ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2007, том 43, № 1, с. 52–67

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

ТЕОРИЯ КЛЮВОВ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

© 2007 г. Э. Б. Ершов

(Москва)

В конечномерном вещественном пространстве рассматриваются множества, имеющие точку с одновременно минимальными или максимальными на таком множестве координатами, называемую соответственно его мини- или макси-клювом. Формулируются и доказываются условия, достаточные для существования у множеств клювов. В системах неравенств, задающих такие множества, используются функции, невозрастающие или неубывающие по всем аргументам кроме, может быть, одного. Оптимизация неубывающих и невозрастающих критериев на имеющем соответствующий клюв множестве приводит к задаче его нахождения как характерного оптимального решения.

Вводится понятие обобщенного клюва множества, использующее задаваемую структуру квазипорядка, рассматривается достаточное условие его существования. Анализируется зависимость координат клювов от параметров, задающих семейства множеств, и связь клювов с решениями систем уравнений. Предложена общая схема конструирования множеств, замкнутых относительно введенных бинарных операций покоординатной минимизации и максимизации и используемых для задания множеств, имеющих клювы.

ВВЕДЕНИЕ

Экономическая модель, для которой множество допустимых решений имеет клюв, насколько нам известно, впервые была в явном виде рассмотрена в (Ершов, 1962). Но для частной оптимизационной межотраслевой модели, называемой моделью Самуэльсона, раньше было обнаружено ее основное свойство, формулируемое как “теорема о замещении” (Arrow, 1951; Georgescu-Roegan, 1951; Koopmans, 1951; Samuelson, 1951). Оно следует из существования макси-клюва у задачи линейного программирования, двойственной к исходной модели.

В (Ершов, 1963) теоремы о клювах были сформулированы в наиболее простом виде, базирующемся на свойствах межотраслевых моделей. Детально и в общем виде эти теоремы предполагалось изложить в главе коллективной монографии “Методы планирования межотраслевых пропорций” (1965). По решению руководителей авторского коллектива этот материал не был включен, поскольку был оценен ими как математизированный и сложный. Однако упоминание о соответствующих свойствах межотраслевых моделей в тексте третьей главы этой монографии сохранилось. В (Ершов, 1967) теоремы о клювах доказаны и использовались в вариантах, приспособленных к потребностям межотраслевого моделирования.

Поиск более общих достаточных условий существования клювов позволил определить класс имеющих клювы моделей, допустимые множества решений которых не только не должны быть выпуклыми, но и допускают рассмотрение альтернативных вариантов развития и функционирования подсистем, образующих моделируемую систему. Такие модели задаются с использованием операций объединения и пересечения отдельно описываемых множеств из предложенного класса. Есть основания предполагать, что возможности применения таких моделей шире, чем сфера межотраслевого моделирования. Межотраслевые модели, имеющие клювы, будут рассмотрены в отдельной работе.

Эта статья представляет собой сокращенную и переработанную версию разделов 1 и 2 препринта (Ершов, 2002).

1. КЛЮВЫ МНОЖЕСТВ КАК ИХ ХАРАКТЕРНЫЕ ТОЧКИ И ПОДМНОЖЕСТВА

Будем рассматривать множества в конечномерном вещественном пространстве, предполагая, что они задаются с помощью систем неравенств, систем уравнений или множеств специального вида, не являющихся областями.

1.1. Основные определения. Пусть Ω – множество в R_n; $X = (x_i)$ – точка из R_n с координатами x_i, $i = 1, \ldots, n$. Воспользуемся тем, что в R_n определено естественное отношение порядка. Будем предполагать, что Ω ограничено снизу (или сверху), т.е. существует точка $\underline{A} \equiv (\underline{a}_i) \in R_n$ (или $\overline{A} \equiv (\bar{a}_i)$), такая, что для любой $X \in \Omega$ выполняется неравенство $\underline{A} \le X$ (или $X \le \overline{A}$), т.е. $-\infty < \underline{a}_i \le x_i$ (или $x_i \le \bar{a}_i < +\infty$), $i = 1, \ldots, n$ (далее условие $i = 1, \ldots, n$, если оно очевидно, будем опускать).

Множество точек A таких, что для всех $X \in \Omega$ выполняется $A \le X$, назовем минорантным множеством $\underline{M}\Omega$ для Ω. Мажорантным множеством $\overline{M}\Omega$ для Ω назовем множество точек A, удовлетворяющих неравенству $X \le A$ при всех $X \in \Omega$. В теории частично упорядоченных множеств (ч.у.м.) объекты $\underline{M}\Omega$ и $\overline{M}\Omega$ называют нижним (Ω^∇) и верхним (Ω^Δ) конусом для Ω (Математическая энциклопедия, 1984, с. 833–836).

Если $\Omega \cap \underline{M} \ne \varnothing$, то существует точка $\check{X} \equiv (\check{x}_i) \equiv (\Omega \cap \underline{M}\Omega) \in \Omega$ такая, что $\check{x}_i = \min\limits_{x \in \Omega} x_i$, называемая *мини-клювом множества* Ω, наименьшей точкой $\inf(\Omega)$ или нулем Ω как ч.у.м. Будем ее обозначать $\check{X}(\Omega)$. Аналогично, если $\Omega \cap \overline{M}\Omega \ne \varnothing$, то $\Omega \cap \overline{M}\Omega \equiv \hat{X}(\Omega)$ – точка, называемая *макси-клювом*, наибольшей точкой $\sup(\Omega)$ или единицей для Ω как ч.у.м., такая, что $\hat{X}(\Omega) \equiv (\hat{x}_i) \in \Omega$ и $\hat{x}_i = \max\limits_{x \in \Omega} x_i$.

Термин “клюв” объединяет понятия наименьшей и наибольшей точек для ч.у.м., в частности, для решеток и полурешеток в ч.у.м. и в векторных пространствах, порядок в которых вводится не только с помощью положительного конуса, но и посредством положительного клина (Математическая энциклопедия, 1979, с. 880). Клюв предлагается определять не только как точку, но и как подмножество $B(\Omega) \subset \Omega$. Такое обобщение предлагается в п. 1.3.

Пусть на Ω рассматриваются оптимизационные задачи $\min\limits_{x \in \Omega} f(X)$ или $\max\limits_{x \in \Omega} f(X)$, имеющие, по предположению, непустые множества решений:

$$\operatorname*{Argmin}_{x \in \Omega} f(X) \equiv \underline{K} f(X) = \underline{K}_\Omega f(X) \quad \text{или} \quad \operatorname*{Argmax}_{x \in \Omega} f(X) \equiv \overline{K} f(X) \equiv \overline{K}_\Omega f(X).$$

Если Ω имеет мини-клюв $\check{X}(\Omega)$ или макси-клюв $\hat{X}(\Omega)$, то эти задачи обладают полезными свойствами:

$$\check{X}(\Omega) \in \underline{K} f(X), \quad \check{X}(\Omega) \in \overline{K} g(X); \quad \hat{X}(\Omega) \in \underline{K} g(X), \quad \hat{X}(\Omega) \in \overline{K} f(X)$$

для всех неубывающих на Ω функций $f(X)$ и всех невозрастающих на Ω функций $g(X)$.

Нет смысла искать необходимые и достаточные условия того, что Ω имеет клюв, поскольку добавление к ограниченному, но не имеющему клюва множеству Ω одной точки из $\underline{M}\Omega$ или из $\overline{M}\Omega$, превращает его в множество, имеющее клюв. Поэтому целесообразность введения понятия “клюв” может быть подтверждена тем, что существуют проверяемые и в то же время относительно общие и реалистичные в контексте экономико-математического моделирования достаточные условия существования клювов у множеств.

1.2. Простые достаточные условия существования клювов. Развиваемую теорию связывает с теорией решеток и полурешеток следующее утверждение.

Теорема 1 о клювах. *Множество* $\Omega \subset R_n$ *имеет мини-клюв* (*макси-клюв*), *если оно*:

I.1) *непусто* (*условие неослабляемо*);

I.2) *ограничено снизу* (*сверху*) (*условие неослабляемо и вместе с условием* I.1 *дает необходимое условие существования клюва*);

I.3) *замкнуто*, *т.е. содержит предельные точки последовательностей* $\{X^k\}$, $X^k \in \Omega$, $k = 1, \ldots, \infty$ (*условие ослабляемо*, *так как достаточно потребовать*, *чтобы* Ω *содержало предельные точки невозрастающих* (*неубывающих*) *последовательностей*);

I.4) *замкнуто относительно бинарной операции покоординатной минимизации* (*максимизации*), *определенной для пары точек* X^{I}, X^{II} *следующим образом*:

$$X^{\mathrm{I,\,II}} \equiv \min(X^{\mathrm{I}};\, X^{\mathrm{II}}) \equiv (x_i^{\mathrm{I,\,II}}) = (\min(x_i^{\mathrm{I}};\, x_i^{\mathrm{II}})) \tag{1}$$

(*или* $X^{\mathrm{I,\,II}} \equiv \max(X^{\mathrm{I}}; X^{\mathrm{II}}) \equiv (x_i^{\mathrm{I,\,II}}) = (\max(x_i^{\mathrm{I}};\ x_i^{\mathrm{II}}))$, *где* $X^{\mathrm{I}} \equiv (x_i^{\mathrm{I}})$, $X^{\mathrm{II}} \equiv (x_i^{\mathrm{II}})$. *Таким образом, требуется, чтобы для любых* $X^{\mathrm{I}} \in \Omega$, $X^{\mathrm{II}} \in \Omega$ *результат операции* (1) $X^{\mathrm{I,\,II}}$ *принадлежал* Ω, *если точки* X^{I} *и* X^{II} *принадлежат этому множеству*.

Условия I.1–I.3 можно заменить условием:

$$\text{I.3')}\ \underline{K}_{\Omega} x_i \neq \varnothing\ (\text{или } \overline{K}_{\Omega}\, x_i \neq \varnothing), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Условие I.4 можно задать в ослабленном виде:

I.4) существует непустое, замкнутое относительно рассматриваемой операции (1) множество $\omega \subset \Omega$, такое, что $\omega \cap \underline{K}_{\Omega} x_i \neq \Omega$ (или $\omega \cap \overline{K}_{\Omega}\, x_i \neq \Omega$), $i = 1, \ldots, n$.

Для $m(m \geq 2)$ точек $X^k \equiv (x_i^k) \in R^n$, $k = 1, \ldots, m$, определим операции:

$$\min(X^1; \ldots; X^m) \equiv (x_i^{1,\ldots,m}) = \min(x_i^1; \ldots; x_i^m),\ \ \max(X^1; \ldots; X^m) \equiv (x_i^{1,\ldots,m}) = (\max(x_i^1; \ldots; x_i^m)). \tag{3}$$

Условие I.4 эквивалентно замкнутости Ω относительно одной из операций (3) при любых $(m \geq 2)$. ■

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий I.1–I.3 с ледует выполнение условия I.3'.

Пусть $X^i \in \underline{K}_{\Omega} x_i$ (или $X^i \in \overline{K}_{\Omega}\, x_i$). Применяя операции (3), получаем $\min(X^1; \ldots; X^n) \equiv \check{X}(\Omega)$ (или $\max(X^1; \ldots; X^n) \equiv \hat{X}(\Omega)$). ■

Удовлетворяющее условиям теоремы 1 множество Ω является частным случаем нижних (верхних) полурешеток, т.е. частично упорядоченных множеств, для любых двух элементов которых существует нижняя (верхняя) грань и существует наименьший (наибольший) элемент.

Введение условия I.4 оправдано тем, что еще в (Ершов, 1963) было найдено следующее достаточное условие его выполнения.

Теорема 2 о клювах (о классе односторонних решеток). *Непустое множество* $\Omega \subset R^n$ *замкнуто относительно операции покоординатной минимизации* $\min(X^{\mathrm{I}}; X^{\mathrm{II}})$ (*или покоординатной максимизации* $\max(X^{\mathrm{I}}; X^{\mathrm{II}})$), *т.е. является нижней* (*верхней*) *полурешеткой, если оно может быть задано системой неравенств*:

$$f_{\alpha}(x_{i(\alpha)}; X^{i(\alpha)}) \geq > 0, \quad \alpha = 1, \ldots, N, \tag{4}$$

где символ "$\geq>$" *означает, что в неравенстве с номером* α *используется один из символов* "$\geq$" *или* "$>$"; $i(\alpha)$ – *номер выделенной для неравенства* α *переменной* (*допускается случай, когда* $i(\alpha)$ *не определен, выделенный аргумент отсутствует и принимается* $i(\alpha) \in \varnothing$); $X^{i(\alpha)}$ – *набор переменных* x_k, $k \neq i(\alpha)$, *и выполняются условия*:

II.1) *область определения* ω_{α} *функции* $f_{\alpha}(X)$ *замкнута относительно операции* $\min(X^{\mathrm{I}}; X^{\mathrm{II}})$ (*или операции* $\max(X^{\mathrm{I}}; X^{\mathrm{II}})$);

II.2) *функция* $f_{\alpha}(x_{i(\alpha)}; X^{i(\alpha)})$ *невозрастающая* (*или неубывающая*) *по* x_k, $k \neq i(\alpha)$.

Условие II.1 *в ослабленном виде превращается в условие*:

II.1') *относительно рассматриваемой покоординатной операции замкнуто множество* $H = \bigcap_{\alpha} \omega_{\alpha}$ – *область определения системы функций* $\{f_{\alpha}(X)\}$.

Условие II.2 *должно быть выполнено при каждом* α *хотя бы на одном из множеств* Ω, H *или* ω_{α}, *причем* $\Omega \subset H \subset \omega_{\alpha}$. ■

Доказательство теоремы приведено в (Ершов, 2002, с. 8–9).

Вторая теорема о клювах имеет "рекурсивный" характер, поскольку от множеств ω_{α} и H требуется замкнутость относительно той же операции, для которой формулируется теорема. Множества ω_{α} и H могут задаваться с помощью системы неравенств вида (4), но, возможно, использующих другие функции. В приложениях достаточно для каждого α подобрать замкнутое относительно рассматриваемой операции множество $\tilde{\omega}_{\alpha}$, такое, что $\Omega \subset \tilde{\omega}_{\alpha} \subset \omega_{\alpha}$. Тогда непустое в силу $\Omega \neq \varnothing$ множество $\bigcap_{\alpha} \tilde{\omega}_{\alpha}$ будет замкнутым относительно этой операции, и тем же свойством будет обладать множество Ω. Во многих случаях множество $\tilde{\omega}_{\alpha}$ удается выбрать среди "стандартных" множеств, для которых замкнутость относительно рассматриваемой покоординатной операции очевидна.

Замечание 1. Непустое пересечение множеств, удовлетворяющих условиям теорем 1 и 2 и потому имеющих клюв, имеет такой же клюв.

Замечание 2. Неравенства $a_i \le x$, $a_i < x_i$, $x_i < b_i$, $x_i \le b_i$ являются частным случаем неравенств (4).

Замечание 3. Существуют множества, имеющие одновременно клювы $\check{X}(\Omega)$ и $\hat{X}(\Omega)$. Полезный способ задания таких множеств состоит в следующем. Пусть $\check{\Omega}$ – множество, имеющее мини-клюв $\check{X}(\check{\Omega})$; $\hat{\Omega}$ – множество, имеющее макси-клюв $\hat{X}(\hat{\Omega})$, и $\Omega = \check{\Omega} \cap \hat{\Omega} \ne \varnothing$. Тогда, если $\check{X}(\check{\Omega}) \in \hat{\Omega}$, то $\check{X}(\check{\Omega}) = \hat{X}(\Omega)$; если $\hat{X}(\hat{\Omega}) \in \check{\Omega}$, то $\hat{X}(\hat{\Omega}) = \hat{X}(\Omega)$. Очевидно, что из $\check{X}(\check{\Omega}) \notin \underline{M}\hat{X}(\hat{\Omega})$ или из $\hat{X}(\hat{\Omega})$ $\notin$ $\notin$ $\overline{M}\check{X}(\check{\Omega})$ следует $\Omega = \varnothing$.

Замечание 4. Имеющие клювы множества из R_n могут не включать в качестве подмножеств области, могут иметь нулевой n-мерный объем или быть дискретными. Достаточно общий способ получения таких множеств состоит в рассмотрении пересечения множества Ω, удовлетворяющего условиям теорем 1 и 2 о клювах, и множества-решетки D, задаваемого следующим способом.

Пусть D_i – дискретное множество допустимых значений переменной x_i и $i \in \{i_1, \ldots, i_m\}$, где $\{i_1, \ldots, i_m\}$ – подмножество индексов переменных $x_1, \ldots, x_n$, $1 \le m \le n$, $i_k \ne i_l$ при $k \ne l$. Тогда множество $D = D(D_{i_1}; \ldots; D_{i_m})$ определим как множество точек $X = (x_i)$, для которых $x_i \in D_i$ при $i \in$ $\in \{i_1, \ldots, i_m\}$. Очевидно, что D замкнуто относительно операций (1). Поэтому непустое пересечение $(\Omega \cap D)$ имеет клюв того же типа, что и клюв для Ω. Легко вводятся и более общие по сравнению с точечными множествами D множества, замкнутые относительно операций (1), не являющиеся областями в R_n и конструируемые из пересекающихся или непересекающихся прямых и плоскостей разных размерностей.

Следующее утверждение дает достаточное условие того, чтобы множество Ω было замкнуто относительно операции $\min(X^{\mathrm{I}}; X^{\mathrm{II}})$, $\max(X^{\mathrm{I}}; X^{\mathrm{II}})$ и, следовательно, при выполнении теоремы 1 имело клювы $\check{X}(\Omega)$ и $\hat{X}(\Omega)$.

Теорема 3 о клювах. *Пусть непустое множество* $\Omega \subset R_n$ *задается в виде пересечения множеств* Ω_1, Ω_2, *определенных системами неравенств, аналогичными системам* (4):

$$\begin{aligned} \Omega_1&: f_\alpha(x_{i(\alpha)}; X^{i(\alpha)}) \geq> 0, \quad \alpha = 1, \ldots, N_1, \\ \Omega_2&: f_\beta(x_{i(\beta)}; X^{i(\beta)}) \geq> 0, \quad \beta = N_1 + 1, \ldots, N_2, \end{aligned} \tag{5}$$

в которых при $X \in \Omega$ *функции* f_α *не убывают по выделенным аргументам* $x_{i(\alpha)}$ *и не возрастают по другим аргументам, функции* f_β *не возрастают по выделенным аргументам* $x_{i(\beta)}$ *и не убывают по другим аргументам, области определения семейств функций* $F_1 = \{f_\alpha\}$ *и* $F_2 = \{f_\beta\}$, *обозначаемые* $\omega F_1 \equiv \cap\omega_\alpha$, $\omega F_2 \equiv \cap\omega_\beta$, *где* ω_γ *– область определения функции* f_γ, $\gamma = 1, \ldots, N_1 + N_2$, *замкнуты одновременно относительно операций* $\min(X^{\mathrm{I}}; X^{\mathrm{II}})$ *и* $\max(X^{\mathrm{I}}; X^{\mathrm{II}})$. *Тогда множество* $\omega \equiv$ $\equiv \Omega_1 \cap \Omega_2$ *замкнуто относительно операций* $\min(X^{\mathrm{I}}; X^{\mathrm{II}})$ *и* $\max(X^{\mathrm{I}}; X^{\mathrm{II}})$.

Заметим, что эта теорема обобщает замечание 3.

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что множества Ω_1 и Ω_2 соответственно замкнуты относительно операций $\min(X^{\mathrm{I}}; X^{\mathrm{II}})$ и $\max(X^{\mathrm{I}}; X^{\mathrm{II}})$. При $X^{\mathrm{I}} \in \Omega_1$, $X^{\mathrm{II}} \in \Omega_2$ для результатов применения к ним операций $\min(X^{\mathrm{I}}; X^{\mathrm{II}}) \equiv \underline{X}^{\mathrm{I,\,II}} \equiv (\underline{x}_i^{\mathrm{I,\,II}})$, $\max(X^{\mathrm{I}}; X^{\mathrm{II}}) \in \overline{X}^{\mathrm{I,\,II}} \equiv (\bar{x}_i^{\mathrm{I,\,II}})$ имеем $\underline{X}^{\mathrm{I,\,II}} \in \Omega_1$, $\overline{X}^{\mathrm{I,\,II}} \in$ $\in \Omega_2$ и $\underline{X}^{\mathrm{I,\,II}} \in \omega F_2$, $\overline{X}^{\mathrm{I,\,II}} \in \omega F_1$. Поэтому доказательство теоремы сводится к проверке выполнения неравенств:

$$f_\alpha(\overline{X}^{\mathrm{I,\,II}}) \geq> 0, \quad \alpha = 1, \ldots, N_1; \quad f_\beta(\underline{X}^{\mathrm{I,\,II}}) \geq> 0, \quad \beta = N_1 + 1, \ldots, N_2.$$

Рассмотрим функцию f_α. Поскольку нумерация точек X^{I} и X^{II} была произвольной, предполагаем, что $\bar{x}_{i(\alpha)}^{\mathrm{I,\,II}} = x_{i(\alpha)}^{\mathrm{I}} \ge x_{i(\alpha)}^{\mathrm{I,\,II}}$ и набор невыделенных аргументов $[\overline{X}^{i(\alpha)}]^{\mathrm{I,\,II}}$ представляется в виде:

$$[\overline{X}^{i(\alpha)}]^{\mathrm{I,\,II}} \equiv (\overline{X}^{\mathrm{I}}(\alpha); \overline{X}^{\mathrm{II}}(\alpha)), \quad \overline{X}^{\mathrm{I}}(\alpha) \equiv \{\bar{x}_k^{\mathrm{I}}(\alpha)\}, \quad \overline{X}^{\mathrm{II}}(\alpha) \equiv \{\bar{x}_k^{\mathrm{II}}(\alpha)\},$$

т.е. выделяем координаты точки $\overline{X}^{\mathrm{I,\,II}}$, которые совпадают с координатами точек X^{I} и X^{II}. Из определения операции $\max(X^{\mathrm{I}}; X^{\mathrm{II}})$ следует, что $\bar{x}_k^{\mathrm{I}}(\alpha) \ge \bar{x}_k^{\mathrm{II}}(\alpha)$ и $\bar{x}_l^{\mathrm{II}}(\alpha) \ge \bar{x}_l^{\mathrm{I}}(\alpha)$. Тогда

$$f_\alpha(\overline{X}^{\mathrm{I,\,II}}) \equiv f_\alpha(\bar{x}_{i(\alpha)}^{\mathrm{I,\,II}}; X^{i(\alpha);\,\mathrm{I,\,II}}) \equiv f_\alpha(\bar{x}_{i(\alpha)}^{\mathrm{I}}; \overline{X}^{\mathrm{I}}(\alpha), \overline{X}^{\mathrm{II}}(\alpha)) \ge f_\alpha(\bar{x}_{i(\alpha)}^{\mathrm{I}}; \{\bar{x}_k^{\mathrm{I}}(\alpha)\}, \{\bar{x}_l^{\mathrm{I}}(\alpha)\}) \equiv f_\alpha(\overline{X}^{\mathrm{I}}) \geq> 0,$$

$$f_\alpha(\overline{X}^{\mathrm{I,\,II}}) \equiv f_\alpha(\bar{x}_{i(\alpha)}^{\mathrm{II}}(\alpha); X^{i(\alpha);\,\mathrm{I,\,II}}) \equiv f_\alpha(\bar{x}_{i(\alpha)}^{\mathrm{II}}; \overline{X}^{\mathrm{I}}(\alpha), \overline{X}^{\mathrm{II}}(\alpha)) \ge f_\alpha(\bar{x}_{i(\alpha)}^{\mathrm{I}}; \{\bar{x}_k^{\mathrm{I}}(\alpha)\}, \{\bar{x}_l^{\mathrm{I}}(\alpha)\}) \equiv f_\alpha(\overline{X}^{\mathrm{I}}) \geq> 0,$$

поскольку $\bar{x}_l^{\mathrm{I,\,II}}(\alpha) \ge \bar{x}_l^{\mathrm{I}}(\alpha)$, функция f_α по невыделенным аргументам не возрастает и $X^{\mathrm{I}} \in \Omega_1$.

Доказательство выполнения неравенств $f_\beta(\overline{X}^{\mathrm{I,\,II}}) \geq> 0$ проводится аналогично. ■

1.3. Обобщенные клювы. Учитывая возможность перехода к переменным $x_i' = -x_i$ при некоторых i, а также возможность рассмотрения части переменных в качестве экзогенно задаваемых параметров, не включаемых в критерий выбора решения из образующих множество Ω допустимых решений, откажемся от предположения о невозрастании или неубывании критериальной функции на Ω по всем ее аргументам и введем понятие обобщенного клюва для множества Ω.

Будем предполагать, что множество индексов $\{1, \ldots, n\}$ переменных x_i представлено в виде объединения трех непересекающихся множеств S^-, S^0, S^+, определяющих разбиение $S\{S^-; S^0; S^+\}$, и пусть $S^- \cup S^+ \ne \varnothing$.

Множество $B(\Omega; S)$ точек $X \in \Omega$ назовем *обобщенным клювом* множества Ω, соответствующим разбиению S, или *S-клювом*, если для любой точки S-клюва $\tilde{X} \equiv (\tilde{x}_i) \in B(\Omega; S)$ выполняется $\tilde{x}_i = \min\limits_{X \in \Omega} x_i$ при $i \in S^-$, $\tilde{x}_i = \max\limits_{X \in \Omega} x_i$ при $i \in S^+$ и на $\tilde{x}_i$, $i \in S^0$, ограничения не накладываются (кроме $\tilde{X} \in \Omega$). Если S-клюв $B(\Omega; S)$ – точка, то ее будем обозначать $\tilde{X}(\Omega; S)$.

S-клюв предлагается обозначать $B(\Omega; S)$, используя первую букву английского слова “beak”, переводимого как “клюв”, и подчеркивая то, что в общем случае $B(\Omega; S)$ – не точка, а подмножество множества Ω. Мини-клюв $\check{X}(\Omega)$ получаем при $S = (S^-)$, $S^0 = \varnothing$, $S^+ = \varnothing$; макси-клюв $\hat{X}(\Omega)$ – при $S = (S^+)$. Частичные мини- и макси-клювы получаем при $S = \{S^-; S^0\}$ и $S = \{S^0; S^+\}$, если $S^0 \ne \varnothing$. Понятие S-клюва базируется на том, что R^n можно рассматривать как упорядоченное векторное пространство, в котором структура квазипорядка задается с помощью клина.

Введем понятие *$Q(S)$-операции, соответствующей разбиению S*, частными случаями которой будут операции $\min(X^{\mathrm{I}}; X^{\mathrm{II}})$ и $\max(X^{\mathrm{I}}; X^{\mathrm{II}})$. Результатом бинарной операции $Q(S)$, применяемой к паре точек $X^{\mathrm{I}}, X^{\mathrm{II}}$, назовем множество $Q(S; X^{\mathrm{I}}, X^{\mathrm{II}})$ точек $X \equiv (x_i)$, удовлетворяющих условиям $x_i = \min(x^{\mathrm{I}}; x^{\mathrm{II}})$ при $x_i \in S^-$, $x_i = \max(x^{\mathrm{I}}; x^{\mathrm{II}})$ при $x_i \in S^+$; при этом на x_i, $i \in S^0$,ограничения не накладываются.

Непустое множество $\Omega \subset R_n$ назовем *замкнутым относительно операции* $Q(S)$, если для любых $X^{\mathrm{I}} \in \Omega$, $X^{\mathrm{II}} \in \Omega$ имеем $Q(S; X^{\mathrm{I}}, X^{\mathrm{II}}) \cap \Omega \ne \varnothing$.

Предложенные определения позволяют очевидным образом сформулировать и доказать теоремы, обобщающие, хотя и незначительно, теоремы 1 и 2 о клювах.

Теорема 4 о S-клювах. *Непустое множество $\Omega \subset R_n$ имеет S-клюв $B(\Omega; S)$, если оно: ограничено снизу по x_i, $i \in S^-$ и сверху по x_i, $i \in S^+$; замкнуто (или $\underline{K}_\Omega x_i \ne \varnothing$ при $i \in S^-$, $\overline{K}_\Omega x_i \ne \varnothing$ при $i \in S^+$); существует непустое, замкнутое относительно операции $Q(S)$ множество $\omega \subset \Omega$, такое, что $\underline{K}_\Omega x_i \cap \omega \ne \varnothing$ при $i \in S^-$ и $\overline{K}_\Omega x_i \cap \omega \ne \varnothing$ при $i \in S^+$.*

Теорема 5 о S-клювах. *Непустое множество $\Omega \subset R_n$ замкнуто относительно операции $Q(S)$, если оно может быть задано системой неравенств*

$$f_\alpha(x_{i(\alpha)}; X^{i(\alpha)}) \geq> 0, \quad \alpha = 1, \ldots, N, \tag{6}$$

такой, что:

1) *множество $H = \bigcap\limits_\alpha \omega_\alpha$, где ω_α – область определения функции f_α, замкнуто относительно операции $Q(\tilde{S})$ с разбиением $\tilde{S} = \{\tilde{S}^-; \tilde{S}^0; \tilde{S}^+\}$, для которого $\tilde{S}^0 = \varnothing$, $\tilde{S}^- = S^- \cup S^{0,-}$, $\tilde{S}^+ = S^+ \cup S^{0,+}$, $S^0 = S^{0,-} \cup S^{0,+}$ и $S^{0,-} \cap S^{0,+} = \varnothing$ (т.е. используется разбиение множества S^0 на $S^{0,-}$ и $S^{0,+}$);*

2) f_α – *невозрастающая функция от* x_i *при* $i \in \tilde{S}^-$, $i \neq i(\alpha)$, *и неубывающая – от* x_i *при* $i \in \tilde{S}^+$, $i \neq i(\alpha)$ (*это условие должно выполняться на* $H = \bigcap_\alpha \omega_\alpha$ *или на* Ω).

Очевидно, что множество $\Omega \equiv R_n$ замкнуто относительно любой операции $Q(S)$, и можно считать, что при $N = 0$ оно "задается" вырожденной системой неравенств (6).

Доказательства теорем 4 и 5 о S-клювах не приводятся, поскольку их логика принципиально не отличается от доказательств теорем о клювах. Вместе теоремы 4 и 5 о S-клювах определяют семейство множеств, имеющих обобщенные клювы $B(\Omega;\ S)$. Конечно, существуют имеющие S-клювы множества, не удовлетворяющие условиям этих теорем.

1.4. Зависимость клювов от параметров, задающих множества. Множество Ω может быть задано как элемент семейства множеств, определяемых значениями вещественных параметров. Как правило, для параметров определено множество их допустимых значений. Различие между переменными и параметрами или экзогенно задаваемыми переменными относительно зависит от контекста, в котором рассматривается модель. Поэтому имеет смысл исследовать ситуацию, когда переменные и параметры принадлежат вещественному пространству.

Пусть для параметров задано множество $P \subset R_m$ их допустимых значений, $\{\Omega(\pi)\}$ – семейство множеств, определяемых набором параметров $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_m)$, элемент которого – множество $\Omega(\pi) \subset R_n$ – определяется системой неравенств:

$$f_\alpha(x_{i(\alpha)};\ X^{i(\alpha)};\ \pi) \geq> 0, \quad \alpha = 1, \ldots, N. \tag{7}$$

Будем предполагать, что $\Omega(\pi)$ удовлетворяет условиям теорем 1 и 2 о клювах при $\pi \in P$ и имеет мини-клюв $\check{X}(\Omega(\pi))$. Его координаты $\check{x}_i(\pi)$ являются функциями параметров. Проанализируем характер этих зависимостей, предполагая, что f_α – невозрастающая функция параметров на $H = \bigcap_\alpha \omega_\alpha$ или на Ω (при $\pi \in P$).

Очевидно, что если множества Ω^{I} и Ω^{II}, имеющие мини-клювы, связаны соотношением $\Omega^{\mathrm{II}} \subset \Omega^{\mathrm{I}}$, то $\check{X}(\Omega^{\mathrm{II}}) \in \Omega^{\mathrm{II}} \subset \Omega^{\mathrm{I}}$ и, следовательно, $\check{X}(\Omega^{\mathrm{I}}) \leq \check{X}(\Omega^{\mathrm{II}})$. Поэтому, если $\pi^{\mathrm{I}} \leq \pi^{\mathrm{II}}$, то $\Omega(\pi^{\mathrm{II}}) \subset \Omega(\pi^{\mathrm{I}})$, и координаты $\check{x}_i(\pi)$ мини-клювов $\check{X}(\Omega(\pi))$ являются неубывающими функциями параметров. Если f_α – неубывающая функция параметров, то координаты $\check{x}_i(\pi)$ – невозрастающие функции.

Аналогичным образом доказывается, что для множеств $\Omega(\pi)$, задаваемых системой неравенств (7) при фиксированных значениях параметров $\pi_1, \ldots, \pi_m$ и имеющих макси-клювы $\hat{X}(\Omega(\pi))$, их координаты $\hat{x}_i(\pi)$ являются: а) невозрастающими функциями, если функции $f_\alpha(x_{i(\alpha)};\ X^{i(\alpha)};\ \pi)$ – не убывают по переменным x_k, $k \neq i(\alpha)$, не возрастают по параметрам; б) неубывающими функциями, если f_α не убывают по всем аргументам, кроме, быть может, переменной $x_{i(\alpha)}$. Это утверждение следует из того, что для $\Omega^{\mathrm{II}} \subset \Omega^{\mathrm{I}}$ имеем $\hat{X}(\Omega^{\mathrm{II}}) \leq \hat{X}(\Omega^{\mathrm{I}})$.

Замечание 5. Пусть множество $P \subset R_m$ замкнуто относительно операции $\min(X^{\mathrm{I}};\ X^{\mathrm{II}})$ и $\tilde{\Omega} \subset R_{n+m}$ – множество, задаваемое системой неравенств (7) и условием $\pi \in P$. Если $\{f_\alpha\}$ – система невозрастающих (или неубывающих) функций ($\alpha = 1, \ldots, N$) параметров $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_m)$, то для $\tilde{\Omega}$ выполнены условия теорем 1 и 2 о клювах, и существует клюв $\check{X}(\tilde{\Omega})$ (или $\hat{X}(\tilde{\Omega})$) с координатами $\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n;\ \check{\pi}_1, \ldots, \check{\pi}_m$ (или $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n;\ \hat{\pi}_1, \ldots, \hat{\pi}_m$). Очевидно, что $(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n) = \check{X}(\Omega(\check{\pi}_1, \ldots, \check{\pi}_m))$ и $(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n) = \hat{X}(\Omega(\hat{\pi}_1, \ldots, \hat{\pi}_m))$.

Исследование зависимости клювов от задающих множество параметров завершим рассмотрением семейства множеств $\{\Omega(\pi)\}$, $\pi \in P$, такого, что $\Omega(\pi) = \Omega^{\mathrm{I}}(\pi) \cap \Omega^{\mathrm{II}}(\pi)$, $\Omega(\pi) \neq \varnothing$ при $\pi \in P$ и множества $\Omega^{\mathrm{I}}(\pi)$ и $\Omega^{\mathrm{II}}(\pi)$ определяются системами неравенств:

$$\begin{aligned} &\Omega^{\mathrm{I}}(\pi)\colon\ f_\alpha(x_{i(\alpha)};\ X^{i(\alpha)};\ \pi) \geq> 0, \quad \alpha = 1, \ldots, N_1; \\ &\Omega^{\mathrm{II}}(\pi)\colon\ f_\beta(x_{i(\beta)};\ X^{i(\beta)};\ \pi) \geq> 0, \quad \beta = N_1 + 1, \ldots, N_2. \end{aligned} \tag{8}$$

В (8) функции f_α – невозрастающие по параметрам и по x_k, $k \neq i(\alpha)$, функции f_β – неубывающие по параметрам и по x_k, $k \neq i(\beta)$. Предполагается, что множества $\Omega^{\mathrm{I}}(\pi)$ и $\Omega^{\mathrm{II}}(\pi)$ удовлетворяют и другим условиям теорем 1 и 2 о клювах и, следовательно, существуют клювы $\check{X}(\Omega^{\mathrm{I}}(\pi)) \equiv (\check{x}_i^{\mathrm{I}}(\pi))$ и $\hat{X}(\Omega^{\mathrm{II}}(\pi)) \equiv (\hat{x}_i^{\mathrm{II}}(\pi))$. Тогда, как уже было доказано, координаты клювов $\check{X}(\Omega(\pi))$ и $\hat{X}(\Omega(\pi))$ будут неубывающими функциями параметров.

Слабую монотонность координат клювов как функций параметров можно использовать при анализе свойств решения задач, формулируемых для семейства множеств $\{\Omega(\pi)\}$. Рассмотрим две такие задачи.

Задача 1. Требуется задать множество $\tilde{P} \subset P$ значений параметров π, такое, что при $\pi \in \tilde{P}$ клюв $\check{X}(\Omega^{\mathrm{I}}(\pi))$ принадлежит множеству $\Omega^{\mathrm{II}}(\pi)$, а клюв $\hat{X}(\Omega^{\mathrm{II}}(\pi))$ – множеству $\Omega^{\mathrm{I}}(\pi)$. Тогда при $\pi \in \tilde{P}$ непустое множество $\Omega(\pi) = \Omega^{\mathrm{I}}(\pi) \cap \Omega^{\mathrm{II}}(\pi)$ будет иметь клювы $\check{X}(\Omega(\pi)) = \check{X}(\Omega^{\mathrm{I}}(\pi))$ и $\hat{X}(\Omega(\pi)) = \hat{X}(\Omega^{\mathrm{II}}(\pi))$. Требуется предложить достаточное условие непустоты множества $\tilde{P}$.

Представим требование $\hat{X}(\Omega^{\mathrm{II}}(\pi)) \in \Omega^{\mathrm{I}}(\pi)$ в виде:

$$\pi \in \tilde{P}, \quad g_\alpha \equiv f_\alpha(\hat{X}^{\mathrm{I}}(\pi); \pi) \geq> 0, \quad \alpha = 1, \ldots, N_1, \tag{9}$$

а требование $\check{X}(\Omega^{\mathrm{I}}(\pi)) \in \Omega^{\mathrm{II}}(\pi)$ –

$$\pi \in \tilde{P}, \quad g_\beta \equiv f_\beta(\check{X}^{\mathrm{I}}(\pi); \pi) \geq> 0, \quad \beta = N_1 + 1, \ldots, N_1 + N_2. \tag{10}$$

Пусть множество допустимых значений параметров P будет непусто, ограничено сверху и замкнуто относительно операций $\min(X^{\mathrm{I}}; X^{\mathrm{II}})$ и $\max(X^{\mathrm{I}}; X^{\mathrm{II}})$. Тогда множества T^{I} и T^{II} точек $Z \equiv (X; \pi) \in R_{n+m}$, определяемые системами неравенств (9) и (10), будут иметь клювы $\check{Z}(T^{\mathrm{I}})$ и $\hat{Z}(T^{\mathrm{II}})$, а искомое множество $\tilde{P}$ – это проекция пересечения $(T^{\mathrm{I}} \cap T^{\mathrm{II}}) \equiv T$ на пространство параметров π, т.е. на R_m.

Как уже отмечалось, для непустоты множеств T и $\tilde{P}$ достаточно выполнения хотя бы одного из требований: $\check{Z}(T^{\mathrm{I}}) \in T^{\mathrm{II}}$ или $\hat{Z}(T^{\mathrm{II}}) \in T^{\mathrm{I}}$. Проверка их выполнения сводится при найденных клювах $\check{Z}(T^{\mathrm{I}}) \in (\check{X}; \check{\pi})$ и $\hat{Z}(T^{\mathrm{II}}) \equiv (\hat{X}; \hat{\pi})$ к проверке выполнения систем неравенств:

$$f_\beta(\check{Z}^{\mathrm{I}}) \equiv f_\beta(\check{X}; \check{\pi}) \geq> 0, \quad \beta = N_1 + 1, \ldots, N_1 + N_2, \quad f_\alpha(\hat{Z}^{\mathrm{II}}) \equiv f_\alpha(\hat{X}; \hat{\pi}) \geq> 0, \quad \alpha = 1, \ldots, N_1.$$

Задача 2. Требуется задать множество $\tilde{P} \subset P$ значений параметров π, такое, что при $\pi \in \tilde{P}$ клювы $\check{X}(\Omega^{\mathrm{I}}(\pi))$ и $\hat{X}(\Omega^{\mathrm{II}}(\pi))$ совпадают и множество $\Omega(\pi) = \Omega^{\mathrm{I}}(\pi) \cap \Omega^{\mathrm{II}}(\pi)$ превращается в точку. Требуется предложить достаточное условие непустоты множества $\tilde{P}$.

Рассмотрим две системы неравенств:

$$\psi_i^{\mathrm{I}}(\pi) \equiv \check{x}_i^{\mathrm{I}}(\pi) - \hat{x}_i^{\mathrm{I}}(\pi) \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{11}$$

$$\psi_i^{\mathrm{II}}(\pi) \equiv \hat{x}_i^{\mathrm{II}}(\pi) - \check{x}_i^{\mathrm{II}}(\pi) \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{12}$$

каждая из которых дополнена требованием $\pi \in P$. Вместе эти системы определяют искомое множество $\tilde{P}$.

Будем предполагать, что множество P удовлетворяет требованиям, сформулированным в задаче 1, и f_α – невозрастающая, а f_β – неубывающая функции параметров. Тогда система неравенств (11) определяет множество $P^{\mathrm{I}} \subset P$, замкнутое относительно операции покоординатной минимизации, а система неравенств (12) – множество $P^{\mathrm{II}} \subset P$, замкнутое относительно операции покоординатной максимизации. Потребуем от P^{I} и P^{II} непустоты и замкнутости; их ограниченность следует из ограниченности множества P снизу и сверху. Следовательно, для P^{I} и P^{II} выполнены условия теоремы 1 о клювах и существуют клювы $\check{\pi}(P^{\mathrm{I}})$ и $\hat{\pi}(P^{\mathrm{II}})$. Поэтому для непустоты множества $P^{\mathrm{I}} \cap P^{\mathrm{II}}$ достаточно выполнение хотя бы одного из условий:

$$\check{\pi}(P^{\mathrm{I}}) \in P^{\mathrm{II}}, \quad \hat{\pi}(P^{\mathrm{II}}) \in P^{\mathrm{I}}.$$

Эти условия можно представить в виде систем неравенств:

$$\psi_i^{\mathrm{I}}(\check{\pi}(P^{\mathrm{I}})) \geq 0 \text{ и } \psi_i^{\mathrm{II}}(\hat{\pi}(P^{\mathrm{II}})) \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Значения левых частей неравенств определены, если известны координаты клювов $\check{X}(\Omega^{\mathrm{I}}(\pi))$ и $\hat{X}(\Omega^{\mathrm{II}}(\pi))$ как функции параметров и координаты клювов $\check{\pi}(P^{\mathrm{I}})$ и $\hat{\pi}(P^{\mathrm{II}})$.

Множество $\tilde{P}$ значений параметров π, для которых множество допустимых значений переменных $x_1, \ldots, x_n$ рассматриваемой модели, обозначаемое $\Omega(\pi)$, превращается в точку, являющуюся мини-клювом для $\Omega^{\mathrm{I}}(\pi)$ и макси-клювом для $\Omega^{\mathrm{II}}(\pi)$ (напомним, что $\Omega(\pi) = \Omega^{\mathrm{I}}(\pi) \cap \Omega^{\mathrm{II}}(\pi)$), можно называть *множеством компромиссных значений параметров*. Компромиссных потому, что такие значения параметров определяют модели, допустимые решения которых являются одновременно оптимальными относительно неубывающих критериев, минимизируемых на $\Omega^{\mathrm{I}}(\pi)$ и максимизируемых на $\Omega^{\mathrm{II}}(\pi)$. Конечно, рассмотренные задачи решаются конструктивно, если координаты клювов соответствующих множеств удается представить в виде явно или алгоритмически заданных функций параметров.

1.5. Клювы и решения систем уравнений. Важный для экономической теории и прикладных исследований класс множеств, имеющих клювы, порождается системами уравнений:

$$f_\alpha(X) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, n, \quad X \in R_n, \tag{13}$$

в предположении, что вектор-функция $F(X) = (f_\alpha(X))$ удовлетворяет какому-либо из вариантов теорем 1 и 2 о клювах. Для того чтобы множество рассматриваемых решений системы (13) было ограничено снизу и сверху, будем предполагать, что на решения X накладываются ограничения $X \in \overline{M}A$ и $X \in \underline{M}B$, где A и B – точки из R_n и $A < B$.

Если ΩF – множество всех решений системы (13) и $M(A; B) \equiv \overline{M}A \cap \underline{M}B$, то множества $\Omega F \cap$ $\cap\, M(A; B)$, $\Omega F(\geq) \cap M(A; B)$ и $\Omega F(\leq) \cap M(A; B)$, где множества $\Omega F(\geq)$ и $\Omega F(\leq)$ определены соответственно системами неравенств $F(X) \geq 0$ и $F(X) \leq 0$; будем предполагать непустыми. Заметим, что для этого достаточно, чтобы $\Omega F \cap M(A; B) \neq \varnothing$, поскольку $\Omega F \subset \Omega F(\geq)$, $\Omega F \subset \subset \Omega F(\leq)$ и $\Omega F = \Omega F(\geq) \cap \Omega F(\leq)$.

Пусть $f_\alpha(X) = f_\alpha(x_{i(\alpha)}; X^{i(\alpha)})$ и множество $\Omega F(\geq) \cap M(A; B)$ удовлетворяет условиям теорем 1 и 2 о мини-клюве. Тогда существует мини-клюв $\check{X}(\Omega F(\geq); A, B) \equiv \check{X}(\Omega F(\geq) \cap M(A; B))$. Предположим, что он является внутренней точкой множества $H \cap M(A; B)$, где $H = \bigcap\limits_\alpha \omega_\alpha$. В этом случае, как легко показать, координаты клюва удовлетворяют системе уравнений (13) и, следовательно, мини-клюв $\check{X}(\Omega F(\geq); A, B)$ является мини-клювом для множества $\Omega F \cap M(A; B)$ решений системы (13), удовлетворяющих ограничению $X \in M(A; B)$. При этом множество решений ΩF не обязано быть замкнутым относительно операции покоординатной минимизации.

Аналогичное утверждение справедливо в случае, когда для множества $\Omega F(\geq) \cap M(A; B)$ или для множества $\Omega F(\leq) \cap M(A; B)$ выполняются условия теорем 1 и 2 о макси-клюве и соответствующий макси-клюв является внутренней точкой множества $H \cap M(A; B)$. Тогда макси-клюв $\hat{X}(\Omega F(\geq); A, B)$ или $\hat{X}(\Omega F(\leq); A, B)$ является макси-клювом для подмножества $\Omega F \cap M(A; B)$ множества решений ΩF системы уравнений (13).

Таким образом, в случае неединственности решений системы (13), порождаемой вектор-функцией $F(X)$ из класса, рассматриваемого в связи с теорией клювов, при достаточно простых предположениях об областях определения ω_α функций $f_\alpha(X)$ и точках A, B, среди ограниченных с помощью множества $M(A; B)$ решений этой системы уравнений есть особое решение – мини- или макси-клюв. Методы нахождения таких особых решений в данной статье не рассматриваются. Их целесообразно выбирать с использованием специфики функций $f_\alpha(X)$, задающих систему (13). Наглядно это видно на приведенном в (Ершов, 2002, с. 17–20) графически изображенном примере системы уравнений $f_1(x_1; x_2) = 0$, $f_2(x_2; x_1) = 0$, среди решений которой имеются мини-клювы, макси-клювы и S-клювы связных компонент множеств, задаваемых неравенствами $f_1 \geq 0$, $f_1 \leq 0$, $f_2 \geq 0$, $f_2 \leq 0$.

Необходимо иметь в виду, что уравнения (13) не предполагаются приведенными к виду $X = F(X)$, позволяющему интерпретировать решение как неподвижную точку отображения $F(X)$. Преобразование системы (13) к виду $X = F(X)$ возможно не единственным способом, и применимость численных методов нахождения неподвижных точек зависит от преобразования $f(X) \longrightarrow F(X)$. Поскольку на выделенные аргументы $x_{i(\alpha)}$ функций f_α требования монотонности не накладываются, то выбор такого преобразования системы (3), что отображение $F(X)$ обладает требуемыми свойствами, представляет собой самостоятельную задачу, которая может не иметь решения или быть слишком сложной в каком-либо смысле. Поэтому существование особых решений-клювов у систем уравнений (13), имеющих неединственные решения, не следует из результатов, относящихся к системам вида $X = F(X)$.

Заметим, что в ряде работ, посвященных межотраслевым моделям, например в (Беленький, 1967, 1968; Бусыгин, 1976; Багриновский, 1977; Багриновский, Бусыгин, Радченко, 1978; Багриновский, Бусыгин, 1980), на отображение $F(X)$ накладывается ограничение, гарантирующее единственность положительной неподвижной точки, что существенно упрощает задачу ее численного нахождения. Трудности возникают, когда множество Ω, задаваемое неравенствами (4), в которых N не обязательно равно n, несвязно и распадается на несколько связных компонент или содержит точки X, для которых существуют малые окрестности, пересечения которых с Ω имеют размерности, зависящие от X. Кроме того, в случае $N = n$ множество решений системы (13) может не быть дискретным. В этих условиях важную для приложений задачу нахождения клювов целесообразно изучать не в общем виде, а для выбираемых классов моделей, задающих множество Ω.

2. КОНСТРУИРОВАНИЕ МНОЖЕСТВ, ЗАМКНУТЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОКООРДИНАТНЫХ ОПЕРАЦИЙ МИНИМИЗАЦИИ И МАКСИМИЗАЦИИ

В развиваемой теории клювов центральным элементом является возможность проверки замкнутости множества относительно покоординатных операций минимизации и максимизации, которые будем кратко называть ко-операциями, и задания имеющих клювы множеств, с помощью систем неравенств и уравнений. Определим варианты достаточных условий замкнутости множеств относительно ко-операций или, коротко, ко-замкнутости, не сводящиеся к условиям теоремы 2 о клювах, а затем предложим систему операций над множествами, позволяющую конструировать новые, более сложно задаваемые ко-замкнутые множества из ко-замкнутых множеств.

Первая из таких операций очевидна: это пересечение множеств, конечно, в предположении, что пересечение множеств непусто. Вторая операция, также используемая в теореме 2 о клювах, – это операция перехода от множества Ω к его дополнению – множеству $D\Omega$. Очевидно, что если множество Ω задается неравенством $f(x_i; X^i) \geq 0$, где функция $f(X)$ не возрастает по переменным x_j, $j \neq i$, то оно замкнуто относительно операции покоординатной минимизации, а дополнение к Ω – множество $D\Omega$, задаваемое неравенством $f(x_i; X^i) < 0$ или неравенством $g(x_i; X^i) \equiv -f(x_i; X^i) > 0$, замкнуто относительно операции покоординатной максимизации. Третьей операцией над множествами, позволяющей при выполнении определенных условий конструировать ко-замкнутые множества, является операция объединения ко-замкнутых, по предположению, множеств. Она не используется в формулировке теоремы 2 о клювах и относительно редко применяется в экономико-математическом моделировании хотя бы потому, что не сохраняет свойство выпуклости рассматриваемых множеств.

Начнем с систематизации понятий, определений и обозначений, в терминах которых осуществляется поиск новых достаточных условий ко-замкнутости множеств. Затем рассмотрим возможные комбинации исходных предположений о функциях, используемых для задания ко-замкнутых множеств, и об операциях над такими множествами. Такой подход позволяет, как это будет видно из дальнейшего, выявить, наряду с ситуацией, угаданной в формулировке теоремы 2 о клювах, другие достаточные условия ко-замкнутости множеств и предложить способы их комбинирования.

2.1. Используемые понятия и обозначения. Будем рассматривать множества в R_n, операции пересечения ($\cap$) и объединения ($\cup$) над ними, а также операцию перехода от множества Ω к дополнительному для него множеству $D\Omega$.

Элементарным назовем множество, задаваемое с помощью одного из неравенств:

$$\Omega f(\geq)\colon\ f(X)\geq 0;\quad \Omega f(>)\colon\ f(X)>0;\quad \Omega f(<)\colon\ f(X)<0;\quad \Omega f(\leq)\colon\ f(X)\leq 0,$$

каждое из которых использует функцию $f(X)$, $X \in R_n$, со значениями в R_1.

K-слотовой будем называть функцию $f(X)$, у которой выделены k аргументов ($0 \leq k \leq n$), обозначаемые $x_{i(1)}, \ldots, x_{i(k)}$.

Тогда $f(X) \equiv f(x_{i(1)}, \ldots, x_{i(k)}; X^{i(1), \ldots, i(k)})$, где $X^{i(1), \ldots, i(k)}$ – $(n - k)$-мерный набор переменных x_j, $j \neq i(l)$, $l = 1, \ldots, k$.

Любой выделенный аргумент – переменную $x_{i(k)}$ – будем называть *слотом* или *слотовой переменной*[1]. Анализ свойств слотовых функций, приведший к формулировке теоремы 2 о клювах, заставляет ограничиться использованием нульслотовых ($k = 0$) и однослотовых ($k = 1$) функций. Разделение аргументов на выделенные (слотовые) и невыделенные оправдывается тем, что функция может иметь различные свойства по слотовым и неслотовым аргументам.

Будем использовать следующие свойства функции по отношению к ее аргументу x_j: неубывание, обозначаемое $f(\ldots, \bar{x}_j, \ldots)$; невозрастание, обозначаемое $f(\ldots, \underline{x}_i, \ldots)$. Будем предполагать, что таким свойством функция $f(X)$ обладает на некотором множестве $H \subset \omega_f$, где ω_f – множество, на котором она определена.

Классы множеств, замкнутых относительно операций покоординатных минимизации и максимизации, обозначим соответственно *Mmin* и *Mmax*, не конкретизируя, если это не потребуется, размерность пространства R_n, в котором рассматриваются множества Ω.

Для обозначения элементарных множеств, определяемых с помощью функции $f(X)$, будем использовать также символы "≥>" и "<≤", введенные в формулировках теоремы 2 о клювах. Таким образом, множество $\Omega f(\geq>)$ задается неравенством $f(X) \geq 0$ или неравенством $f(X) > 0$. Это позволяет ограничиться рассмотрением множеств $\Omega f(\geq)$, $\Omega f(>)$ и $\Omega f(\geq>)$, поскольку свойства множеств $\Omega f(\leq)$, $\Omega f(<)$ и $\Omega f(<\leq)$ следуют из свойств функции $-f(X)$.

В дальнейшем будем исходить из соглашения, по которому используемые функции являются нульслотовыми или однослотовыми и по всем невыделенным аргументам не возрастают или не убывают. При этом функция, называемая однослотовой, может рассматриваться и как нульслотовая, если она не убывает или не возрастает по всем переменным $x_1, \ldots, x_n$. Любая переменная x_j, не включаемая в число аргументов функции $f(X)$, может рассматриваться как ее "невыделенный аргумент".

Показано, что когда функция по невыделенным аргументам не является слабо монотонной, не удается доказать принадлежность множества $\Omega f(\geq)$ ни к *Mmin*, ни к *Mmax*.

Пусть функции $f(x_i, \underline{X}^i)$ и $g(x_j, \underline{X}^j)$, выделенные аргументы которых x_i и x_j не обязаны совпадать, определяют элементарные множества $\Omega f(\geq>)$ и $\Omega g(\geq>)$. Тогда из теоремы 2 о клювах следует, что эти множества и их непустое пересечение ко-замкнуты относительно операции покоординатной минимизации. Аналогичным образом получаем, что для $f(x_i, \overline{X}^i)$, $g(x_j, \overline{X}^j)$ множества $\Omega f(\geq>)$, $\Omega g(\geq>)$ и $\Omega f(\geq>) \cap \Omega g(\geq>)$ принадлежат *Mmax*.

Легко убедиться, что в других случаях множества $\Omega f(\geq>)$, $\Omega g(\geq>)$ и их пересечение могут не быть ко-замкнутыми относительно общей для них покоординатной операции. Таким образом, теорема 2 о клювах дает исчерпывающее, в терминах используемых понятий и допущений, описание вариантов ко-замкнутых множеств, получаемых с помощью пересечения элементарных ко-замкнутых множеств. Представимое в виде пересечения элементарных ко-замкнутых относительно общей для них операции множеств будем называть П*min*-множеством или П*max*-множеством, иногда сокращая эти обозначения до П-множества, если указание покоординатной операции можно опустить без ущерба для понимания ситуации. Символ "П" здесь заменяет символ "∩" операции пересечения множеств. Элементарные ко-замкнутые множества естественно считать частными случаями П-множеств. Теорема 2 о мини-клювах представляет собой условие, достаточное для того, чтобы множество Ω было П*min*-множеством или П*max*-множеством.

---

[1] Английский термин "slot", используемый в вычислительной технике, переводится как "паз", "щель" или "вырез".

Для системы функций $F = \{ f_\alpha(X)\}$ введем следующие обозначения для множеств:

$$\Pi Fmin = \bigcap_\alpha \Omega f(\geq>), \quad \text{если} \quad f_\alpha(X) = f_\alpha(x_{i(\alpha)}; \underline{X}^{i(\alpha)}),$$
$$\Pi Fmax = \bigcap_\alpha \Omega f(\geq>), \quad \text{если} \quad f_\alpha(X) = f_\alpha(x_{i(\alpha)}; \overline{X}^{i(\alpha)}), \qquad (14)$$

и отметим, что $\Pi Fmin \subset Mmin$, $\Pi Fmax \subset Mmax$.

2.2. Ко-замкнутые множества, получаемые с помощью объединения элементарных ко-замкнутых множеств. Перейдем к анализу объединений элементарных нульслотовых и однослотовых множеств, ко-замкнутых относительно хотя бы одной из покоординатных операций.

В случае двух функций $f(X)$ и $g(X)$ рассмотрение всевозможных вариантов комбинаций разделения их аргументов на выделенные и невыделенные, гипотез о слабой монотонности функций по неслотовым аргументам позволило сформулировать и доказать следующее утверждение, допускающее обобщение на случай многих функций.

Лемма о ко-замкнутости объединения двух элементарных множеств. *Пусть $f(X)$ и $g(X)$, $X \in R_n$ – функции с областями ω_f и ω_g, на которых они определены, $H \subseteq \omega_f \cap \omega_g$ – непустое множество и $H \in Mmin$ (допускается случай $H = \omega_f \cap \omega_g$). Тогда множество $\Omega = (\Omega Hf) \cap (\Omega Hg)$, где $\Omega Hf \equiv \equiv \Omega f(\geq>) \cap H$, $\Omega Hg \equiv \Omega g(\geq>) \cap H$, замкнуто относительно операции покоординатной минимизации, если выполнено хотя бы одно из следующих достаточных условий ко-замкнутости*:

– для операции покоординатной минимизации:

1min) $f(X) \equiv f(\underline{X})$, $g(X) \equiv g(x_i; \underline{X}^i)$; (в силу симметрии условий относительно функций f и g возможен случай $f(X) = f(x_i; \underline{X}^i)$, $g(X) = g(\underline{X})$);

2min) $f(X) \equiv f(x_i; \underline{X}^i)$, $g(X) = g(x_i; \underline{X}^i)$

(частным случаем условий 1 min) и 2 min) можно считать пару нульслотовых функций $f(\underline{X})$ и $g(\underline{X})$);

– для операции покоординатной максимизации:

1max) $f(X) \equiv f(\overline{X})$, $g(X) \equiv g(x_i;\ \overline{X}^i)$;

2max) $f(X) \equiv f(x_i;\ \overline{X}^i)$, $g(X) = g(x_i;\ \overline{X}^i)$

(частным случаем условий 1 max) и 2 max) можно считать пару нульслотовых функций $f(\overline{X})$ и *$g(\overline{X})$).*

Доказательство леммы дано в (Ершов, 2002, с. 24–26).

Анализ других сочетаний исходных предположений о выделении слотовых аргументов и свойствах функций по невыделенным аргументам показал, что без дополнительных допущений не удается сформулировать и доказать другие достаточные условия замкнутости множества $(\Omega Hf) \cup (\Omega Hg)$ относительно покоординатных операций, если $\Omega Hf = \Omega f(\geq>) \cap H$, $\Omega Hg = \Omega g(\geq>) \cap H$.

Отметим, что для функций $f(X) \equiv f(x_i; \underline{X}^i)$ и $g(X) \equiv g(x_j; \underline{X}^j)$ при $i \neq j$ точка $X^{\mathrm{I,\,II}} = \min(X^{\mathrm{I}}; X^{\mathrm{II}})$ может не принадлежать множеству $(\Omega Hf) \cup (\Omega Hg)$, когда $X^{\mathrm{I}} \in \Omega Hf$, $X^{\mathrm{I}} \notin \Omega Hg$ и $X^{\mathrm{II}} \in \Omega Hg$, $X^{\mathrm{II}} \notin \Omega Hf$, если $x_i^{\mathrm{I,\,II}} = x_i^{\mathrm{I}}$ и $x_j^{\mathrm{I,\,II}} = x_j^{\mathrm{II}}$. В этом случае $f(X^{\mathrm{I,\,II}}) \equiv f(x_i^{\mathrm{I}}; \{\underline{x}_k^{\mathrm{I}}\}, \{\underline{x}_l^{\mathrm{II}}\}, x_j^{\mathrm{II}}) \geq f(\underline{x}_k^{\mathrm{I}}; \{\underline{x}_k^{\mathrm{I}}\}, \{\underline{x}_l^{\mathrm{I}}\}, x_j^{\mathrm{II}})$, но поскольку $x_j^{\mathrm{II}} < x_j^{\mathrm{I}}$, то в общем случае из невозрастания функции f по переменной x_j имеем $f(x_i^{\mathrm{I}}; \{\underline{x}_k^{\mathrm{I}}\},\{\underline{x}_l^{\mathrm{I}}\}, x_j^{\mathrm{II}}) \leq f(X^{\mathrm{I}})$ и неравенство $f(X^{\mathrm{I,\,II}}) \geq> 0$ не обязано выполняться, хотя $f(X^{\mathrm{I}}) \geq> 0$. Таким же образом находим, что не обязано выполняться и неравенство $g(X^{\mathrm{I,\,II}}) \geq g(X^{\mathrm{II}})$. Следовательно, условие совпадения выделенных аргументов функций f и g в условиях 2*min*) и 2*max*) леммы является существенным.

Однако приведенные рассуждения позволяют выделить специальный случай функций $f(x_i; \underline{X}^i)$ и $g(x_j; \underline{X}^j)$, $i \neq j$, для которого множество $(\Omega Hf) \cup (\Omega Hg)$ замкнуто относительно операции $\min(X^{\mathrm{I}}; X^{\mathrm{II}})$. Приведем определение такой ситуации, применяемое для нескольких, не обязательно двух функций.

Для функции n аргументов $f(x_1, \ldots, x_n)$, рассматриваемой на некотором множестве $H \subset R_n$, назовем n-вектор (строку) $Tf = (t_i)$ вектором-индикатором включения переменных для $f(X)$, если $t_i = 0$ для аргумента x_i, от которого $f(X)$ не зависит на множестве H, и $t_i = 1$ – для других аргументов. Для системы функций $f_\alpha(X)$, $\alpha = 1, \ldots, N$, индикатором включения переменных $T\{f_\alpha\}$ назовем $(N \times n)$-матрицу, строками которой являются векторы Tf_α.

Пусть каждая функция системы $F = \{f_\alpha\}$ является нульслотовой или однослотовой. Тогда для однослотовых функций определены номера $i(\alpha)$ выделенных аргументов, а для однослотовой функции номер $i(\alpha)$ не определен и можно считать, что $i(\alpha) \in \varnothing$. В строках матрицы $T\{f_\alpha\}$ элементы $t_{\alpha,\, i(\alpha)}$ пометим знаком “*”. Для двух однослотовых функций $f_1 = f_1(x_i;\, \underline{X}^i)$, $f_2 = f_2(x_j;\, \underline{X}^j)$ с $i \neq j$ матрица $T\{f_\alpha\}$ примет вид:

$$T\{f_\alpha\} = \begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1i}^{*} & \ldots & t_{1j} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & \ldots & t_{2i} & \ldots & t_{1j}^{*} & \ldots & t_{2n} \end{pmatrix}.$$

Естественно считать, что от своих выделенных аргументов x_i и x_j функции f_1 и f_2 на H зависят и $t_{1i}^{*} = 1$, $t_{2j}^{*} = 1$, иначе их можно было бы отнести к множествам их невыделенных аргументов. При этом нет необходимости предполагать, что $i \neq j$.

Функции $f_1(X)$ и $f_2(X)$ назовем согласованными на H в следующих случаях:

– если $f_1(X) = f_1(\underline{X})$, $f_2(X) = f_2(\underline{X})$ или $f_1(X) = f_1(\overline{X})$, $f_2(X) = f_2(\overline{X})$;

– если $f_1(X) = f_1(\underline{X})$, $f_2(X) = f_2(x_i;\, \underline{X}^i)$ или $f_1(X) = f_1(\overline{X})$, $f_2(X) = f_2(x_i;\, \overline{X}^i)$;

– если $f_1(X) = f_1(x_i;\, \underline{X}^i)$, $f_2(X) = f_2(x_i;\, \underline{X}^i)$ или $f_1(X) = f_1(x_i;\, \overline{X}^i)$, $f_2(X) = f_2(x_i;\, \overline{X}^i)$;

– если $f_1(X) = f_1(x_i;\, \underline{X}^i)$, $f_2(X) = f_2(x_j;\, \underline{X}^j)$ или $f_1(X) = f_1(x_i;\, \overline{X}^i)$, $f_2(X) = f_2(x_j;\, \overline{X}^i)$

и $i \neq j$, $t_{1j}t_{2i} = 0$ (все требования предполагаются выполненными при $X \in H$).

Тогда систему функций $F = \{f_\alpha\}$ назовем согласованной на множестве H, если любая пара из ее функций, т.е. f_β и f_γ, $\beta \neq \gamma$, является согласованной на множестве H.

Введение определения оправдано тем, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 6 о ко-замкнутости объединения элементарных множеств, определяемых согласованной системой функций. *Пусть* $F = \{f_\alpha\}$, $X \in R_n$ *– согласованная на множестве* $H \in Mmin$ (*или на* $H \in Mmax$) *система невозрастающих* (*или неубывающих*) *по невыделенным аргументам функций. Тогда непустое по предположению множество* $\bigcup\limits_\alpha \Omega\, Hf_\alpha(\geq>) \equiv \bigcup\limits_\alpha (\Omega f_\alpha(\geq>) \cap H) \equiv$ $\equiv \cup FH\{f_\alpha(\geq>)\}$ *замкнуто относительно покоординатной операции, относительно которой замкнуто множество* H, *и* $\cup FH\{f_\alpha(\geq>)\} \in Mmin$ (*или* $\cup FH\{f_\alpha(\geq>)\} \in Mmax$).

Доказательство этой теоремы содержится в (Ершов, 2002, с. 27–28).

Приведем пример системы функций $F = \{f_\alpha\}$, удовлетворяющих условиям этой теоремы. Пусть функции $f_\alpha(X)$, $\alpha = 1, \ldots, 8$, переменных x_k, $k = 1, \ldots, 5$, на непустом множестве $H \in Mmin$ не возрастают по невыделенным аргументам и для них матрица-индикатор $T\{f_\alpha\}$ задается в виде следующей таблицы:

α \ k	1	2	3	4	5
1	0	1	1	1	1
2	1	1	0	0	1
3	1	1	0	1	0
4	1*	(0)	1	(0)	1
5	1*	(0)	1	(0)	0
6	(0)	1*	0	(0)	1
7	(0)	(0)	1	1*	1
8	(0)	(0)	0	1*	1

В этом примере функции $f_\beta(\underline{X})$, $\beta = 1, 2, 3$, не возрастают по всем аргументам и не зависят на H от некоторых из них (в соответствующих строках матрицы $T\{f_\alpha\}$ нет помеченных знаком “*”единиц и есть нулевые элементы). У функций $f_\alpha(x_{i(\alpha)};\, \underline{X}^{i(\alpha)})$, $\alpha = 4, \ldots, 8$, выделены аргументы с номерами $i(4) = i(5) = 1$, $i(6) = 2$ и $i(7) = i(8) = 4$. В строках матрицы-индикатора находятся заключенные в скобки нули, обеспечивающие выполнение условий согласованности функций f_α, f_γ $(\alpha \neq \gamma)$, имеющих выделенные аргументы.

В силу теоремы 6 (о ко-замкнутости объединения элементарных множеств) непустое по предположению множество $\bigcup_\alpha \Omega\, Hf_\alpha(\geq>)$ замкнуто относительно операции покоординатной минимизации. Следовательно, при условии выполнения других требований теоремы 2 о клювах оно имеет мини-клюв.

2.3. Системы ко-замкнутых множеств. Определим системы множеств, замкнутых относительно операции покоординатной минимизации или максимизации и таких, что включаемые в эти системы множества конструируются с помощью операций пересечения и объединения, применяемых к элементарным множествам. Предполагается, что элементарное множество задается с помощью функций $f(\underline{X})$ и $g(x_i; \underline{X}^i)$ или $f(\overline{X})$ и $g(x_i; \overline{X}^i)$. Такие системы можно называть системами ко-замкнутых множеств и обозначать *Amin* и *Amax*. Очевидно, что $Amin \subset Mmin$ и $Amax \subset Mmax$. Примеры дискретных множеств, замкнутых относительно покоординатных операций, позволяют считать, что $Amin \neq Mmin$ и $Amax \neq Mmax$.

Из $\Omega^1 \in Amin$ и $\Omega^2 \in Amin$ следует, что $\Omega^1 \cap \Omega^2 \in Amin$, если, конечно, $\Omega^1 \cap \Omega^2 \neq \varnothing$. Поэтому проанализируем условия, достаточные для того, чтобы операция объединения множеств не выводила за пределы систем *Amin* и *Amax*.

Из предшествующего рассмотрения следует, что в системах *Amin* и *Amax* имеет смысл выделить множества по меньшей мере трех усложняющихся уровней. Подсистемы системы *Amin*, состоящие из множеств первого, второго и третьего уровней, будем обозначать $Amin^{(1)}$, $Amin^{(2)}$ и $Amin^{(3)}$. Аналогичным образом определим подсистемы $Amax^{(1)}$, $Amax^{(2)}$ и $Amax^{(3)}$. Множества первого уровня – это элементарные множества $\Omega f(\geq>) \in Amin$, если $f(X) = f(\underline{X})$ или $f(X) = f(x_i; \underline{X}^i)$, и $\Omega f(\geq>) \in Amax$, если $f(X) = f(\overline{X})$ или $f(X) = f(x_i; \overline{X}^i)$.

Множества второго уровня образуются из множеств первого уровня при помощи одной из операций пересечения или объединения. Пусть множество $\Omega \in Amin^{(2)}$ и оно определяется системой функций $F = \{f_\alpha(X)\}$, таких, что $\Omega f_\alpha(\geq>) \in Amin^{(1)}$. Тогда из проведенного анализа получаем, что $\Omega = \Pi Fmin$ или $\Omega = \cup FHmin$, если система F согласована на множестве H.

Подсистемы $Amin^{(3)}$ и $Amax^{(3)}$ образуют множества, получаемые из множеств второго уровня (множеств из $Amin^{(2)}$ или $Amax^{(2)}$, соответственно) с помощью одной из операций объединения или пересечения. Если $\Omega^1 \in Amin^{(2)}$, $\Omega^2 \in Amin^{(2)}$, $\Omega^1 \cap \Omega^2 \neq \varnothing$, то $\Omega^1 \cap \Omega^2 \in Amin^{(3)} \subset Amin$. Поэтому детально проанализируем случай, когда используется операция объединения непустых множеств Ω^1 и Ω^2.

Возможны только три варианта задания множеств Ω^1 и Ω^2 второго уровня, из которых конструируется множество $\Omega^1 \cup \Omega^2$.

Вариант 1. Пусть $\Omega^1 = \Pi F^1 min \in Amin^{(2)}$ и $\Omega^2 = \Pi F^2 min \in Amin^{(2)}$, где F^1 и F^2 – системы функций $F^1 = \{f_\alpha(\geq>)\}$ и $F^2 = \{g_\beta(\geq>)\}$.

Если $X^{\mathrm{I}} \in \Omega^1$, $X^{\mathrm{II}} \in \Omega^1$, то $\min(X^{\mathrm{I}}; X^{\mathrm{II}}) \in \Omega^1 \subset \Omega = \Omega^1 \cup \Omega^2$. Поэтому анализировать необходимо только случай $X^{\mathrm{I}} \in \Omega^1$, $X^{\mathrm{II}} \in \Omega^2$ и $X^{\mathrm{I}} \notin \Omega^2$, $X^{\mathrm{II}} \notin \Omega^1$. Очевидно, что для того, чтобы $X^{\mathrm{I,\,II}} \equiv \min(X^{\mathrm{I}}; X^{\mathrm{II}}) \in \Omega$, необходимо и достаточно выполнение хотя бы одной из систем неравенств:

$$f_\alpha(X^{\mathrm{I,\,II}}) \geq> 0, \quad \alpha \in \varphi^1, \quad \text{если} \quad g_\beta(X^{\mathrm{I,\,II}}) \geq> 0, \quad \beta \in \varphi^2, \tag{15}$$

в которых множества индексов φ^1 и φ^2 определены системами функций F^1 и F^2.

В (Ершов, 2002, с. 30) показано, что ни одна из систем неравенств (15) не следует из того, что $X^{\mathrm{I}} \in \Omega^1$ и $X^{\mathrm{II}} \in \Omega^2$, если на используемые системы функций F^1 и F^2 не наложены дополнительные ограничения. Однако возможен случай, при котором хотя бы одна из систем функций $F^1 = \{f_\alpha\}$ или $F^2 = \{g_\beta\}$ состоит из нульслотовых и невозрастающих по всем переменным функций. Пусть $f_\alpha(X) = f_\alpha(\underline{X})$, $\alpha \in \varphi^1$. Тогда множество $\Omega^1 = \bigcap_\alpha \Omega f_\alpha(\geq>)$ с невозрастающими функциями $f_\alpha(\underline{X})$ "притягивают" точку $\min(X^{\mathrm{I}}; X^{\mathrm{II}})$, т.е. при $X^{\mathrm{I}} \in \Omega^1$ и $X^{\mathrm{II}} \in \Omega^2$ всегда $X^{\mathrm{I,\,II}} \in \Omega^1$. Действительно, для системы функций $\{f_\alpha(X)\}$ получаем:

$$f_\alpha(X^{\mathrm{I,\,II}}) = f_\alpha(\{\underline{x}_k^{\mathrm{I}}\}, \{\underline{x}_l^{\mathrm{II}}\}) \geq f_\alpha(X^{\mathrm{I}}) \geq> 0, \quad \alpha \in \varphi^1, \quad \min(X^{\mathrm{I}}; X^{\mathrm{II}}) \in \Omega^1 \subset \Omega^1 \cup \Omega^2.$$

Вариант 2. Пусть $\Omega^1 = \Pi F^1 min = \bigcap_{\alpha} \Omega f_\alpha(\geq>)$, где $f_\alpha(X) = f_\alpha(x_i; \underline{X}^i)$, $\Omega^2 = \cup\Omega H g_\beta(\geq>)$, где $g_\beta(X) = g_\beta(x_i; \underline{X}^i)$, и $\Omega \equiv \Omega^1 \cup \Omega^2$.

Очевидно, что необходимо проанализировать только случай $X^{\mathrm{I}} \in \Omega^1$, $X^{\mathrm{I}} \notin \Omega^2$ и $X^{\mathrm{II}} \in \Omega^2$, $X^{\mathrm{II}} \notin \Omega^1$ и найти условия, при которых для $X^{\mathrm{I,\,II}} \equiv \min(X^{\mathrm{I}}; X^{\mathrm{II}})$ выполняется система неравенств $f_\alpha(X^{\mathrm{I,\,II}}) \geq> 0$, $\alpha \in \varphi^1$ (тогда $X^{\mathrm{I,\,II}} \in \Omega^1 \subset \Omega$) или хотя бы одно из неравенств $g_\beta(X^{\mathrm{I,\,II}}) \geq> 0$, $\beta \in \varphi^2$. При этом предполагается, что все функции систем $\{f_\alpha\}$ и $\{g_\beta\}$ определены или рассматриваются на общем для них непустом множестве $H \in Mmin$, т.е. $\Omega^1 = \Pi F^1 Hmin \equiv \bigcap_{\alpha}(\Omega f_\alpha(\geq>) \cap H)$.

Из анализа первого варианта следует, что множество Ω^1, одинаково задаваемое в вариантах 1 и 2, является притягивающим, если $f_\alpha(X) = f_\alpha(\underline{X})$ для всех $\alpha \in \varphi^1$ (этот факт был доказан для любого из множеств $\Omega H g_\beta(\geq>)$, $\beta \in \varphi^2$).

Покажем, что притягивающим будет и множество Ω^2, если $g_\beta(X) = g_\beta(\underline{X})$ при всех $\beta \in \varphi^2$. Поскольку $\Omega^1 \in Mmin$, $\Omega^2 \in Mmin$, достаточно проанализировать случай $X^{\mathrm{I}} \in \Omega^1$, $X^{\mathrm{I}} \notin \Omega^2$ и $X^{\mathrm{II}} \in \Omega^2$, $X^{\mathrm{II}} \notin \Omega^1$.

Пусть точка $X^{\mathrm{II}} \in \Omega^2$ и, следовательно, удовлетворяет неравенству $g_\beta(X^{\mathrm{I,\,II}}) \geq> 0$ при некотором β, тогда для $X^{\mathrm{I,\,II}} \equiv \min(X^{\mathrm{I}}; X^{\mathrm{II}})$ получаем:

$$g_\beta(X^{\mathrm{I,\,II}}) = g_\beta(\{\underline{x}_k^{\mathrm{I}}\}, \{\underline{x}_l^{\mathrm{II}}\}) \geq g_\beta(\underline{x}_k^{\mathrm{II}}, \underline{x}_l^{\mathrm{II}}) = g_\beta(X^{\mathrm{II}}) \geq> 0 \;\text{ и }\; X^{\mathrm{I,\,II}} \in \Omega^2 \subset \Omega = \Omega^1 \cup \Omega^2.$$

Таким образом, во втором варианте $\Omega \in Mmin$, если хотя бы одно из множеств $\Omega^1 = \Pi F^1 Hmin$ и $\Omega^2 = \Pi F^2 Hmin$ определяется системой невозрастающих функций, т.е. $f_\alpha(X) = f_\alpha(\underline{X})$, $\alpha \in \varphi^1$ или $g_\beta(X) = g_\beta(\underline{X})$, $\beta \in \varphi^2$. Аналогичным образом доказывается, что для того, чтобы $\Omega^1 \cup \Omega^2 \in Mmax$, достаточно, чтобы не убывала хотя бы одна из систем функций $F^1 = \{f_\alpha\}$ или $F_2 = \{g_\beta\}$ по всем переменным.

Вариант 3. Пусть оба множества Ω^1 и Ω^2 образуются при помощи операции объединения элементарных множеств и $\Omega = \Omega^1 \cup \Omega^2$. Тогда $\Omega^1 = \cup\Omega H f_\alpha(\geq>)$, где $f_\alpha(X) = f_\alpha(x_{i(\alpha)}; \underline{X}^{i(\alpha)})$, и $\Omega^2 = \cup\Omega H g_\beta(\geq>)$, где $g_\beta(X) = g_\beta(x_{i(\beta)}; \underline{X}^{i(\beta)})$, и каждая система функций $F^1 = \{f_\alpha\}$ и $F^2 = \{g_\beta\}$ согласована на множестве $H \in Mmin$, что обеспечивает $\Omega^1 \in Mmin$ и $\Omega^2 \in Mmin$.

Из определения множеств вида $\cup\Omega Hf(\geq>)$ и определения согласованности системы функций ясно, что множество Ω замкнуто относительно операции $min(X^{\mathrm{I}}; X^{\mathrm{II}})$ (или $max(X^{\mathrm{I}}; X^{\mathrm{II}})$, если функции $\{f_\alpha\}$ и $\{g_\beta\}$ не убывают по невыделенным аргументам) и система функций $F \equiv \{f_\alpha, g_\beta\}$, объединяющая системы $\{f_\alpha\}$ и $\{g_\beta\}$, согласована на H. В этом случае $\Omega = \bigcup_{\gamma} \Omega Hf_\gamma(\geq>)$, $f_\gamma(X)$ – функции системы F.

Этим завершается описание множеств третьего уровня систем $Amin$ и $Amax$, получаемых объединением двух множеств второго уровня. Последующие уровни множеств, образующих системы $Amin$ и $Amax$, включают множества, конструируемые из множеств, отнесенных к предшествующим (нижним) уровням, с помощью операций объединения и пересечения множеств. Перечислительное описание таких множеств не представляется ни реалистичным, ни полезным из-за разнообразия возможных вариантов. Поэтому ограничимся следующим утверждением.

Теорема 7 о ко-замкнутости объединения двух множеств. *Пусть* $\Omega^{1,\,\mu} = \Pi F^{1,\,\mu} Hmin$, $\mu = 1, \ldots, N_1$; $\Omega^{2,\,\nu} = \cup F^{2,\,\nu} Hmin$, $\nu = 1, \ldots, N_2$, и $\Omega = (\bigcup_{\mu}\Omega^{1,\,\mu}) \cup (\bigcup_{\nu}\Omega^{2,\,\nu}) \equiv \Omega^1 \cup \Omega^2$. *Тогда для того, чтобы* $\Omega \in Amin \subset Mmin$, *достаточно согласованности* (*на множестве* H) *системы функций* $F^2 = \{F^{2,\,1}, \ldots, F^{2,\,N_2}\}$, *объединяющей системы функций* $F^{2,\,\nu}$, *или невозрастания* (*на множестве* H) *по всем аргументам функций одной из систем* $F^1 = \{F^{1,\,1}, \ldots, F^{1,\,N_1}\}$ *или* F^2.

Доказательство основывается на рассмотрении пар точек X^{I} и X^{II}, принадлежащих двум разным множествам из числа множеств ($\Omega^{1,\,1}, \ldots, \Omega^{1,\,N_1}, \Omega^{2,\,1}, \ldots, \Omega^{2,\,N_2}$), и применения к таким “парам” результатов анализа множеств из $Amin^{(3)}$. Подлежат рассмотрению три варианта: $X^{\mathrm{I}} \in \Omega^{1,\,\mu_1}$,

$X^{II} \in \Omega^{1,\mu_2}$; $X^I \in \Omega^{1,\mu}$, $X^{II} \in \Omega^{2,\nu}$; $X^I \in \Omega^{2,\nu_1}$, $X^{II} \in \Omega^{2,\nu_2}$; но два из них нет необходимости рассматривать.

Заметим, что теорема о ко-замкнутости объединения двух множеств, используемая вместе с другими определениями и доказанными утверждениями, позволяет конструировать весьма сложно устроенные ко-замкнутые множества.

В формулировке этой теоремы множества $\Omega^{1,\mu}$ и $\Omega^{2,\nu}$ можно определять, используя операцию покоординатной максимизации ($\Omega^{1,\mu} = \Pi F^{1,\mu} Hmax$; $\Omega^{2,\nu} = \cup F^{2,\nu} Hmax$). Тогда для $\Omega \in Amax \subset \subset Mmax$ достаточно выполнения одного из двух условий: система функций F^2, состоящая из неубывающих по невыделенным аргументам функций, согласована на множестве $H \in Mmax$; одна из систем функций F^1 или F^2 не возрастает по всем аргументам на множестве H.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Багриновский К.А. (1977): Основы согласования плановых решений. М.: Наука.

Багриновский К.А., Бусыгин В.П., Радченко В.В. (1978): О методах согласования отраслевых решений в системе моделей // *Экономика и мат. методы*. Т. XIV. Вып. 2.

Багриновский К.А., Бусыгин В.П. (1980): Математика плановых решений. М.: Наука.

Беленький В.З. (1967): Некоторые модели оптимального планирования, основанные на схеме межотраслевого баланса // *Экономика и мат. методы*. Т. III. Вып. 4.

Беленький В.З. (1968): О задачах математического программирования, обладающих минимальной точкой // *Доклады АН СССР*. Т. 183. № 1.

Бусыгин В.П. (1976): Абстрактный межотраслевой анализ. В кн.: "*Математические вопросы построения системы моделей*". Новосибирск: Наука, Сибирское отделение АН СССР.

Ершов Э.Б. (1962): Решение обобщенной задачи статического межотраслевого баланса. В сб.: "*Материалы к Конференции по опыту и перспективам применения математических методов и электронных вычислительных машин в планировании*". Новосибирск: СО АН СССР, Институт математики, Институт экономики.

Ершов Э.Б. (1963): Математические методы в статической модели межотраслевого баланса. Материалы Научного совещания по проблемам межотраслевого баланса. М.: Научно-исследовательский экономический институт при Госплане СССР.

Ершов Э.Б. (1965): Экономико-математические методы в статической модели межотраслевого баланса. В кн.: "*Методы планирования межотраслевых пропорций*". М.: Экономика.

Ершов Э.Б. (1967): Экономико-математические методы анализа модели межотраслевого баланса. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата экономических наук. М.: НИЭИ при Госплане СССР.

Ершов Э.Б. (2002): Теория клювов и межотраслевое моделирование. Препринт WP2/2 002/03. Серия WP2. Количественный анализ в экономике. М.: Государственный университет–Высшая школа экономики.

Математическая энциклопедия (1979): Математическая энциклопедия. Т. 2. М.: Советская энциклопедия.

Математическая энциклопедия (1984): Математическая энциклопедия. Т. 5. М.: Советская энциклопедия.

Arrow K.J. (1951): Alternative Proof of the Substitution Theorem for Leontief Models in the General Case. In: "*Activity Analysis of Production and Allocation. Cowles Commission Monograph № 13*". N.Y.: Wiley.

Georgescu-Roegan N. (1951): Some Properties of a Generalized Leontief Model. In: "*Activity Analysis of Production and Allocation. Cowles Commission Monograph № 13*". N.Y.: Wiley.

Koopmans T.C. (1951): Alternative Proof of the Substitution Theorem for Leontief Model in the Case of Three Industries. In: "*Activity Analysis of Production and Allocation. Cowles Commission Monograph №13*". N.Y.: Wiley.

Samuelson P.A. (1951): Abstract of a Theorem Concerning Substitutability in Open Leontief Models. In: "*Activity Analysis of Production and Allocation. Cowles Commission Monograph № 13*". N.Y.: Wiley.

Поступила в редакцию
13.06.2006 г.

The Theory of Beaks and Modelling

Ye. B. Yershov

We consider sets in finite-dimensional real space, which have points with minimal or maximal coordinates in this space, called mini- and maxi-beaks. Sufficient conditions of beaks existence are formulated and proved. The systems of inequalities, which specify such sets, consist of decreasing or increasing functions of all (but one) the arguments. The optimization problem with increasing and decreasing criteria within the beak-sets is identical to the problem of determination of the characteristic beaks. The concept of generalized beak of a set, which is based on the specified quasi-order structure, is introduced and the sufficient condition of its existence is examined in the paper. We consider the dependence of beak coordinates of the parameters, which specify the families of sets, and the relation of beaks and the solutions of the corresponding systems of equations. The general scheme of construction of the beak-sets, which are closed with regard to the introduced binary operations of coordinate-wise minimization and maximization (these could also be used for the specification of the corresponding sets), is proposed.