ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2007, том 43, № 1, с. 68–75

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВА ПАРЕТО В МОДЕЛИ ХЕДЖИРОВАНИЯ АКТИВА ОПЦИОНАМИ

© 2007 г. И. И. Гасанов, Ф. И. Ерешко

(Москва)

Рассматривается многокритериальная задача, которая возникает в операциях продажи актива при страховании (хеджировании) посредством опционов будущих доходов. Для широкого класса функций, описывающих зависимость цены опциона от цены исполнения, предложена эффективная процедура построения множества Парето для трех критериев, связанных с оценкой риска по методу VaR. Проводится анализ особенностей данного множества и дается графическое представление его проекции на одну из координатных плоскостей.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема управления рисками является одной из основных проблем в финансовой инженерии. Важное место среди финансовых инструментов, используемых для ее решения, занимают опционы. Опционы – это контракты, которые гарантируют своему покупателю право, но не обязательство что-либо предпринять. Чаще всего это право купить или продать определенное число единиц некоторого базового актива по оговоренной цене. Опционы имеют ограниченный срок действия. Если опцион не исполняется к концу своей “жизни”, он теряет силу. Опционы, которые могут быть исполнены в любой момент в течение заданного времени, называются американскими, а те, которые можно исполнить лишь по прошествии заранее фиксированного периода времени, – европейскими. В настоящей статье рассматриваются европейские опционы. Опционы делятся на два вида – колл и пут (call и put). Опционы колл гарантируют держателям право покупки некоторого числа единиц базового актива по цене исполнения (страйку) опциона, а опционы пут – право продать некоторое количество единиц базового актива по цене исполнения опциона. За такое право покупатель опциона платит определенную сумму, зависящую от страйка и срока исполнения опциона и называемую ценой или премией опциона.

Когда рынок опционов сформирован, то опционы могут быть привлекательны как инструмент спекуляции, но прежде всего они привлекательны как элемент страховочной стратегии (хеджирования). Опционы обеспечивают способ защиты от неблагоприятных изменений цен и в то же время оставляют возможность получить прибыль при их благоприятных изменениях. В данной статье исследуется один из вариантов такой страховочной стратегии.

Графики выплат, соответствующие опционам, несколько сложнее по форме, чем аналогичные графики для фьючерсных и форвардных контрактов. Опционы можно комбинировать многими способами, создавая богатый ассортимент разнообразных конструкций. Это является причиной значительного интереса к опционам со стороны финансовых инженеров (Маршалл, Бансал, 1998; Буренин, 2002а, 2002б).

Модели оценивания (расчета цен) опционов достаточно сложны. Большинство этих моделей разрабатывались как варианты известной модели Блэка–Шоулза. Математический аппарат, использующийся для оценивания опционов, изложен в (Маршалл, Бансал, 1998, с. 396; Marshall, 1989; Меньшиков, 1998; Первозванский, Первозванская, 1994).

На внутреннем рынке России в настоящее время имеются только единичные попытки построить сегменты, связанные с торговлей опционами. Однако для экспортеров сырьевых ресурсов очень важен выбор стратегии страхования поставок на внешний рынок. Этим и определяется актуальность предлагаемой ниже постановки задачи.

Принципиальное значение при управлении рисками имеет способ их измерения. Первоначально широкое распространение получил метод оценки, основанный на дисперсии (или стандартном отклонении). Однако в последнее время стал популярным метод, основанный на оценке вероятности достижения участником рынка некоторой заданной величины доходов – VaR (Агасандян, 2001).

В работах (Щукин, 1999; Мелокумов, Карпов, 2001) с использованием критерия VaR исследовались близкие по духу задачи хеджирования актива посредством опционов. Если в статье (Щукин, 1999) при фиксированных затратах на хеджирование максимизируется уровень будущего дохода, гарантированный с заданной обеспеченностью (вероятностью), то в статье (Мелокумов, Карпов, 2001), напротив, при заданных уровне дохода и уровне его обеспеченности минимизируются затраты на хеджирование. Все расчеты в обеих статьях опираются на формулу Блэка–Шоулза для цены опционов. Однако полученные в них результаты верны и в более общем случае, когда от функции цены требуется, чтобы выполнялись лишь некоторые достаточно естественные свойства, справедливые также и для функции Блэка–Шоулза. Настоящая работа объединяет и обобщает результаты статей (Щукин, 1999; Мелокумов, Карпов, 2001). В ней исследуется взаимная зависимость критериев, определяющих стратегию хеджирования, и строится множество Парето по этим критериям. При этом используется не какая-то конкретная модель оценивания опциона, а лишь некоторые общие для различных опционных моделей свойства функции цены опциона.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующую модель хеджирования. В начальный момент времени 0 имеется некоторый актив в количестве W с ценой S_0. Цена актива S_T в будущий момент времени T полагается случайной величиной с непрерывной функцией распределения $F_{S_T}(x)$. Будем предполагать, что функция $F_{S_T}(x)$ строго возрастает в промежутке $[0, \infty)$.

Владелец актива страхуется от нежелательной конъюнктуры цен в момент T, приобретая в момент 0 опционы на продажу данного актива со страйком (уровнем исполнения) X, ценой $P(X)$ и временем исполнения T. Если приобретены опционы со страйком X на продажу актива объемом W, т.е. израсходована денежная сумма $P(X)W$, это гарантирует, что в момент T весь актив будет продан по цене не меньшей, чем X. Если на такие же опционы потрачена сумма $QW < P(X)W$, это означает, что хеджирована лишь доля $h = Q/P(X)$ объема актива W. Будем предполагать, что $h \le 1$. Если $h > 1$, то владелец актива не ограничивается целями хеджирования, а идет на дополнительные расходы в надежде заработать на опционах при цене S_T меньшей, чем X. Для упрощения выкладок все дальнейшие рассуждения будем проводить для портфелей, состоящих из единицы базового актива и страхующих эту единицу опционов пут со страйком X в количестве $h \le 1$. Обозначим такой портфель через $R(X, h)$. Стоимость портфеля $R(X, h)$ в момент времени T будет равна $S_T + h\max[X - S_T; 0]$.

Определим функцию, которая выражает приведенную к моменту времени T сумму финансовых потоков, связанных с хеджированием актива, посредством портфеля $R(X, h)$:

$$\varphi(S_T, X, Q) = S_T + h\max[X - S_T;\ 0] - Q\mathrm{e}^{rT},$$

где e^{rT} – относительный доход за период T по безрисковым бумагам. Для заданного значения $\alpha \in$ $\in [0, 1]$ параметры Q и X однозначно определяют такой уровень V значений случайной величины φ, который обеспечен с вероятностью не меньшей, чем $1 - \alpha$, т.е.

$$P\{\varphi(S_T, X, Q) \ge V\} \ge 1 - \alpha. \tag{1}$$

Лицо, страхующее актив, заинтересовано в максимизации значения V, минимизации вероятности α и суммы Q. Варьируя α, Q и X, можно получать различные точки в пространстве показателей α, V, Q. Обозначим множество достижимых таким образом точек через Λ. Из рациональных соображений владельцу актива необходимо выбрать одну из недоминируемых (эффективных) точек из множества Λ. Для этого полезно иметь представление обо всей совокупности таких точек, т.е. о границе Парето G множества достижимости Λ.

Обозначим через S^α α-квантиль распределения F_{S_T}: $F_{S_T}(S^\alpha) = \alpha$. При $h \le 1$ функция $\varphi(S_T, X, Q)$ является неубывающей по S_T. Поэтому для значений α, V, Q, X таких, что $Q \le P(X)$, неравенство (1) выполняется в том и только в том случае, если $\varphi(S^\alpha, X, Q) \ge V$. В пространстве показателей S^α, V, Q множеству Λ соответствует множество достижимых точек Π. Это точки (S^α, V, Q), для которых при некотором страйке X, таком что $Q \le P(X)$, справедливо неравенство $\varphi(S^\alpha, X, Q) \ge V$.

Так как величины α и S^α находятся во взаимно-однозначной монотонной зависимости, точка (α, V, Q) из Λ будет недоминируемой тогда и только тогда, когда недоминируема точка (S^α, V, Q) из Π. Далее будем решать задачу исследования границы Парето Γ множества Π в пространстве критериев S^α, V, Q. Переход от критерия α к критерию S^α дает возможность абстрагироваться от конкретной формы распределения F_{S_T}. В то же время знание множества Γ позволяет строить множество G для различных распределений F_{S_T}.

2. УСЛОВИЯ, НАЛАГАЕМЫЕ НА ФУНКЦИЮ $P(X)$. ФУНКЦИЯ $\beta(X)$

Далее везде рассматривается множество значений $X \ge 0$. Обозначим через $\beta(X)$ разность $X - P(X)e^{rT}$. Величина $\beta(X)$ показывает безусловный гарантированный (с вероятностью 1, т.е. при $\alpha = 0$) уровень значений случайной величины $\varphi(S_T, X, Q)$ для портфеля $R(X, 1)$, т.е. при полном хеджировании актива опционом со страйком X.

Будем предполагать, что функция $P(X)$ удовлетворяет следующим требованиям.

Условие 1. $P(X)$ – непрерывно дифференцируемая, строго возрастающая, строго выпуклая функция, $P(0) = 0$.

Условие 2. $\lim\limits_{X \to \infty} \beta(X) = S_0 e^{rT}$.

Заметим, что эти условия носят достаточно общий и естественный характер. Если отказаться от непрерывности, строгой монотонности и выпуклости функции $P(X)$, то легко строятся портфели опционов с неотрицательной платежной функцией и отрицательной стоимостью, что неизбежно приводит к арбитражу. Также к арбитражу приводит предположение, что $P(0) \ne 0$. Условие 1 лишь усилено требованием строгости для выпуклости функции $P(X)$ и требованием ее непрерывной дифференцируемости.

Из предположения о невозможности арбитража вытекает условие паритета пут/колл: $C(X) - P(X) = S_0 - Xe^{-rT}$, где $C(X)$ – цена колл-опциона. Так как платежная функция колл-опциона стремится к 0 при $X \longrightarrow \infty$, для модели цены опциона естественно предполагать, что $C(X) \longrightarrow 0$ при $X \longrightarrow \infty$. Тогда условие 2 оказывается непосредственным следствием паритета пут/колл.

3. СЛЕДСТВИЯ, ВЫТЕКАЮЩИЕ ИЗ УСЛОВИЙ 1, 2. ФУНКЦИИ $Z(X)$, $X_0(V)$

Следствие 1. $\beta(X)$ является строго вогнутой, строго возрастающей функцией.

Доказательство. Так как $\beta''(X) = -P''(X)e^{rT} < 0$ для любого $X > 0$, то функция $\beta(X)$ строго вогнута в промежутке $[0, \infty)$. Поскольку $\beta(0) = 0$, а $\lim\limits_{X \to \infty} \beta(X) = S_0 e^{rT} > 0$, то вогнутость функции $\beta(X)$ обусловливает ее строгое возрастание в промежутке $[0, \infty)$.

Следствие 2. $\lim\limits_{X \to \infty} P'(X) = e^{-rT}$.

Доказательство. Поскольку значение вогнутой функции $\beta(X)$ стремится на бесконечности к константе, то ее производная $1 - P'(X)e^{rT}$ стремится к нулю. Отсюда следует, что $P'(X) \xrightarrow[X \to \infty]{} e^{-rT}$.

В дальнейшем важную роль будет играть функция $Z(X) = X - P(X)/P'(X)$.

Следствие 3. Функция $Z(X)$ монотонно возрастает по X, $\lim\limits_{X \to 0^+} Z(X) \le 0$ и $\lim\limits_{X \to \infty} Z(X) = S_0 e^{rT}$.

Доказательство. Дифференцируя функцию Z, получаем, что для любого $X > 0$

$$Z'(X) = 1 - \frac{P'(X)^2 - P(X)P''(X)}{P'(X)^2} = \frac{P(X)P''(X)}{P'(X)^2} > 0.$$

Следовательно, $Z(X)$ – строго возрастающая функция,

$$\lim_{X \to 0} Z(X) \le \lim_{X \to 0} X = 0.$$

Согласно условию 1 и следствию 2 имеем, что $P'(X) < e^{-rT}\ \forall X > 0$, поэтому $Z(X) < S_0 e^{rT}\ \forall X > 0$. Докажем, что для любого $b < S_0 e^{rT}$ найдется такой X, что $Z(X) > b$. В силу монотонности функции $Z(X)$ этого будет достаточно для доказательства $\lim\limits_{X \to \infty} Z(X) = S_0 e^{rT}$.

Пусть $b < S_0 e^{rT}$. Тогда функция $\Psi(X) = P(X)/(X - P(X) - b) \xrightarrow[X \to \infty]{} \infty$. Это означает, что существуют значения X, для которых $\Psi'(X) = (P'(X)(X - b) - P(X))/(X - P(X) - b)^2 > 0$. Но тогда для таких X: $P'(X)(X - b) - P(X) > 0$ или $X - P(X)/P'(X) = Z(X) > b$.

Если $P'(0) = 0$, то при $X = 0$ значение функции $Z(X)$ оказывается неопределенным. В этом случае положим $Z(0) = \lim\limits_{X \to 0^+} Z(X)$.

Обозначим через $X_0(V)$ такой минимальный страйк, при котором полное ($h = 1$) хеджирование актива опционом с этим страйком обеспечивает безусловный уровень V значений случайной величины $\varphi(S_T, X, Q)$, иначе говоря, $\beta(X_0(V)) = V$. Функция $X_0(V)$ является обратной к $\beta(X)$ в промежутке значений $0 \le \beta(X) < S_0 e^{rT}$.

Из следствия 1 и условия 1 вытекают следующие утверждения.

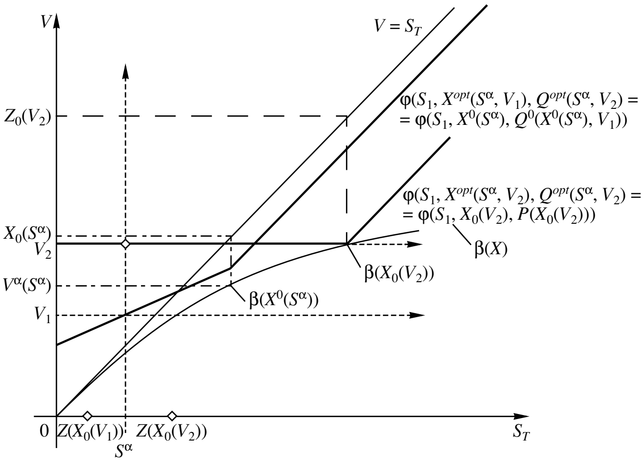

Рис. 1.

Следствие 4. $X_0(V)$ – монотонно возрастающая выпуклая функция, определенная в диапазоне значений $[0, S_0 e^{rT})$, $X_0(0)$, $X_0(V) > V$ для всех $V > 0$, $\lim\limits_{V \to S_0 e^{rT}} X_0(V) = \infty$.

Следствие 5. Функция $Z(X_0(V))$, $0 \le V \le S_0 e^{rT}$, монотонно возрастает по V, $Z(X_0(V)) < V$ для любого $V > 0$, $Z(X_0(0)) \le 0$, $\lim\limits_{V \to S_0 e^{rT}} Z(X_0(V)) = S_0 e^{rT}$.

Доказательство этого утверждения непосредственно вытекает из следствий 2–4.

4. ЗАДАЧА МИНИМИЗАЦИИ РАСХОДОВ

Рассмотрим вспомогательную задачу. Зафиксируем некоторые значения S^α и V и минимизируем Q (сравни с (Мелокумов, Карпов, 2001)). Формально задача запишется следующим образом.

Задача 1. Найти $Q^{opt} = \min Q$ при ограничениях

$$\varphi(S^\alpha, X, Q) \ge V, \tag{2}$$

$$h \le 1.$$

Ограничениям задачи 1 соответствует множество достижимости Π, а искомая граница Парето Γ принадлежит множеству таких троек (S^α, V, Q), в которых значения Q являются решениями этой задачи. Основные функции и константы, используемые в дальнейших рассуждениях, отражены на рис. 1.

Решение. Если $V \le S^\alpha$, то $Q^{opt}(S^\alpha, V) = 0$. Пусть $V > S^\alpha$. Для таких значений V при $X < V$ ограничения задачи 1 заведомо не выполняются. Для $X \ge V$

$$\varphi(S^\alpha, X, Q) = S^\alpha + Q\frac{X - P(X)e^{rT} - S^\alpha}{P(X)},$$

и неравенство (2) можно переписать:

$$S^\alpha + Q\frac{X - P(X)e^{rT} - S^\alpha}{P(X)} \ge V. \tag{3}$$

Так как $Q \le P(X)$, то неравенство (3) может выполняться только при таких X и V, для которых $X - P(X)e^{rT} \ge V$. Поскольку для любого $X > 0$, в силу условия 2 и следствия 1, $X - P(X)e^{rT} < S_0 e^{rT}$, то задача 1 имеет решение только для $V < S_0 e^{rT}$, при этом пары (X, Q), удовлетворяющие ограничениям задачи, существуют только при $X \ge X_0(V)$.

При фиксированном значении $X \ge X_0(V)$ минимальное значение Q, удовлетворяющее неравенству (3), достигается тогда, когда неравенство (3) трансформируется в равенство, т.е. при

$$Q^0(X) = (V - S^\alpha)\frac{P(X)}{X - P(X)e^{rT} - S^\alpha}. \tag{4}$$

Заметим, что $Q^0(X_0(V)) = P(X_0(V))$. Так как $S^\alpha < V < S_0e^{rT}$, то в силу условия 2 $Q^0(X) \xrightarrow[X \to \infty]{} +\infty$. Поэтому в силу непрерывности функции $Q^0(X)$ найдется точка X^{opt}, в которой достигается $\min\limits_{X \in [X_0(V), \infty)} Q^0(X)$. Выпишем производную функции $Q^0(X)$:

$$\frac{dQ^0(X)}{dX} = \frac{(V - S^\alpha)}{(X - P(X)e^{rT} - S^\alpha)^2}(P'(X)X - P'(X)S^\alpha - P(X)). \tag{5}$$

Из формулы (5) следует, что знак этой производной определяется знаком многочлена $P'(X)X - P'(X)S^\alpha - P(X)$ или, что то же самое, знаком выражения $Z(X) - S^\alpha$.

Функция $Z(X)$ монотонно возрастает внутри промежутка $[X_0(V), \infty)$ от значения $Z(X_0(V))$ до S_0e^{rT} (следствие 3). Поэтому, если $S^\alpha \le Z(X_0(V))$, то $dQ^0(X)/dX \ge 0$ для любого $X \ge X_0(V)$, и, следовательно, $X^{opt} = X_0(V)$, $Q^{opt} = P(X_0)$. Если же $Z(X_0(V)) < S^\alpha$, то $\left.\frac{dQ^0(X)}{dX}\right|_{X = X_0} < 0$ и значение X^{opt} лежит внутри промежутка $[X_0(V), \infty)$. В некоторой точке монотонная функция $Z(X)$ достигает величины S^α, и решением задачи 1 является пара $(X^0, Q^0(X^0))$. В этом случае значение $X^{opt} = X^0$ находится из решения уравнения

$$Z(X) \stackrel{def}{=} X - P(X)/P'(X) = S^\alpha. \tag{6}$$

Значение X^0 ввиду монотонности функции $Z(X)$ может быть найдено посредством простой дихотомии.

Заметим, что в тех случаях, когда $S^\alpha \le Z(X_0(V))$, оптимальное значение X не зависит от S^α, а только от V. А в тех случаях, когда оптимум находится согласно уравнению (6), X^{opt}, напротив, не зависит от V, а только от S^α.

5. АНАЛИЗ ЗАВИСИМОСТИ Q^{opt} ОТ ЗНАЧЕНИЙ V И S^α

Вполне очевидно, что $Q^{opt}(S^\alpha, V)$ – непрерывная по каждой из переменных функция, не убывающая по V и не возрастающая по S^α. Из этого следует непрерывность функции $Q^{opt}(S^\alpha, V)$ по совокупности своих переменных.

Зафиксируем S^α и исследуем, как Q^{opt} зависит от V. При $V \le S^\alpha$ очевидно, что $Q^{opt} = 0$ при любом значении S^α. Если $V > S^\alpha$, то, как показано в предыдущем разделе, задача 1 имеет решение тогда и только тогда, когда $V < S_0e^{rT}$.

Рассмотрим V в $(S^\alpha, S_0e^{rT}]$. Функция $Z(X_0(V))$ монотонно возрастает по V, принимая значения в промежутке от $Z(X_0(S^\alpha)) \le S^\alpha$ до S_0e^{rT} (следствие 5). Следовательно, у уравнения $Z(X_0(V) = S^\alpha$ существует единственный корень, который обозначим через $V^\alpha(S^\alpha)$. При этом $V^\alpha(S^\alpha) \ge S^\alpha$, и равенство возможно только при $S^\alpha = 0$.

Заметим, что согласно уравнению (6) $X_0(V) = X^0(S^\alpha)$. В силу следствия 5 V^α является монотонно возрастающей функцией от S^α. Как следует из результатов предыдущего раздела, в промежутке значений $V : (S^\alpha, V^\alpha(S^\alpha))$ – оптимальное значение $X > S^\alpha$ определяется из уравнения (6), т.е. не зависит от V и равно $X^0(S^\alpha)$. Значение $Q^{opt}(S^\alpha, V)$ согласно формуле (4) возрастает в этом промежутке пропорционально разности $V - S^\alpha$ и изменяется от 0 до $P(X^0(S^\alpha))$.

В промежутке значений $V : [V^\alpha(S^\alpha), S_0e^{rT}) - X^{opt} = X^0(V)$, а $Q^{opt} = P(X_0(V))$. Так как $X_0(V)$ является строго возрастающей выпуклой функцией (следствие 4), то цена $P(X_0(V))$, а с нею и $Q^{opt}(S^\alpha, V)$ тоже являются выпуклыми строго возрастающими по V функциями. Значения $Q^{opt}(S^\alpha, V)$ изменяются от $P(X^0(S^\alpha))$ до ∞.

Теперь зафиксируем значение $V < S_0e^{rT}$ и посмотрим, как Q^{opt} зависит от S^α. Если $S^\alpha \ge V$, то $Q^{opt} = 0$. Рассмотрим S^α в диапазоне от 0 до V. При $V = S^\alpha = 0$, $Q^{opt} = 0$. Если $V > 0$, то $Z(X_0(V)) < V$ (следствие 5). На отрезке $S^\alpha : [0, Z(X_0(V))]$ имеем $X^{opt} = X_0(V)$, $Q^{opt}(S^\alpha, V) = P(X_0(V))$.

В диапазоне $S^\alpha : (Z(X_0(V)), V)$ – оптимальное для любого фиксированного $X \geq X_0(V)$ значение

$$Q^0(X) = (V - S^\alpha)\frac{P(X)}{X - P(X)e^{rT} - S^\alpha} = P(X)\left(1 - \frac{X - P(X)e^{rT} - V}{X - P(X)e^{rT} - S^\alpha}\right).$$

Отсюда следует, что при возрастании S^α в диапазоне значений $(Z(X_0(V)), V)$ величина $Q^0(X)$ убывает, а значит, убывает и $Q^{otp}(S^\alpha, V) = \min\{Q_0(X)|X - P(X) \geq V\}$. При этом значения $Q^{opt}(S^\alpha, V)$ изменяются от $P(X_0(V))$ до 0.

Отметим, что функции $V(S^\alpha) = V^\alpha(S^\alpha)$ и $S^\alpha(V) = Z(X_0(V))$ являются взаимно обратными, т.е. $S^\alpha(V(S^\alpha)) = Z(X_0(V^\alpha(S^\alpha))) = S^\alpha$ и $Q^{opt}(S^\alpha(V), V) = P(X^0(S^\alpha(V))) = P(X_0(V^\alpha(S^\alpha))) = Q^{opt}(S^\alpha, V^\alpha(S^\alpha))$

6. СТРУКТУРА МНОЖЕСТВА ПАРЕТО

Полученные результаты позволяют построить для задачи хеджирования множество точек Парето в пространстве критериев S^α, V, Q. Определим:

$$\Gamma_1 = \{(S^\alpha, V, Q) | S^\alpha \in (0, S_0e^{rT}), V \in (S^\alpha, V^\alpha(S^\alpha)), Q = Q^{opt}(S^\alpha, V)\},$$

$$\Gamma_2 = \{(0, V, Q) | 0 \leq V < S_0e^{rT}, Q = P(X_0(V))\},$$

$$\Gamma_3 = \{(S^\alpha, S^\alpha, 0) | S^\alpha > 0\}$$

и покажем, что искомым множеством Парето является $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.

Исследуем множество Γ_1. В предыдущем разделе было установлено, что для любого $S^\alpha < S_0e^{rT}$: $V^\alpha(S^\alpha) \geq S^\alpha$, поэтому при любом $S^\alpha \in (0, S_0e^{rT})$ множество точек $(S^\alpha, V, Q^{opt}(S^\alpha, V)) \in \Gamma_1$ непусто. Как было показано выше, для любых двух точек $(S_1^\alpha, V_1, Q^{opt}(S_1^\alpha, V_1))$, $(S_1^\alpha, V_2, Q^{opt}(S_1^\alpha, V_2))$ из Γ_1 таких, что $V_1 < V_2$, выполнятся неравенство $Q^{opt}(S_1^\alpha, V_1) < Q^{opt}(S_1^\alpha, V_2)$. В то же время для любых двух точек $(S_1^\alpha, V_1, Q^{opt}(S_1^\alpha, V_1))$, $(S_2^\alpha, V_1, Q^{opt}(S_1^\alpha, V_2))$ из Γ_1 таких, что $S_1^\alpha > S_2^\alpha$, выполняется неравенство $Q^{opt}(S_1^\alpha, V_1) < Q^{opt}(S_2^\alpha, V_1)$. Отсюда вытекает, что все точки из Γ_1 взаимно недоминируемы.

Обратимся к множеству Γ_2. Выше было показано, что функция $Q = Q^{opt}(S^\alpha, V)$ является монотонно возрастающей по V в промежутке $[S^\alpha, S_0e^{rT}]$, в данном случае в промежутке $[0, S_0e^{rT}]$. Поэтому любые две точки из Γ_2 взаимно недоминируемы.

Для множества Γ_3 взаимная недоминируемость его точек, очевидно, определяется равенством $V = S^\alpha$.

Теперь рассмотрим все множество Γ целиком и убедимся в попарной недоминируемости точек из разных составляющих его множеств.

Точки из Γ_2 не доминируются точками из Γ_1 и Γ_3, поскольку только для этих точек $S^\alpha = 0$. Точки из Γ_3 не доминируются точками из Γ_1 и Γ_2, поскольку только для этих точек $Q = 0$. Исключение составляет только точка $(0, 0, 0) \in \Gamma_2$, однако в этой точке значение $V = 0$ меньше, чем для всех точек из Γ_3.

Никакая точка (S_1^α, V_1, Q_1) из Γ_1 не доминируется точками из Γ_3, поскольку для любой точки $(S_2^\alpha, V_2, Q_2) \in \Gamma_3$ либо $V_2 < V_1$, либо $S_2^\alpha > S_1^\alpha$. Наконец, для любых точек $(S_1^\alpha, V_1, Q(V_1, S_1^\alpha)) \in \Gamma_1$ и $(0, V_2, P(X_0(V_2))) \in \Gamma_2$ таких, что $V_1 \leq V_2$, выполняются соотношения $P(X_0(V_2)) = Q(V_2, 0) \geq Q(V_1, 0) = P(X_0(V_1)) > Q(V_1, S_1^\alpha)$. Следовательно, точка $(0, V_2, P(X_0(V_2)))$ не доминирует точку $(S_1^\alpha, V_1, Q(V_1, S_1^\alpha))$.

Теперь обратимся к множеству, дополнительному к Γ. Если $V > S^\alpha$ и при этом $V \geq S_0e^{rT}$, то для таких V, S^α задача 1 не имеет решения, и, следовательно, точек Парето (S^α, V, Q) с такими значениями критериев V, S^α не существует. В том случае, когда $S^\alpha > 0$ и $V^\alpha(S^\alpha) \leq V < S_0e^{rT}$, точка $(S^\alpha, V, Q^{opt}(S^\alpha, V)) = (S^\alpha, V, P, (X_0(V)))$ доминируется точкой $(0, V, P(X_0(V)) \in \Gamma_2$. Наконец, любая допустимая точка $(S^\alpha, V, Q^{opt}(S^\alpha, V))$ такая, что $V < S^\alpha$, доминируется точкой $(S^\alpha, S^\alpha, 0) \in \Gamma_3$.

Это означает, что недоминируемыми являются те и только те точки допустимого множества, которые принадлежат Γ.

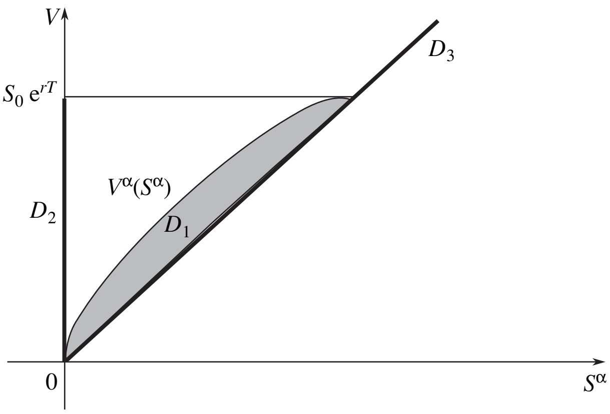

Рис. 2.

Обозначим через D_1, D_2, D_3 проекции множеств Γ_1, Γ_2, Γ_3, соответственно, на плоскость критериев S^α и V. Множество D_1 представляет собой область, ограниченную кривой $L = \{(S^\alpha, V^\alpha(S^\alpha)) | 0 < S^\alpha < S_0\mathrm{e}^{rT}\}$ и двумя лучами, на которых расположены множества D_2 и D_3 (рис. 2). При стремлении точек $(S^\alpha, V) \in D_1$ к какой-либо точке (S_0^α, V_0) на границе области D_1 значения Q^{opt} стремятся к значению $Q^{opt}(S_0^\alpha, V_0)$. Непрерывность нарушается только в точке $(S_0\mathrm{e}^{rT}, S_0\mathrm{e}^{rT})$. Из следствий 4 и 5 вытекает, что $V^\alpha(S^\alpha)$ монотонно возрастает с ростом S^α и $V^\alpha(S^\alpha) \xrightarrow[S^\alpha \to S_0\mathrm{e}^{rT}]{} S_0\mathrm{e}^{rT}$. Как показано в разд. 5, $Q^{opt}(V^\alpha(S^\alpha), S^\alpha) = P(X_0(V^\alpha(S^\alpha)))$. Эта величина монотонно возрастает с ростом S^α и при $V^\alpha(S^\alpha) \longrightarrow S_0\mathrm{e}^{rT}$ значение $P(X_0(V^\alpha(S^\alpha))) \longrightarrow \infty$. В то же время $Q^{opt}(S_0\mathrm{e}^{rT}, S_0\mathrm{e}^{rT}) = 0$. Отсюда следует, что в любой окрестности точки $(S_0\mathrm{e}^{rT}, S_0\mathrm{e}^{rT})$ величина Q^{opt} принимает значения от 0 до ∞.

Изученная в разд. 5 зависимость значений Q^{opt} от S^α и V, в частности их непрерывность и монотонность, позволяет строить все множество Парето или его часть, интересующую исследователя, с любой заданной точностью по значениям Q^{opt} на узлах сетки, наложенной на множества D_1 и D_2.

7. СЛУЧАЙ МОДЕЛИ БЛЭКА–ШОУЛЗА. ЗАДАЧИ МАКСИМИЗАЦИИ V И МИНИМИЗАЦИИ S^α

В разд. 4 была рассмотрена задача определения оптимального значения критерия Q при фиксированных значениях критериев V и S^α. Данная задача, исследованная также в (Мелокумов, Карпов, 2001), может представлять самостоятельный интерес. Как и две другие, в которых оптимизируются критерии V и S^α при фиксированных значениях остальных критериев. Эти задачи будут рассмотрены в настоящем разделе.

Формула Блэка–Шоулза для цены опциона пут может быть записана в следующем виде:

$$P(X) = X\mathrm{e}^{-rT}N(-d_2) - S_0N(-d_1), \tag{7}$$

где $d_1 = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{T}}(\ln S_0 - \ln X + (r + 0.5\sigma^2)T)$, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$; σ – волатильность цены актива; $N(\cdot)$ – функция стандартного нормального распределения.

Для $X = 0$ значение $P(X)$ в формуле (7) не определено, однако при $X \longrightarrow \infty$ это значение также стремится к нулю. Положим по непрерывности $P(0) = 0$. Из формулы (7) непосредственно вытекает справедливость для функции Блэка–Шоулза условия 1 из разд. 2. Как известно, в модели Блэка–Шоулза цена колл-опциона $C(X) \longrightarrow 0$ при $X \longrightarrow \infty$, и выполняется свойство паритета пут/колл. Отсюда для функции Блэка–Шоулза следует справедливость условия 2. Следовательно, к модели Блэка–Шоулза применимы все результаты, полученные выше. Из формулы (7) следует, что

$$P'_X = N(-d_2)\mathrm{e}^{-rT}, \tag{8}$$

$$P'_X X - P = S_0N(-d_1). \tag{9}$$

Подставляя (8), (9) в формулу (6), получаем

$$Z(X) = S_0\mathrm{e}^{rT}N(-d_1(X))/N(-d_2(X)). \tag{10}$$

Из равенств (6) и (10) вытекает следующее уравнение для $X^0(S^\alpha)$:

$$S^\alpha = S_0\mathrm{e}^{rT}N(-d_1(X^0))/N(-d_2(X^0)). \tag{11}$$

Задача 2. Поставим задачу максимизировать уровень платежей V при фиксированных значениях S^α и Q (сравни с (Щукин, 1999)). Задача запишется следующим образом: найти $V^{opt} = \max\limits_X \varphi(S^\alpha, X, Q)$ при условии $h \le 1$.

Решение. По существу, решение задачи содержится в разд. 4, 5. Поскольку $Q^{opt}(V, S^\alpha)$ является строго монотонной функцией по V, то искомое V^{opt} находится как корень уравнения $Q^{opt}(V, S^\alpha) = Q$.

Если $Q^{opt}(V^\alpha(S^\alpha), S^\alpha) > Q$, то $V^{opt} < V^\alpha(S^\alpha)$, и $X^{opt} = X^0(S^\alpha)$ находится из уравнения (6) (или из уравнения (11) в случае формулы Блэка–Шоулза). Формула для значения V^{opt} получается преобразованием равенства (4):

$$V^{opt} = S^\alpha + \frac{Q}{P(X^0(S^\alpha))}(X^0(S^\alpha) - P(X^0(S^\alpha))e^{rT} - S^\alpha).$$

Если $Q^{opt}(S^\alpha, V^\alpha(S^\alpha)) \le Q$, то $V^{opt} \ge V^\alpha(S^\alpha)$, и значение V^{opt} определяется из уравнения $P(X_0(V)) = Q$.

Задача 3. Зафиксируем теперь V и Q и поставим задачу минимизировать величину S^α. Задача запишется следующим образом: найти $S^{opt} = \min\limits_X S^\alpha$ при ограничениях $\varphi(S^\alpha, X, Q) \ge V$, $h \le 1$.

Решение. Как и в задаче 2, решение опирается на результаты разд. 4, 5. Непрерывная функция $Q^{opt}(S^\alpha, V)$ равна $P(X_0(V))$ для $S^\alpha \in [0, Z(X_0(V))]$ и монотонно убывает по S^α в промежутке значений $S^\alpha : (Z(X_0(V)), V]$ от величины $P(X_0(V))$ до 0.

Если $Q \ge P(X_0(V))$, то в силу условия 2 для такого значения X_Q, что $P(X_Q) = Q$, выполняется неравенство $\varphi(0, X_Q, P(X_Q)) = X_Q - Qe^{rT} > X_0(V) - P(X_0(V))e^{rT} = V$. Поэтому значение S^{opt} в этом случае равно 0.

Если $Q < P(X_0(V))$, то величина S^{opt} находится как корень уравнения $Q^{opt}(S^\alpha, V) = Q$. Этот корень находится посредством дихотомического поиска с использованием уравнений (6) (для формулы Блэка–Шоулза (11)) и (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Агасандян Г.А. (2001): Финансовая инженерия и критерий допустимых потерь VaR. М.: ВЦ РАН.

Буренин А.Н. (2002а): Рынок ценных бумаг и производных финансовых инструментов. М.: НТО им. акад. С.И. Вавилова.

Буренин А.Н. (2002б): Фьючерсные, форвардные и опционные рынки. М.: НТО им. академика С.И. Вавилова.

Маршалл Дж.Ф., Бансал В.К. (1998): Финансовая инженерия. М.: ИНФРА-М.

Мелокумов Е.В., Карпов А.Е. (2001): Принятие решений при хеджировании опционами // *Валютный спекулянт*. № 3 (17).

Меньшиков И.С. (1998): Финансовый анализ ценных бумаг. Курс лекций. М.: Фин. и стат.

Первозванский А.А., Первозванская Т.Н. (1994): Финансовый рынок: расчет и риск. М.: ИНФРА-М.

Щукин Д. (1999): Минимизация риска портфеля при хеджировании опционами // *Рынок ценных бумаг*. № 17 (152).

Marshall J.F. (1989): Futures and Option Contracting: Theory and Practice. Cincinnati, OH: South-Western.

Поступила в редакцию
26.06.2003 г.

Pareto Set Construction for the Model of Hedging an Asset by the Options

I. I. Gassanov, F. I. Yerezhko

The multiple-criteria problem, which arises for the insuring (hedging) future incomes in the sale operations of some asset by means of options, is considered. The effective procedure of the Pareto set finding for three criteria concerning with the risk estimation by the VaR-method is offered for a wide class of functions. The analysis of Pareto set features is fulfilled. The graphic representation of the Pareto-set projection on one of a coordinate surfacer is given.