е. при положительных n) последнее выражение возрастает, его предел равен 1. Отсюда, если $aq/b \ge 1$, то реализуется случай 3, причем при оптимальной стратегии производственный процесс продолжается бесконечно.

Пусть теперь $1 < a/b < 1/q$. Будем считать, что $[aq/(b - aq)] = n^* \ge 1$, в противном случае реализуется тривиальная ситуация фирмы-однодневки. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $f_{(0,s)}(a_0) \le t_s^*$ при всех $s \le n^*$. По теореме 2, в оптимальной стратегии до момента n^* расходы на потребление отсутствуют, в момент n^* все полученные средства идут на потребление, и производство прекращается.

2. Пусть существует момент $n^{**} < n$ такой, что при $s < n^{**}$ выполняется неравенство $f_{(0,s)}(a_0) \le t_s^*$, а при $n = n^{**}$ оно нарушается.

2А. Пусть при всех $n \le n^{**}$ выполняется неравенство $aq/b > (n + 1)^2(n + 3)/(n + 2)^2$. Тогда в оптимальной стратегии потребление до момента n^{**} отсутствует, затем продолжается до момента n^*, а после производство прекращается.

2Б. Существует момент $n^{***} < n^*$ такой, что $aq/b > (n + 1)^2(n + 3)/(n + 2)^3$ при $n < n^{***}$ и $aq/b \le (n + 1)^2(n + 3)/(n + 2)^3$ при $n = n^{***}$. В этом случае вид оптимальной стратегии зависит от соотношения между n^{**} и n^{***}. Если $n^{**} < n^{***}$, то расходы на потребление длятся от момента n^{**} до n^{***}; если $n^{**} \ge n^{***}$, потребление отсутствует до момента n^{**}, все средства в этот момент поступают в потребительский сектор, и производство прекращается.

5. СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1)–(3) ДЛЯ СТАБИЛЬНЫХ ПРОИЗВОДСТВ

Поскольку стабильные производства согласно данным определениям входят в класс депрессивных, то структура оптимальных стратегий для них вытекает из теоремы 2. Отметим, что случай 2 в этом случае невозможен, кроме того, в этом случае условие (5) имеет вид $f(t^*)/t^* > 1/q$, где t^* – положительный корень уравнения $f'(t) = 1/q$. Поскольку $f'(t) = 1/q$ при $t \in (0, t^*)$, условие (5) справедливо при существовании величины t^*. Отсюда справедлива теорема.

Теорема 3. *Для стабильных производств оптимальный вектор потребления имеет вид:*

1) *при* $f'(0) \le 1/q$ *– это* $(f(a_0), 0, 0, \ldots)$ (*фирма-однодневка*);

2) *при* $f'(0) > 1/q$ *– это* $(0, \ldots, 0, f_{(p)}(a_0) - t^*, f(t^*) - t^*, f(t^*) - t^*, \ldots)$, *где число нулей равно минимальному p, при котором* $f_{(p)}(a_0) > t^*$, $f_{(p)} = f \circ f \circ \ldots \circ f$ *(т.е. p раз).*

Этот результат аналогичен полученному в (Беленький, 2007, гл. 5), начальный отрезок без потребления там назван "периодом голодания". Стабилизация потребления с некоторого момента аналогична известному "золотому правилу инвестирования" (Интриллигатор, 2002, гл. 11; Беленький, 2007, гл. 5).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследовано оптимальное распределение средств на производство и потребление в случае депрессивного производства. Установлено, что в зависимости от исходных данных оптимальной является стратегия одного из следующих видов.

1. Прекращение деятельности через год с расходованием всех полученных средств на потребление (фирма-однодневка).

2. Деятельность в течение ряда лет без потребления (накопление средств – "период голодания") с последующим разовым направлением всех средств в потребительский сектор.

3. Деятельность в течение одного или нескольких лет без потребления при дальнейшем ежегодном расходовании средств на потребление в течение ряда лет с последующим прекращением производства.

4. То же самое, но на бесконечном временном промежутке.

Отметим тот факт, что в оптимальном случае потребление должно осуществляться без перерывов в течение ряда лет (бесконечно долго для стабильных производств) с возможным начальным "периодом голодания". Этот вывод представляется естественным: при депрессивном производстве нецелесообразно откладывать потребление в надежде на лучшее будущее.

Доказательства этих утверждений основываются на элементарных рассуждениях.

Вопрос об описании оптимальных стратегий для прогрессирующих производств остается открытым. Также интересен анализ и других случаев, например периодических во времени производственных функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Баркалов С.А., Бакунец О.Н., Гуреева И.В. и др. (2002): Оптимизационные модели распределения инвестиций на предприятии по видам деятельности. М.: ИПУ РАН.

Беленький В.З. (2007): Оптимизационные модели экономической динамики. М: Наука.

Бронштейн Е.М. (2005): Оптимизация временной структуры инвестиционного проекта // *Сибирский журнал индустриальной математики.* Т. 8. № 1.

Интриллигатор М. (2002): Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Айрис-Пресс.

Костромской М.В. (2010): Экономическая сущность инвестиций и сбережений и их значение в условиях глобализации экономики. [Электронный ресурс] Національна бібліотека України імені В.І. Вернадського, Київ. Режим доступа свободный: http://www.nbuv.gov.ua/portal/Soc_Gum/Vdnuet/econ/2010_4/Kostrom.pdf. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: февраль 2012 г.).

Лобанов С.Г. (1999): К теории оптимального экономического роста // *Экономический журнал ВШЭ.* № 1.

Наталуха И.Г. (2005): Оптимальные стратегии инвестирования и потребления в стохастической инвестиционной среде с учетом инфляционного риска // *Проблемы управления.* № 6.

Нурминский Е.А., Ащепков Л.Т., Трифонов Е.В. (2000): Математические основы теории финансовых рынков. Владивосток: Изд-во Дальневосточного ун-та.

Смоляк С.А. (2002): Об оптимальном выборе моментов начала и прекращения проекта // *Аудит и финансовый анализ.* № 1.

Cai D. (2006): A Two-Sector Economic Growth Model with Optimal Labor and Capital Allocation //*Applied Mathematics and Computation*. Vol. 183.

Kabanov Yu., Safarian M. (2010): Markets with Transaction Costs: Mathematical Theory. Heidelberg, Berlin: Springer.

Ramsey F.P. (1928): Mathematical Theory of Savings // *Econ. J.* Vol. 38. № 152.

Поступила в редакцию
05.08.2011 г.

On Optimal Resources Allocation of the Depressive Enterprises

E.M. Bronshtein

We consider the optimization problem of the economic dynamics of the funds distribution derived from production activities, to production and consumption sectors on an infinite time interval for the variable production function. For depressive (and stable) enterprises we set properties of the solution.

Keywords: production, consumption, optimization, production function.