
НАРОДНОХОЗЯЙСТВЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ

ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ*

© 2007 г. В. И. Данилов-Данильян, И. Л. Хранович

(Москва)

Предлагается подход к построению производственных функций для описания функционирования систем в условиях неопределенности. В основе подхода – понятийный аппарат и методы, разработанные в теории управления водными ресурсами. Вводимые производственные функции, наряду с переменными состояния, в качестве аргументов включают ориентиры для значений некоторых переменных. Ориентиры можно трактовать как показатели индикативного плана, прогноза, договорные параметры и т.п. Приводится оптимизационная математическая модель планирования с использованием введенных производственных функций. Показано, как они могут применяться для оценок надежности, риска и шансов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Неопределенность – одна из важнейших характеристик условий, в которых протекают экономические процессы. Откликом науки на этот несомненный факт являются теория принятия решений в условиях неопределенности и соответствующие разделы математической и экономической статистики. Во многих методах прогнозирования, планирования и анализа экономической деятельности факторы неопределенности учитываются неявно и в значительной мере по этой причине – менее полно и адекватно, чем представляется возможным и необходимым. В частности, широко используемый в экономической теории и при решении разнообразных прикладных экономических задач аппарат производственных функций не ориентирован на прямой учет неопределенности. Особенности управления водными ресурсами, где роль неопределенности весьма велика, еще в начале прошлого века стимулировали разработку специальных подходов, позволяющих более адекватно отражать влияние неопределенности на управляющие решения, чем удавалось в рамках традиционных методов. В настоящей статье предпринята попытка обобщить эти подходы на случай широкого класса экономических объектов, функционирующих в условиях неопределенности, путем построения производственных функций нового типа, пригодных для решения разнообразных задач управления, в том числе для использования в качестве элементов оптимизационных моделей планирования.

Производственные функции применяются для анализа систем всех уровней – от народного хозяйства в целом до производственных систем относительно скромного масштаба, например сельскохозяйственных ферм и отдельных технологических установок. Они выражают зависимости результатов хозяйственной деятельности от объемов ресурсов, привлекаемых для ее обеспечения. При этом рассматриваются либо реально затрачиваемые, либо имеющиеся в наличии (доступные) ресурсы, либо те и другие одновременно (“гибридный” вариант). На низшем (технологическом) уровне народнохозяйственной иерархии нередко вполне правомерным оказывается применение детерминистских производственных функций. В таких случаях их построение полностью сводится к описанию технологии в штатном режиме ее работы и не требует решения каких-либо экономических и статистических задач (по этой причине в экономических текстах детерминистские зависимости результатов от затрат обычно даже не подводятся под понятие производственной функции). На более высоких уровнях производственные функции строятся с помощью методов эконометрики путем статистической обработки информации о реальном функционировании системы; гораздо реже встречаются производственные функции, построенные с использованием не только отчетной, но и расчетной информации, полученной из нормативных моделей.

На деятельность экономических систем и ее результаты оказывают влияние, часто весьма существенное, многочисленные и разнообразные случайные факторы. Даже если, например,

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-06-80375).

технологическая установка при штатных условиях функционирования хорошо описана детерминистской производственной функцией, то нет гарантий, что аналогичные условия будут выполнены для каждого потребляемого ею ресурса (например, из-за сбоев в поставках перерабатываемого сырья; такие сбои могут быть не только непредсказуемыми для будущего, но подчас необъяснимыми и для прошлого). Казалось бы, производственная функция для того и существует, чтобы отвечать на вопрос, как изменится выпуск при уменьшении объема затраченного (или реально доступного) ресурса. Однако событие, означающее только уменьшение объема одного из ресурсов и, казалось бы, не препятствующее применению детерминистского подхода, на деле может повлиять на состояние других ресурсов, их производственный потенциал. Подобная ситуация возможна для тех ресурсов, объемы которых служат аргументами производственной функции, например трудовых, поскольку сбой в поставках сырья угрожает снижением дохода работников и может как стимулировать (повышение производительности труда), так и дестимулировать их (повышение текучести кадров и т.п.). Тем более она возможна для прочих ресурсов, например управленческих, так как ставит перед менеджментом задачи повышенной трудности, которые он решает с ошибками, притом непредсказуемыми. Для более адекватного описания работы технологической установки вместо детерминистской производственной функции придется строить эконометрическую, представляющую зависимость результатов производства от затрат ресурсов в реальных, а не идеальных условиях.

Инструмент эконометрии – производственные функции – строится не только для аналитических целей, но и для решения задач прогнозирования и планирования. Чтобы применение зависимостей, построенных на основе информации о прошлом, в таких задачах было вполне корректным, необходимо сохранение на соответствующий период будущего удовлетворительных характеристик их стохастической устойчивости, определяющих состоятельность эконометрических моделей изучаемых процессов. Однако это условие на практике выполняется редко – лишь для инерционных систем в периоды их стационарного развития, причем априори о его выполнении судить, как правило, не удастся. Факторы неопределенности нарушают плавное изменение переменных состояния системы, хотя обратное утверждение неверно: подобные изменения могут быть запланированными, например ввод в действие нового производственного объекта (но следует иметь в виду, что запланированная одним субъектом деятельность может стать источником неопределенности как для другого, так и для него самого). Каждый источник неопределенности воспринимается (или не воспринимается) как таковой в зависимости от масштаба системы и временного горизонта анализа. Так, техногенная авария – существенный фактор неопределенности для предприятия, но для отрасли с сотней, тем более – тысячей предприятий прогноз последствий совокупности таких событий может быть статистически надежным. Аналогичное “сглаживание” может проявляться при изменении не только пространственного, но временного масштаба.

Факторы неопределенности можно условно разделить на шесть классов: природные, конъюнктурно-экономические, социальные, политические, технологические и научно-технические. Первые особенно значимы для природно-экономических и природно-технических систем: количество ресурса, определяющее его качество, свойства, различные обстоятельства, обуславливающие величину отдельных статей затрат, необходимых для его использования, зависят от природных процессов. В той или иной мере, в различных проявлениях и сочетаниях эти феномены характерны для всех отраслей природопользования. Наиболее существенные проявления конъюнктурно-экономических факторов как причины неопределенности – скачки цен, резкие колебания спроса – часто являются следствиями социальных и политических процессов и событий. Например, массовая драка в связи с футбольным матчем – неопределенное событие для частной клиники, расположенной рядом со стадионом. Такая клиника может прогнозировать скачок спроса на свои услуги, хотя и не слишком надежно, анализируя расписание матчей и информацию о сопутствующих им драках. Но состоятельность прогноза величины скачка вряд ли достижима в силу разнообразных причин (например, из-за того, что драка может произойти в другом районе, далеко от стадиона и от клиники). Объявление эмбарго – политическое событие, как правило, ожидаемое, но с большой неопределенностью экономических последствий, поскольку заранее неясно, в какой момент оно состоится, как строго будет соблюдаться режим эмбарго, какие страны к нему примкнут, а какие – нет, и т.п. Типичные проявления технологических факторов неопределенности – техногенные аварии и катастрофы, не только прямо влияющие на экономические результаты, но, в случае значительных масштабов, через различные контуры опосредованных воздействий (социальные, политические, экономические). Научно-технические факторы как источник неопределенности (через появление принципиально новых продуктов и

технологий) сказываются, как правило, при достаточно больших масштабах систем и продолжительных периодах анализа.

Научно-технический прогресс в значительной мере направлен на уменьшение зависимости результатов хозяйственной деятельности от факторов неопределенности, эта цель достигается весьма разнообразными способами. Так, чем более тщательно проведена разведка месторождения и полнее горно-геологическая информация, тем меньше горно-геологических “неожиданностей” встретится при его эксплуатации; чем лучше селекционные сорта приспособлены к местным условиям, тем меньше отклонения урожая от среднего зависят от капризов погоды, вспышек размножения вредителей и иных подобных причин; на минимизацию потерь урожайности направлена не только селекция, но и агротехнические приемы, химические и биологические средства защиты растений и пр.; для стабилизации водоснабжения, необходимой из-за стохастичности как природных процессов воспроизводства водных ресурсов, так и спроса на воду, строятся водохранилища и т.д. Гидроаккумулирующие станции – типичный пример реакции на действие факторов неопределенности, порождаемых социально-экономическими (суточные колебания спроса и т.п.) и природными (прежде всего, похолодания) процессами и приводящих к резким колебаниям спроса на электроэнергию.

Если условия функционирования хозяйственной системы характеризуются неопределенностью и для ее снижения применяются специальные экономические, технические, организационные и прочие меры, то возникает вопрос о возможности и целесообразности их явного отражения в производственных функциях, используемых при моделировании такой системы. Собственно, уже сам прогноз состояния неопределенных условий на какой-либо момент (моменты) анализируемого периода следует рассматривать как меру такого рода, если прогнозные значения соответствующих внешних параметров принимаются в расчет при выработке решений по управлению системой, моделируемой с помощью производственных функций. Продуманные решения относительно функционирования и развития системы фактически всегда принимаются с ориентацией на прогнозы таких параметров, ожидаемых отклонений от их наиболее вероятных значений и т.п., хотя разница в инструментарии очень велика, – от фактического его отсутствия (когда ЛПР располагает только интуитивными неформализуемыми представлениями) до изощренных моделей принятия решений в условиях неопределенности, – теории статистических решений, имитационного моделирования и пр. Современные методы вычислительной математики и средства компьютерной техники позволяют проводить практические расчеты по весьма сложным экономико-математическим моделям, построенным по блочному принципу: все подсистемы (элементы) моделируемой системы представлены соответствующими субмоделями (блоками), в качестве которых часто используются производственные функции. Это – главная, хотя и не единственная причина искать возможности прямого учета неопределенности условий функционирования экономических объектов в представляющих их производственных функциях. Управление водными ресурсами и водным хозяйством оказалось наиболее продвинутой в этом направлении отраслью.

2. УЧЕТ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В УПРАВЛЕНИИ ВОДНЫМ ХОЗЯЙСТВОМ. АНАЛОГИ В ДРУГИХ ОТРАСЛЯХ

Водное хозяйство правомерно рассматривать как технико-экономический (а также организационный) комплекс, предназначенный для радикального снижения неопределенности в обеспечении самых разнообразных потребителей важнейшим ресурсом – пресной водой. Водно-ресурсные системы, объединяющие средства получения, перераспределения, очистки и доставки воды, призваны изменить режим природных вод в соответствии с потребностями народного хозяйства и населения, а также природоохранными требованиями. Водохозяйственная отрасль выступает в качестве посредника между природными водными объектами и хозяйственными системами – потребителями воды. Роль посредника, с одной стороны, сопряжена с ответственностью за выполнение требований к водоснабжению, т.е. за количество воды, подаваемой водопользователю, соблюдение графика водоснабжения и соблюдение нормативов качества воды. Однако выполнение этих требований в существенной степени зависит от внешних (природных) условий и далеко не всегда может быть действительно обеспечено. Процессы поступления и использования водных ресурсов имеют ярко выраженный стохастический характер, это приводит к риску принятия неоправданных решений о параметрах и режимах водно-ресурсных систем. С целью снижения такого риска в управлении водным хозяйством разработаны методы, ориентированные на его специфику, в частности, высокую степень неопределенности условий функционирования.

Для более строгой постановки целей и уточнения задач управления водно-ресурсными системами были предложены понятия *надежности* (обеспеченности) *располагаемых водных ресурсов* (Hazen, 1914), *гарантированного водопользования* (гарантированной отдачи) и его надежности (Крицкий, Менкель, 1932), а также *гарантированного качества* водных ресурсов и его надежности (Бончковский, Кузин, 1986).

За отчетный период водопользователь получает определенное количество водных ресурсов – это отчетные данные, фактическое значение одной из переменных состояния системы водопользования. При *гарантированном водопользовании* до начала периода устанавливается расчетное количество водных ресурсов, предоставляемое пользователю, оно выполняет функцию ориентировочного планового показателя; *надежность* гарантированного водопользования – вероятность того, что фактическое поступление водных ресурсов не меньше гарантированного. Аналогично определяются соответствующие понятия для качества водных ресурсов: *гарантированное качество* характеризуется совокупностью качественных характеристик воды, предоставляемой пользователю (эти характеристики разнообразны: концентрации растворенных веществ, органолептические характеристики, данные о микробиологическом загрязнении и т.п.). *Надежность* гарантированного качества определяется вероятностью того, что действительное качество водных ресурсов не хуже гарантированного (по всем регистрируемым характеристикам). Часто под гарантированным водопользованием понимают совместное удовлетворение соответствующих условий в обоих отмеченных аспектах – количественном и качественном.

Деятельность водопотребителя сопряжена с риском, обусловленным факторами стохастичности и неопределенности в водообеспечении. Понятия гарантированного водопользования и его надежности дают возможность оценивать такой риск потребителя ущербом – ухудшением экономических результатов его деятельности (например, снижением прибыли или валового дохода) вследствие отклонений реализованных режимов водопользования от гарантированных. Подчеркнем, что, вообще говоря, подобные отклонения неизбежны в условиях стохастичности и неопределенности. Конечно, различные водопотребители ранжированы по критичности обеспечения их потребностей, так что в России приоритетное питьевое водоснабжение в крайне редких случаях сталкивается с недоподачей воды относительно гарантированного уровня по количеству, однако его отклонения от гарантированного качества – вполне ординарное явление. Со всем другая ситуация характерна для сельского хозяйства в районах орошаемого земледелия: в засушливые годы, а они случаются не менее трех раз в десять лет, эта отрасль получает воду в количествах, заметно меньших гарантированного. По этой причине термин *гарантированное водопользование* представляется не вполне удачным: на самом деле в строгом юридическом понимании расчетное количество гарантированным не является. Невыполнение гарантии юридически допускается только при форс-мажоре, но таковым ни в коем случае не может быть признано событие, априорная вероятность наступления которого оценивалась величиной не менее 30%. В дальнейшем будем использовать этот термин только для водопользования – согласно традиции. Если же – для других отраслей и в общем случае – наряду с переменной состояния системы используется (при необходимости) соответствующая ей расчетная переменная другого типа (например, фактическому поступлению какого-либо ресурса – переменной состояния системы – соответствует расчетное количество этого ресурса), будем называть ее *ориентиром*, ее значения – ориентировочными по отношению к переменной состояния.

Понятия “гарантированное водопользование” и “гарантированное качество” водных ресурсов основываются на возможности, исходя из прошлых наблюдений, выявлять объективные вероятностные закономерности, характеризующие статистически устойчивые массовые явления, – речной сток и потребности в водных ресурсах некоторых пользователей. В общем случае, рассматриваемом в данной работе, непосредственного использования данных прошлых наблюдений недостаточно, чтобы выявлять закономерности поступления ресурсов. Информация о ситуациях в будущем является неопределенной: она либо не обладает стохастической устойчивостью, либо обладает ею, но ее характеристики неизвестны. Поэтому принят субъективно-вероятностный подход, основанный на экспертных оценках различных возможных условий хозяйственной деятельности. Такие оценки могут предлагаться экспертами как оценки вероятности наступления соответствующих условий, их значимости, желательности или нежелательности, опасности и т.п. в зависимости от поставленной перед ними задачи. Будучи нормированы, эти оценки обладают всеми свойствами вероятностей: они неотрицательны; их сумма равна единице; оценка совокупности различных условий равна сумме оценок условий, входящих в эту совокупность. Такой подход связан с риском отождествления мнений экспертов, отражающих современные пред-

ставления о возможности наступления будущих условий, с объективной реальностью. Однако другого подхода пока не существует.

Ниже в статье различия между субъективными и объективными вероятностями не проводятся, – и те и другие называются вероятностями. Заметим, что субъективно-вероятностный подход рассматривается как способ изучения неопределенности. И в этом смысле неопределенность становится частным случаем стохастичности, когда характеризующие ее вероятности получены из экспертных оценок, а не из данных наблюдений (хотя известна и противоположная позиция, с которой стохастичность рассматривается как неопределенность, о которой удалось получить данные наблюдений, достаточные для применения объективно-вероятностного подхода).

Подход, при котором возможные условия хозяйствования и их субъективные вероятности отражают накопленный опыт и знания экспертов, дает возможность перенести методологию гарантированного водопользования и его надежности на построение производственных функций, оценивающих результаты использования ресурсов в условиях неопределенности. Значения этих функций $f(X, x)$ зависят от двух групп переменных, соответствующих используемым в хозяйственной деятельности ресурсам x и их ориентирам X . Количество используемых ресурсов может принимать значения x^ω при различных реализациях ω стохастических условий функционирования системы из множества возможных условий Ω , $x = \{x^\omega | \omega \in \Omega\}$. С ориентировочными количествами основных ресурсов связано планирование необходимых подготовительных работ и других ресурсов, не учитываемых явно при оценке результатов производства. Величина X – одна и та же при всех $\omega \in \Omega$. Отклонение $\Delta x^\omega = x^\omega - X$ реализуемого количества ресурсов от ориентира приводит к необходимости корректировки принятых решений и потерям в результатах хозяйственной деятельности.

Подготовка полей к орошению включает гидротехнические меры в оросительной сети, технику, выбор структуры посевов и другие работы. Такая подготовка проводится до проявления конкретных реализаций стохастических условий и поступления водных ресурсов в расчете на их ориентировочные значения (ориентиры). Поступление водных ресурсов в объеме, меньше ориентировочного, означает недополив при орошении и, следовательно, снижение урожайности, а также делает лишней часть подготовительных работ. Потребление водных ресурсов сверх их ориентировочного значения не всегда возможно. Если оросительная сеть и состав сельскохозяйственных культур такую возможность допускают, то включение дополнительной техники, персонала и организация дополнительных работ осуществляются со значительно меньшей эффективностью, чем использование объема водных ресурсов, на который ориентируется оросительная сеть.

Перспективным направлением является создание рынка генерирующих мощностей электроэнергии. Каждая электростанция берет обязательство, что поставляемая ею мощность в течение расчетного периода будет не меньше определенной величины. Величина мощности, на которую ориентируется система, покупающая электроэнергию, оплачивается. При нарушении своего обязательства электростанция платит штраф, величина которого значительно превышает прибыль от продаваемой мощности. Финансовый результат работы электростанции зависит от двух переменных – продаваемой мощности и вырабатываемой электроэнергии. Электроэнергия (при проданной мощности) производится в условиях, когда неопределенными являются как спрос, зависящий от погоды, хозяйственной ситуации и других причин (вроде трансляции интересного футбольного матча), так и возможности поставки электроэнергии, связанные с готовностью агрегатов станции к работе, исправностью электросетей, наличием топлива на ТЭС и водных ресурсов у ГЭС и т.п.

Иногда аналогом (в рассматриваемом аспекте) ресурса выступает спрос на продукцию или услуги. Например, частная школа ориентируется на определенное число и основную специализацию учеников, оплачивающих обучение. Этому соответствуют площади арендуемых помещений, оборудование классов, преподавательский состав, закупаемые технические средства обеспечения учебного процесса и т.п. Затраты на организацию работы школы, заключение контрактов с педагогами и обслуживающим персоналом и т.п. производятся при заранее не известном конкретном числе учеников. Если реальное число учеников не достигает ориентировочного, прибыль школы снизится относительно той величины, которая соответствует случаю, когда ориентир был бы выбран меньшим и совпал со значением переменной состояния – реальным числом учеников. Это произойдет как из-за уменьшения валового дохода, так и вследствие дополнительных затрат (расторжение контрактов с оказавшимся лишним персоналом и т.п.). Если число учеников больше ориентировочного, то дополнительные издержки, связанные с необходимостью оперативно скорректировать материально-техническое обеспечение и организацию

учебного процесса, нанять дополнительный персонал и т.п., будут превосходить прирост затрат, который соответствует увеличению ориентира на то же количество учеников.

Примеры хозяйственных систем, результаты работы которых зависят от двух групп переменных: ориентировочных объемов ресурсов (или спроса) и их реализуемых значений, можно продолжить. Труднее оказалось найти противоположные примеры. Нам не удалось обнаружить хозяйственные системы, при оценке результатов деятельности которых не было бы необходимости, наряду с величинами используемых ресурсов, учитывать их ориентировочные значения. По-видимому, таковых нет.

3. ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ И ИХ ОРИЕНТИРОВ

Функцию $f(X, x)$, оценивающую результат использования ресурсов¹, без нарушения общности можно представить в виде суммы функций

$$f(X, x) = f^1(X) + f^2(X, x). \quad (1)$$

Функция $f^1(X)$ характеризует результат использования ресурсов в объеме, равном ориентиру. Зависимость $f^2(X, x)$, обычно называемая функцией ущерба, описывает потери результата, обусловленные отклонениями объемов потребляемых ресурсов от его ориентировочного значения. Для определенности под функцией $f^2(X, x)$ будем понимать математическое ожидание ущерба, обусловленного функционированием потребителей ресурсов в различных стохастических условиях:

$$f^2(X, x) = M_{\omega} f^{\omega}(X, x^{\omega}) = \sum_{\omega \in \Omega} p^{\omega} f^{\omega}(X, x^{\omega}), \quad (2)$$

где p^{ω} – вероятность исхода стохастических условий ω . Множество стохастических условий Ω полагаем конечным. Из соотношений (1) и (2) следует, что функция $f(X, x)$ представляет собой математическое ожидание производственных функций, оценивающих результат деятельности системы в различных стохастических условиях:

$$f(X, x) = \sum_{\omega \in \Omega} p^{\omega} f^{\omega}(X, x^{\omega}) = \sum_{\omega \in \Omega} p^{\omega} [f^1(X) + f^{\omega}(X, x^{\omega})]. \quad (3)$$

При потреблении ориентировочного объема ресурсов, когда $x^{\omega} = X$, нет необходимости проводить коррекцию запланированного решения, поэтому $f^{\omega}(X, X) = 0$. Утилизация избыточных ресурсов (т.е. случай $\Delta x^{\omega} = x^{\omega} - X \geq 0$) возможна только при наличии потребности в них и условий ее удовлетворения (например, речной транспорт может использовать избыточные глубины только при наличии судов с большой осадкой и дополнительных грузов, которые необходимо перевезти). Неравенство $\Delta x^{\omega} \geq 0$ означает, что все координаты вектора Δx^{ω} неотрицательны и хотя бы одна – больше нуля, т.е. $\forall n \in N : \Delta x_n^{\omega} = x_n^{\omega} - X_n \geq 0$ и $\exists n^* : \Delta x_{n^*}^{\omega} > 0$, где N – множество видов ресурсов, потребление которых оценивается функцией $f(X, x)$.

Потребление избыточных ресурсов осуществляется со значительно меньшей эффективностью, чем предполагаемых (т.е. ориентира), поэтому при $\Delta x^{\omega} > 0$ составляющая $f^{\omega}(X, x^{\omega})$ функции $f^{\omega}(X, x^{\omega})$ неотрицательна и ее значения возрастают незначительно. Использование ресурсов при их дефиците, т.е. в случае $\Delta x^{\omega} < 0$, характеризуется увеличением стоимости вырабатываемой продукции, а при превышении некоторого предела $|\Delta x^{\omega}|$ – невозможностью ее производить. Дополнительные затраты на поддержание данного уровня производства (в первом случае) и компенсации потерь от недодачи продукции (во втором) значительно превосходят эффект от потребления предполагаемых объемов ресурсов. Это означает, что в диапазоне значений $\Delta x^{\omega} < 0$ функция $f^{\omega}(X, x^{\omega})$ отрицательна и ее значения резко убывают с ростом $|\Delta x^{\omega}|$. В терминах производственных функций это означает, что при одном и том же значении модуля приращения аргу-

¹ В дальнейшем для простоты будем говорить только об использовании ресурсов, хотя все построения в равной мере относятся и к случаю неопределенного спроса (его можно рассматривать как своего рода ресурс).

мента $|\Delta x^\omega| = |x^\omega - X|$ значения приращения функции $f^\omega(X, x^\omega)$ связаны неравенствами:

$$\begin{aligned} [f^\omega(X, x^\omega) - f^\omega(X, x)]_{\Delta x^\omega \geq 0} &= f^{2\omega}(X, x^\omega)|_{\Delta x^\omega \geq 0} \leq [f^\omega(x^\omega, x^\omega) - f^\omega(X, X)]_{\Delta x^\omega \geq 0} \leq \\ &\leq -f^{2\omega}(X, x^\omega)|_{\Delta x^\omega \leq 0} = -[f^\omega(X, x^\omega) - f^\omega(X, X)]_{\Delta x^\omega \leq 0}. \end{aligned} \quad (4)$$

Как правило, для $|\Delta x^\omega| > 0$ хотя бы одно из неравенств (4) усиливается и заменяется на строгое.

Неравенства (4) являются основными соотношениями, показывающими целесообразность включения ориентировочных величин ресурсов в оценку результатов функционирования производства. Первое неравенство в (4) указывает, что результат потребления дополнительных ресурсов не превосходит результата использования того же ориентировочного количества. Последнее неравенство в (4) означает, что снижение результата производства при непредусмотренном дефиците ресурсов не меньше, чем то, которое является следствием уменьшения ориентировочной величины ресурса. Вся цепочка неравенств (4) демонстрирует, что результат утилизации ресурсов в ориентировочных объемах (это – “идеальные” условия) выше результата использования ресурсов в тех объемах, которые получаются в реальных стохастических условиях, когда поставляемые объемы отклоняются от ориентиров.

Функции $f^\omega(X, x^\omega)$ вогнуты по каждой из переменных X_n и x_n^ω в силу закона об убывающей эффективности (Самуэльсон, 1964), в соответствии с которым с увеличением количества ресурса падает эффективность вовлечения дополнительной единицы его объема. Однако это не гарантирует вогнутость $f^\omega(X, x^\omega)$ по их совокупности. Этим же свойством обладают функции $f(X, x)$, сформированные по правилу (3).

Пример функции $f(X, x^\omega) = f^1(X) + f^2(X, x^\omega)$, оценивающей использование одного ресурса в стохастических условиях, иллюстрирует рис. 1. В этом частном случае функция ущерба $f^2(X, x^\omega)$ – одна и та же для всех $\omega \in \Omega$. При рассмотрении этой же функции двух переменных X и x^ω как семейства функций одной переменной x^ω , зависящей от параметра X , составляющая $f^1(X)$ функции $f(X, x^\omega)$ является верхней огибающей этого семейства. Указанная особенность следует из неравенств (4) и свойства функций ущерба $f^2(X, X) = 0$. Все функции указанного семейства и его огибающая, как отмечено выше, вогнутые. Такую трактовку функции $f(X, x^\omega)$ иллюстрирует рис. 2, на котором прослеживается вся цепочка неравенств (4). В частности, сравнение графиков 1 и 4 на рис. 2 показывает, что при ориентировочном объеме водных ресурсов $X = 360$ млн. м³

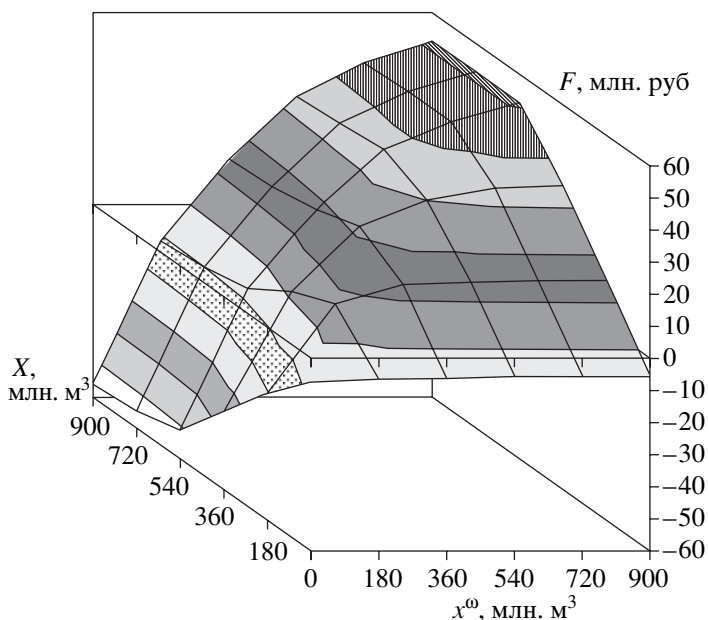


Рис. 1. Производственная функция Терско-Кумской оросительной системы.

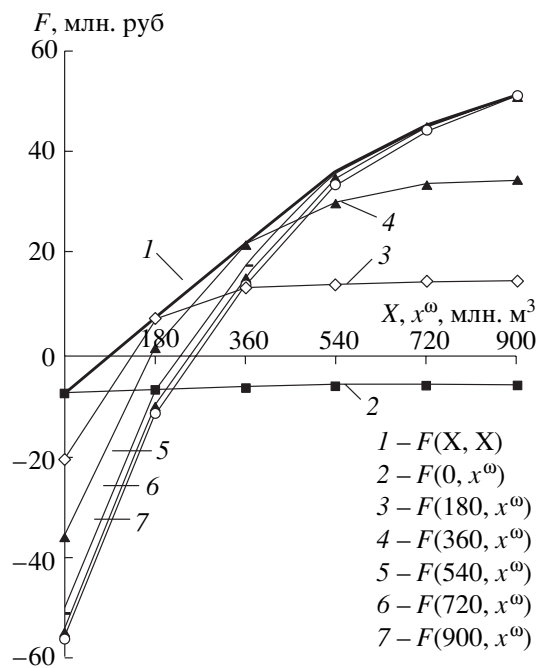


Рис. 2. Параметрическое представление производственной функции Терско-Кумской оросительной системы.

прибыль, получаемая с орошаемых полей при использовании реализуемого объема водных ресурсов $x^0 = 720$ млн. м³, на 10 млн. руб. меньше, чем от использования того же реализуемого объема при условии, что в качестве ориентировочного был бы взят $X = 720$ лн. м³. Неподача воды в оросительную сеть ($x^0 = 0$) при ориентировочном объеме $X = 360$ м лн. м³ приводит к большему снижению прибыли (на 28 млн. руб.), чем переход к ориентировочному объему $X = 0$.

4. ОЦЕНКА РИСКА, ШАНСА И НАДЕЖНОСТИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕСУРСОВ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Различия между результатами использования ресурсов в различных стохастических условиях порождают риск снижения результата деятельности вследствие неполного (в сравнении с ориентиром) обеспечения ресурсами $R(X, x)$ и шанс повышения результата $D(X, x)$, обусловленный получением дополнительного (относительно ориентира) количества ресурсов.

В данной работе под риском понимается математическое ожидание ущерба (потери результата) из-за получения ресурсов в количестве, меньшем ориентировочного. В соответствии с этим риск определяется через введенную производственную функцию в виде

$$R(X, x) = \sum_{\omega \in \Omega} p^{\omega} [f^{\omega}(X, X) - f^{\omega}(X, x^{\omega})]^{+} = \sum_{\omega \in \Omega} p^{\omega} [-f^{2\omega}(X, x^{\omega})]^{+} = \sum_{\omega \in \Omega} p^{\omega} r^{\omega}(X, x^{\omega}), \quad (5)$$

где $r^{\omega}(X, x^{\omega})$ – ущерб от недополучения ресурсов при исходе ω стохастических условий, функция $[u]^{+} = \max\{u, 0\}$.

Шанс $D(X, x)$ представляет собой математическое ожидание увеличения результата деятельности вследствие использования дополнительного количества ресурсов и также выражается через введенную производственную функцию:

$$D(X, x) = \sum_{\omega \in \Omega} p^{\omega} [f^{\omega}(X, x^{\omega}) - f^{\omega}(X, X)]^{+} = \sum_{\omega \in \Omega} p^{\omega} [f^{2\omega}(X, x^{\omega})]^{+} = \sum_{\omega \in \Omega} p^{\omega} d^{\omega}(X, x^{\omega}), \quad (6)$$

где $d^{\omega}(X, x^{\omega})$ – значение прироста результата при исходе ω стохастических условий.

Риск уменьшения результата вследствие недополучения водных ресурсов и шанс его увеличить благодаря использованию дополнительных ресурсов в оросительной системе, производственная функция которой представлена на рис. 1 и 2, при ориентировочном объеме $X = 360$ млн. м³ и равновероятных объемах используемых ресурсов $x^0 = 0, 180, 360, 540, 720$ и 900 млн. м³ равны $R(360, x) = 12$ млн. руб. и $D(360, x) = 5$ млн. руб. Шанс значительно меньше риска, несмотря на то, что дополнительное количество водных ресурсов больше их недостачи. Такое соотношение между $R(X, x)$ и $D(X, x)$ является типичным.

Описанные производственные функции могут быть применены также для оценки надежности ориентировочного количества ресурсов. Надежность определяется как вероятность того, что объем предоставляемых ресурсов будет не меньше их ориентировочной величины

$$P(X, x) = \sum_{\omega \in \Omega^{+}} p^{\omega}, \quad \Omega^{+} = \{\omega | x^{\omega} \geq X\}. \quad (7)$$

В частности, надежность гарантируемого объема водных ресурсов $X = 360$ млн. м³ оросительной системы, производственная функция которой представлена на рис. 1 и 2, при равновероятных реализуемых объемах $x^0 = 0, 180, 360, 540, 720$ и 900 млн. м³ составляет $P(360, x) = 2/3$.

5. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЕСУРСОВ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В математических моделях, описывающих рациональное использование ресурсов, функции цели формируются из производственных функций элементов моделируемых систем. Рассматриваемые производственные функции предполагают включение в эти модели в качестве переменных величин, наряду с используемыми ресурсами, их ориентировочных значений. Особенностью ориентиров как переменных модели является их разделение в допустимых множествах и взаимосвязь только через функции цели. Поэтому при переходе от производственных функций без ориентировочных значений объемов используемых ресурсов к моделям с производственными функциями, где ориентиры учитываются, структура моделей не меняется. Ниже приводится одна из

таких моделей, с помощью которой описывается обоснование режимов транспортных, энергетических, водохозяйственных, информационных, технологических и других потоковых систем, функционирующих в стохастических условиях.

Модель описывается задачей **В** определения оптимальных потоков на сети $\Gamma(I, S)$ с множеством вершин I и дуг S , геометрическое начертание которой соответствует схематическому изображению моделируемой системы. Вектор потоков X^0, x^0 , составляющие которого $X^0 = \{X_s^0 \mid s \in S\}$ и $x^0 = \{x_s^0 \mid s \in S, \omega \in \Omega\}$, моделирует оптимальные объемы используемых ресурсов x^0 и их ориентировочные величины X^0 . Вектор X^0, x^0 максимизирует функцию цели моделируемой системы, складывающуюся из производственных функций ее элементов в предположении, что эффекты от использования ресурсов различными элементами сопоставимы в одних и тех же единицах (для определенности в рублях):

$$F(X, x) = \sum_{s \in S} f_s(X_s, x_s) = \sum_{s \in S} \sum_{\omega \in \Omega} p^\omega f_s^\omega(X_s, x_s^\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p^\omega \sum_{s \in S} f_s^\omega(X_s, x_s^\omega). \quad (8)$$

Вектор X^0, x^0 принадлежит допустимому множеству G_B , выделяемому уравнениями неразрывности потоков:

$$\sum_{s \in S_i^+} k_s^\omega x_s^\omega - \sum_{s \in S_i^-} x_s + b_i^\omega = 0, \quad i \in I, \quad \omega \in \Omega, \quad (9)$$

ограничениями сверху и снизу на величины потоков, которые при различных исходах стохастических условий могут принимать различные значения:

$$x_s^\omega \leq x_s \leq \bar{x}_s^\omega, \quad s \in S, \quad \omega \in \Omega, \quad (10)$$

и их ориентиров, принимающих одни и те же значения при всех исходах стохастических условий:

$$\underline{X}_s \leq X_s \leq \bar{X}_s, \quad s \in S, \quad (11)$$

где $b_i^\omega \geq 0$ – мощность источника ресурса; $b_i^\omega \leq 0$ – фиксированное количество ресурса, изымаемого из вершины с номером i ; k_s^ω – неотрицательный коэффициент усиления дуги s (как правило, $k_s^\omega \leq 1$), отражающий потери ресурса; S_i^+ – множество дуг, заходящих в вершину i ; S_i^- – исходящих из нее.

Заметим, что в отличие от реальных потоков x_s^ω , которые связаны системой уравнений неразрывности потоков в вершинах сети $\Gamma(I, S)$, потоки X_s , выражающие ориентировочные значения ресурсов, принадлежат только своим дугам. Присутствие потоков X_s в сетевой распределительной задаче **В**, на которые не распространяются условия непрерывности, не нарушает наглядность потокового представления функционирования систем использования ресурсов.

В решении задачи **В**, наряду с оптимальными величинами используемых ресурсов x^0 и их ориентирами X^0 , неявно содержатся значения оптимальной надежности $P_s(X_s^0, x_s^0)$ ориентировочного количества ресурсов, используемых элементами системы. Она получается при подстановке решения X^0, x^0 задачи **В** в (7) как побочный результат решения задачи, подобно тому как при решении задач оптимального использования ресурсов в качестве побочного результата получают оптимальные (“объективно обусловленные” по Л.В. Канторовичу) оценки ресурсов. Задание надежностей P_s , отличных от оптимальных, приводит к снижению результата деятельности. При $P_s < P_s(X_s^0, x_s^0)$ результат уменьшается из-за необходимости чаще, чем при $P_s(X_s^0, x_s^0)$, проводить дорогостоящие корректирующие мероприятия, обусловленные отклонением количества используемых ресурсов от ориентиров. При $P_s > P_s(X_s^0, x_s^0)$ результат снижается из-за неполного учета возможностей производства (“перестраховки”). Также неявно в задаче **В** содержатся оптимальные значения рисков $R_s(X_s^0, x_s^0)$ и шансов $D_s(X_s^0, x_s^0)$ использования ресурсов. Для этого достаточно значение оптимального вектора задачи **В** подставить в формулы (5) и (6).

Задача **В** – двухэтапная задача стохастического программирования. Стратегическими переменными (первого этапа), выбираемыми при неизвестной конкретной реализации стохастиче-

ских условий, выступают потоки в дугах X_s , моделирующие ориентировочные значения объемов используемых ресурсов. В качестве тактических переменных (второго этапа), соответствующих известным реализациям стохастических условий, выступают потоки x_s , соответствующие реально используемым ресурсам (переменные состояния системы). Аналогичную роль играют переменные, соответствующие реализуемым и ориентировочным объемам ресурсов, в математических моделях, в которых структуризация систем отличается от потоковой.

Нельзя гарантировать вогнутость производственных функций $f_s^\omega(X_s, x_s^\omega)$ элементов моделируемой системы и, следовательно, целевой функции всей задачи **В**. Поэтому задача **В** рассматривается как многоэкстремальная. Общих методов решения многоэкстремальных задач нет. Однако особенность задачи **В**, состоящей в максимизации невогнутой бисепарабельной функции (8), представленной в виде суммы функций, каждая из которых зависит от двух переменных, на выпуклом множестве G_B , выделяемом линейными ограничениями (9)–(11), позволяет построить метод ее решения.

Процедура решения задачи **В** представляет собой детализацию схемы ветвей и границ, предложенной для задач дискретного программирования и перенесенной на многоэкстремальные задачи (Лазебник и др., 1981). Решение исходной задачи **В** с погрешностью, не превосходящей заданную, сводится к решению конечной последовательности оценочных сетевых распределительных задач выпуклого программирования. Допустимые множества оценочных задач имеют потоковую структуру множества G_B , они задаются ограничениями вида (9)–(11) на сети, совпадающей с исходной сетью $\Gamma(I, S)$. Целевые функции оценочных задач формируются как вогнутые оболочки целевой функции задачи **В** на параллелепипедах, образуемых ограничениями вида (10)–(11). Построение таких вогнутых оболочек в силу бисепарабельности функции $F(X, x)$ сводится к тому, чтобы определить конечное число вогнутых оболочек функций двух переменных $f_s^\omega(X_s, x_s^\omega)$ на прямоугольниках вида $H_s^\omega = \{X_s, x_s^\omega \mid \underline{X}_s \leq X_s \leq \bar{X}_s, \underline{x}_s^\omega \leq x_s^\omega \leq \bar{x}_s^\omega\}$. В решении выпуклых оценочных задач используется потоковая структура их допустимых множеств и бисепарабельность целевых функций. Оно осуществляется естественным для таких задач методом групповой координатной оптимизации (D'Esopo, 1959; Райков, 1966), в котором последовательно уточняются переменные – стратегические X_s и тактические x_s^ω .

Включение в производственные функции не только величин используемых ресурсов, но и их ориентиров дает возможность вырабатывать решения, предусматривающие коррекции стратегии управления при всех возможных реализациях неопределенных условий. При этом получают оценки рисков, шансов и их надежностей. Математические модели, позволяющие строить такие стратегии, адаптированные к возможным изменениям условий функционирования производства, получаются более сложными, чем без учета ориентиров, но не настолько, чтобы по ним нельзя было проводить расчеты на современных компьютерах (в том числе персональных). Такой подход к описанию результатов использования ресурсов в экономико-математических моделях представляется перспективным. Он вполне оправдал себя при решении прикладных задач управления водным хозяйством (Богачева и др., 2000).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Богачева Н.Ю., Хранович И.Л., Чэнь Ц.** (2000): Обоснование стратегий рационального использования водных ресурсов в условиях риска // *Инженерная экология*. № 6.
- Бончковский Н.Ф., Кузин А.К.** (1986): К вопросу совершенствования Правил охраны поверхностных вод от загрязнения сточными водами // *Водные ресурсы*. № 3.
- Крицкий С.Н., Менкель М.Ф.** (1932): Расчет многолетнего регулирования речного стока на основе теории вероятностей // *Труды ВИСУ. Гидротехнический сборник*. № 4.
- Лазебник А.И., Хранович И.Л., Цаллагова О.Н.** (1981): Обобщенные сепарабельные задачи и их приложения // *Автоматика и телемеханика*. № 8.
- Райков Л.Д.** (1966): Вопросы построения и применения ЭВМ для решения многовариантных задач. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. М.: МИЭМ.
- Самуэльсон П.** (1964): Экономика. М.: Прогресс.
- D'Esopo D.I.** (1959): A Convex Programming Procedure // *Naval Res. Logistics Quart.* Vol. 6. № 4.
- Hazen A.** (1914): The Storage to Be Provided in Impounding Reservoirs for Municipal Water Supply // *Trans. ASCE*. Vol. 77.

Поступила в редакцию
21.02.2006 г.

Production Functions in Uncertainty**V. I. Danilov-Danilijan, I. L. Khranovich**

An approach to the construction of production functions for describing the system's functioning in uncertainty has been suggested. This approach is based on the conceptions and methods of water resources management. The proposed production functions include as arguments not only variables of state but the marks to values of some variables. These marks can be interpreted as indices of indicative plan, prognosis, contract's parameters, etc. The production functions are used for constructing the optimization planning model. The use of such models for estimating of reliability, risks, and chances has been shown.