ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2007, том 43, № 1, с. 87–96

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

ФРАКТАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЯ И ДИНАМИКА ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

 И. К. Коханенко

(Ростов-на-Дону)

Изучаются возможности использования фрактальной математики для оценки трендоустойчивости (персистентности) экономических систем. Доказывается достаточное условие персистентности фракталов, выводится соотношение для определения времени цикла персистентности. Обосновывается связь фрактальной топологии систем с их динамикой. Описывается применение полученных теоретических результатов к анализу бюджета.

ВВЕДЕНИЕ

Экономическая динамика во времена реформ, когда преобразования сопровождаются спадом и ростом производства, цен, напряжений в социальной сфере и т.п., актуализирует задачу оценки стабильности, устойчивости тенденций, характера изменений и их продолжительности. Эти задачи в связи с неразработанностью конструктивного формального аппарата, как правило, решаются на содержательном или феноменологическом уровнях; в этом отношении достаточно интересен принцип максимального согласования, изложенный в (Клейнер, Смоляк, 2000). Принцип ориентирует на наиболее полное использование имеющейся информации для получения решений с приемлемой адекватностью. В литературе можно найти лишь идеи или подходы к решению подобных задач. Между тем сложность решения состоит в выделении и идентификации системообразующих параметров из располагаемой информации. Для многих сложных систем такую возможность, как показано в (Коханенко, 2003), предоставляют фракталы.

Многие нелинейные динамические системы, адекватно описывающие явления в ряде задач экономики, психологии, социологии, являются фрактальными. Такие системы самоподобны и поведение их автомодельно. Свидетельством тому являются, например, фрактальные фабрики (Warnecke, 1993), фрактальные структуры на рынках капитала (Peters, 1994), модели эластичности и производительности. Образное утверждение работы (Клейнер, 2003) “полноценное, целостное и устойчиво работающее предприятие представляет собой в определенном смысле микромодель государства…” может рассматриваться как гипотеза институциональной фрактальности, которая содержится и в идее конгруэнтности норм работы (Олейник, 2000).

Кроме того, поведение фрактальных систем отличает случайность в локальном и детерминированность в глобальном (Peters, 1993), т.е. для такого поведения характерно взаимодействие порядка со случайностью. Подобное взаимодействие иногда трактуют как синтез упорядоченной структуры (порядка) комбинацией случаев. При этом порядок может проявляться в наличии некоторых тенденций поведения; таких, например, как персистентность (Peters, 1993; Кроновер, 2000), когда поведение системы, имея тренд на некотором промежутке времени, вероятнее всего, сохранит его и в последующем, демонстрируя эффект долговременной памяти. Персистентность, трактуемая как сохранение тенденции, тренда, связана с другой особенностью – с нестрого периодической цикличностью поведения (своеобразная спираль развития) систем, которая объясняется динамикой памяти системы, случайно работающей по правилу джокера (Малинецкий, 2000); система иногда попадает в область джокера. Изучение свойств персистентности и цикличности нелинейных динамических систем в свою очередь носит феноменологический характер. Между тем их формальное объяснение позволит глубже понимать, а в ряде случаев количественно предсказывать характер, оценивать параметры эволюции нелинейных динамических систем и формировать корректирующие управляющие воздействия. Поскольку подобная задача в экономике достаточно злободневна, в статье обосновывается вариант такого объяснения на основе результатов (Коханенко, 2003) применительно к экономическим системам.

1. МОДЕЛЬ ГЛОБАЛЬНОГО ПОРЯДКА И ЛОКАЛЬНОГО ШУМА В ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Описание состояния многих экономических агентов может быть сведено к представлению их как множество кластеров (групп), каждый из которых включает определенное число элементов. Например, бюджет, в расходной или доходной части, есть совокупность приоритетных групп ассигнований, состоящих из элементов, акцентированных по некоторому признаку и на своем уровне опять объединяющих определенное число компонент. Или экономика, которая производит множество акцентированных потребительских благ в соответствующих количествах и т.д. Аналогичных моделей в экономике много. Нельзя не заметить в них свойство самоподобия и случайный характер числа акцентированных кластеров, элементов, компонент. Поэтому представляется рациональной следующая фрактальная модель поведения экономической системы.

Пусть плотность распределения f числа акцентированных элементов I сложной системы на текущий момент времени описывается уравнением Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК): $\partial f/\partial t = -\partial(A_1 f)/\partial I + 0.5\partial^2(B_1 f)/\partial I^2$. В (Коханенко, 2003) показано, что если коэффициенты $A_1(I)$, $B_1(I)$ уравнения ФПК являются дважды дифференцируемыми по I функциями и справедливы предположения о наличии у модели свойств самоподобия, масштабной инвариантности, неполной автомодельности, то уравнение приводится к линейному уравнению вида:

$$\partial f/\partial t = a_1 f, \tag{1}$$

где a_1 – некоторая функция от I. Если предположить, что в системе имеются структурные компоненты (кластеры), включающие подмножества элементов, то можно ожидать проявления свойств самоподобия, масштабной инвариантности, неполной автомодельности и в пространстве кластеров. Следовательно, по аналогии с (1) уравнение ФПК для относительного числа n/N акцентированных по некоторому признаку кластеров можно записать в виде:

$$\partial n/\partial t = a_2 n. \tag{2}$$

И, как показано в (Коханенко, 2003), преобразование двух указанных уравнений ФПК путем замены времени как независимой переменной на переменную состояния n приводит к фракталу вида:

$$f = cn^d, \quad d = -(\alpha + 1), \tag{3}$$

где α – фрактальная размерность.

Классическим вариантом анализа модели ФПК является нахождение стационарного решения, т.е. случай $\partial f/\partial t = 0$, $\partial n/\partial t = 0$. Часто этот вариант приводит к нормальному закону распределения (например, при постоянных A_i и B_i), закону Пуассона и др. Рассматриваемый здесь вариант (1), (2) путем приравнивания правых частей соответствующих уравнений ФПК сводится к системе:

$$a_1 f = -\partial(A_1 f)/\partial I + 0.5\partial^2(B_1 f)/\partial I^2, \quad a_2 n = -\partial(A_2 n)/\partial I + 0.5\partial^2(B_2 n)/\partial I^2. \tag{4}$$

Решение этой системы характеризует распределение f числа акцентов I в системе в целом и распределение n числа акцентов I в кластерах. Уравнения (4) в ряде важных для практики случаев имеют аналитические решения. Например, при дивергентной форме уравнений ФПК, к которой во многих случаях их можно преобразовать, и при постоянных коэффициентах трения и диффузии решение первого уравнения (4) имеет известный достаточно простой вид:

$$f = c_1 \exp(s_1 I) + c_2 \exp(s_2 I), \quad s_1 = (-2B_1 a_2)^{0.5}/B_1, \quad s_2 = -s_1,$$

где c_1 и c_2 определяются краевыми условиями. Отсюда следует, что у систем с $B_1 a_2 < 0$ решение носит колебательный характер.

Теперь, после возвращения к первоначальному виду уравнений ФПК, получаются две модели поведения сложной системы. Первая – вида (4) – соответствует приравниванию правых частей исходных уравнений ФПК и правых частей уравнений (1), (2). При этом получается модель текущего (в некоторый момент времени) поведения. А модель глобального порядка вытекает из системы (1), (2):

$$\partial f/\partial t = a_1 f, \quad \partial n/\partial t = a_2 n. \tag{5}$$

Эти модели согласуются с описанием в работе (Peters, 1993) эволюции сложных систем как композиции локального шума и глобального порядка; последний ассоциируется с долговременной памятью системы, отличной от марковской.

Следует заметить, что фракталы, точнее случайные фракталы, часто связывают с композицией случайного и детерминированного. Большинство явлений выглядят как тренд с шумом; в полученных моделях уравнения (4) описывают плотности распределения случайных величин I и n в фиксированный момент времени, а (5) определяют детерминированные правила изменения во времени этих распределений; определенное сходство с указанной композицией очевидно.

Уравнения (4) – обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка, решения которых, зависящие от коэффициентов A_1, A_2, B_1, B_2 и начальных условий, изучены наиболее подробно; и как известно, спектр их решений достаточно широк. Решения уравнений (5) имеют экспоненциальный характер изменения во времени. Отсюда решение, объединяющее локальное поведение с глобальным порядком в экономической системе, естественно имеет вид:

$$f \sim f_0 \exp(a_1 t), \quad n \sim n_0 \exp(a_2 t), \tag{6}$$

где f_0 и n_0 есть решения уравнений (4).

2. ТРЕНДЫ В ДИНАМИКЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В приведенных моделях свойство персистентности определяется следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть модели текущего поведения* (4) *сложной системы имеют решения* $f(I)$ *и* $n(I)$ *из класса ограниченных функций. Тогда при экспоненциальных решениях модели глобального поведения* (5) *система будет обладать свойством персистентности, если выполняются неравенства* $a_1 > 0$, $a_2 < 0$.

Действительно, при $a_1 > 0$ и экспоненциальном характере решения плотность $f(I, t)$ со временем растет, а $n(I, t)$ – уменьшается. Для фрактала $f = cn^d$ это означает увеличение плотности распределения f кластеров $n(I, t)$. В соответствии с (Коханенко, 2003), при разных знаках параметров a_1, a_2 функция $f(n)$ есть фрактал. Следовательно, во времени вероятность уменьшения кластеров растет и следует ожидать устойчивости такой тенденции.

Следует отметить, что персистентность, как это видно из доказательства теоремы, характеризуется уменьшением со временем числа кластеров с особенностями (аномальных кластеров) и увеличением плотности распределения общего числа особенностей (аномалий). Это может быть интерпретировано как концентрация особенностей во все меньшем числе кластеров. Противоположное персистентности свойство антиперсистентности присуще немалому числу систем. Б. Мандельброт по ассоциации с толкованием Иосифом библейского сна фараона: "семь лет изобилия сменяется семью годами голода" назвал свойство антиперсистентности "Иосиф-эффектом". Ниже приводится теорема, формулирующая критерий антиперсистентности.

Теорема 2. *Пусть модели текущего поведения* (4) *сложной системы имеют решения* $f(J)$ *и* $n(J)$ *из класса ограниченных функций. Тогда при экспоненциальных решениях модели глобального поведения* (5) *система будет обладать свойством антиперсистентности при условии выполнения неравенств* $a_1 < 0$, $a_2 > 0$.

Действительно, при $a_1 < 0$ и экспоненциальном характере решения плотность $f(J, t)$ со временем уменьшается, а $n(I, t)$ – увеличивается; для фрактала $f(n)$ это означает уменьшение плотности распределения f кластеров $n(I, t)$. Но при разных знаках параметров a_1, a_2 функция $f(n)$ есть фрактал; следовательно, во времени вероятность тенденции к увеличению числа кластеров падает и следует ожидать, что система, скорее всего, изменит характер тренда на противоположный. Здесь уместно сказать об увеличении вероятности появления "джокера". Антиперсистентность, как видно из доказательства теоремы, характеризуется увеличением со временем числа кластеров с особенностями (акцентированных кластеров) и уменьшением плотности распределения общего числа особенностей (акцентов). Это может быть интерпретировано как рассеивание особенностей (все меньшее число особенностей появляется во все большем числе кластеров).

Теорема 3. *Если поведение фрактальной системы персистентное, то ее размерность удовлетворяет равенству*:

$$\alpha = -a\ln\{-kaW[(-1/ka)\exp[-(2+kb-k)/ka]]\} - b,$$

где $a = 1/\ln(n_{01})$, $b = 3 + a\ln(k) - a\ln(3N^2)$; $W(\cdot)$ – *функция Ламберта*; $k = T_2/T_1$, T_1, T_2 – *времена циклов (см.* (*Peters*, *1993*)) *системы в пространствах элементов и кластеров, соответственно*, n_0 – *минимальное число кластеров, при котором существует фрактал.*

Доказательство теоремы для персистентных систем основано на двух соотношениях, получаемых из (6):

– наибольшее во времени значение плотности f: $f_m = Gf_0\exp(a_1T_1)$, $a_1 > 0$;

– наименьшее во времени значение числа аномальных кластеров n: $n_{01} = Dn_0\exp(a_2T_2)$, $a_2 < 0$; где G и D нормирующие коэффициенты.

Учитывая, что, с одной стороны, $f_0 = c_1n^{-(\alpha+1)}$, $c_1 = \alpha n_{01}^{\alpha}(1 - x^{\alpha})^{-1}$, и, следовательно, наибольшее значение (при $n = n_{01}$) плотности равно $f_{0m} = (\alpha/n_{01})(1 - x^{\alpha})^{-1}$, а с другой, наибольшее время цикла достигается при наименьшей плотности $f_0 = n_{01}/N$, справедливо равенство:

$$a_1\frac{n_{01}}{N}\frac{\exp(a_1T_1)}{\exp(a_1T_1 - 1)} = kn_{01}^{-(\alpha+1)} \tag{7}$$

и аналогично для аномальных кластеров:

$$a_2\frac{\exp(a_2T_2)}{\exp(a_2T_2 - 1)} = k\frac{n_{01}}{N}, \tag{8}$$

где k – гармонизирующий размерности коэффициент; по абсолютной величине равен 1. Из этих равенств несложно получить:

$$-(\alpha+1)\frac{1 - \exp(-a_2T_2)}{1 - \exp(-a_1 - 1)} = N^2n_{01}^{-(\alpha+3)}.$$

Полагая a_iT_i достаточно малыми для того, чтобы пренебречь величинами $(a_iT_i)^3$, и разлагая экспоненты в ряд, легко вывести уравнение:

$$\alpha + a\ln[2 - k(\alpha+1)^{-1}] + b = 0, \quad a = 1/\ln(n_{01}), \quad b = 3 + a\ln(k) - a\ln(3N^2).$$

Можно показать, что корни полученного уравнения равны $\alpha = -a\ln[-kaW[(-1/ka)\exp[-(2 + kb - k)/ka]]] - b$, что и утверждает теорема. Такое решение просто подтвердить использованием символьного оператора “solve” известного пакета MathCad. Нахождение параметрической области решений существенно нелинейного уравнения, описываемых W-функцией Ламберта, достаточно трудоемкая задача. Поэтому ниже приводятся некоторые результаты численного изучения сегментов названной области, интересные как теоретически, так и в приложениях. Численные результаты свидетельствуют, что фрактальные структуры существуют только при определенных комбинациях параметров k, n_{01}, зависящих от диапазона изменения фрактальной размерности. Решение в диапазоне фрактальной размерности $\alpha = 1, \ldots, 2$ существует при $k = 1$, $k > 1$, $k < 1$, при этом $N \approx (3–35)n_{01}$. Решение при $k < 1$ в диапазоне $0 < \alpha < 1$ существует при очень больших n_{01}. Решение при $k \geq 2$ не существует в диапазоне $\alpha \geq 3$. Кроме того, следует заметить, что W-функция Ламберта в отрицательной области значений аргумента $\exp(a)$ имеет решение только при $\exp(a) \geq -0.367$. В табл. 1 приведен сегмент области изменения параметров, связанных утверждением теоремы 3 (значения фрактальной размерности α, минимальное число акцентированных кластеров n_{01}, общее число кластеров N).

Следует заметить, что численные результаты из табл. 1 в частном случае фрактального броуновского движения согласуются с данными, приведенными в работе (Кроновер, 2000), где фрактальное броуновское движение получается в предположении гауссовости приращений случайной величины (Кроновер, 2000). В теореме 3 такая гипотеза не была использована; теорема основывается на модели (Коханенко, 2003), полученной из соответствующих классическому виду уравнений Ланжевена с белым шумом уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова, которые, как известно, ограничены лишь тем, что описывают диффузионный процесс, т.е. не учитывают моменты третьего и выше порядков в разложении Крамерса–Мойала (Репке, 1990) функции плотности.

3. ТОПОЛОГИЯ И ДИНАМИКА ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Связь топологии системы с ее динамикой видна уже при получении фрактала из уравнения ФПК, когда простым преобразованием производится переход из пространства времени в топологическое пространство кластеров или элементов системы. При этом плотность f распределения акцентированных элементов системы, как показано в (Коханенко, Пищик, 2004), записывается в виде:

$$f = C_1G\exp(a_1t)n^{-(\alpha+1)}, \tag{9}$$

Таблица 1. Область решений фрактального уравнения персистентных систем

k	N	α		
		1.01	1.5	1.91
		n_{01}	n_{01}	n_{01}
1	10	4	3	3
	20	5	4	4
	50	8	6	5
	70	10	8	6
	100	12	9	8
	200	17	12	10
	500	25	18	14
3	10	4	3	3
	20	5	4	3
	50	8	6	5
	70	10	6	5
	100	12	8	6
	200	16	11	8
	500	28	18	12
0.5	10	4	4	3
	20	6	5	4
	50	9	8	6
	70	12	8	7
	100	13	10	8
	200	18	12	10
	500	31	21	16

где $C_1 = (\alpha n_0^\alpha)/(1 - x^\alpha)$, $x = n_0/N$, $G = a_1/(\exp(a_1T - 1))$, $a_1 = (df/dt)/f$, n_0 и N – минимально и максимально возможные числа кластеров; T – время цикла в пространстве элементов; n – текущее число акцентированных кластеров. Поэтому, если в системе максимально возможное число акцентированных элементов равно M, то текущее число I таких элементов определяется как

$$I = Mf = Rn^{-(\alpha+1)}, \tag{10}$$

где $R = MC_1G\exp(a_1t)$. Полагая, что величина n, как и ее ранг r, может принимать не только целочисленные значения, но и интегрируя (10) на интервале $[n, \infty]$, несложно определить ранг соотношением: $r(n) = (R/\alpha)n^{-\alpha}$, если формировать последовательность $r(n)$ в порядке уменьшения n; или на конечном интервале $[n, N]$: $r(n) = (R/\alpha)(n^{-\alpha} - N^{-\alpha})$. Отсюда число акцентированных кластеров в случае бесконечного N связано со своим рангом r ранговым фракталом вида:

$$n = [L/r]^\gamma, \quad \gamma = 1/\alpha \tag{11}$$

или при конечном N:

$$n = [1/(N^{-\alpha} + r/L)]^\gamma, \tag{12}$$

где $L = R/\alpha$. При больших N из (11) следует выражение $\ln(n) = \gamma\ln L - \gamma\ln(r)$ для нахождения величины фрактальной размерности системы, обратной коэффициенту при $\ln(r)$ в соответствующей кривой регрессии.

Для относительного числа z акцентированных кластеров выражения (11), (12) преобразуются к виду:

$$Z = (R_1)r^{-\gamma}, \quad R_1 = L^\gamma/N, \quad z = n/N, \tag{13}$$

$$z = N^{-1}[1/(N^{-\alpha} + r/L)]^\gamma. \tag{14}$$

Таким образом, получается ранговый кластер z, который может служить топологической моделью многих систем. Действительно, в экономике, социологии, психологии, технике достаточно часто результирующие показатели поведения систем представляются в виде линейчатых диаграмм с ранговой последовательностью блоков, каждый из которых количественно характеризует некоторую часть (кластер) системы. Топология такой диаграммы может описываться соотношением (13) или (14), например, бюджет и другие экономические структуры, для которых характерна зависимость выбранного основного показателя эффективности (результативности, продуктивности) от совокупности релевантных параметров (характеристик) системы; конструкты в психологии и т.д. В экономике выражения (13), (14) могут определять связь доли z экономических (например, бюджетных) агентов, суммарный вклад представителей которых в определенную отрасль хозяйства таков, что имеет ранг r. В технике это, например, относительное число подсистем z сложной системы, имеющих в совокупности множество аномальных элементов, характеризующееся рангом r. В свою очередь, доля z может изучаться самостоятельно и представлять также фрактальную структуру. При этом все ее модули описывают некоторые подмножества агентов (подсистем) и имеют свои ранги, т.е. к ним тоже могут применяться выражения, аналогичные (13), (14).

Несложно показать, что относительное число акцентированных кластеров z может интерпретироваться как аналог плотности распределения кластеров f_2, изученной в предыдущих разделах, где показано, что интенсивность изменения такой плотности равна $a_2 = (df_2/dt)/f_2$. Поэтому, если имеется репрезентативная временная выборка $z_i(t_i) = f_2(t_i)$, то появляющаяся в связи с этим возможность построения кривой $z(t)$ полиномиальной регрессии устраняет трудности определения df_2/dt и, следовательно, $a_2 = (dz(t)/dt)/z(t)$. Интенсивность a_2 можно оценить и по линейной регрессии $\ln[z(t)]$. Кроме того, из предыдущих соотношений следует, что $\ln[z(t)] - D(n_{01}, N, \alpha, r) + t(a_1/\alpha)$, где $D(n_{01}, N, \alpha, r)$ – некоторая нелинейная функция своих аргументов, а коэффициент при t во втором слагаемом пропорционален a_1, что позволяет при известной фрактальной размерности α оценивать интенсивность a_1. Ограниченность последнего алгоритма оценки обусловлена получающимся постоянством во времени коэффициента a_1. Это приводит к необходимости для адекватного учета динамики вначале оценивать области того или иного характера динамического поведения системы (персистентное, неперсистентное и т.п.) по критериям, связанным с величиной фрактальной размерности, а затем применять алгоритм в найденных областях.

Кроме того, поскольку плотность f_2 образует совместно с плотностью f_1 фрактал, то при наличии ретроспективной информации о f_1 несложно определить a_1, а следовательно, и $a_2 = -a_1/(1 + \alpha)$. Отсюда появляется возможность определения времен цикличности.

4. ОЦЕНКА ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ЦИКЛА (“ВРЕМЕНИ ЖИЗНИ” ДОЛГОВРЕМЕННОЙ ПАМЯТИ СИСТЕМЫ)

Персистентность и противоположная ей антиперсистентность свидетельствуют о том, что фрактальные временные ряды, описывающие эволюцию многих экономических и социальных систем, обладая статистическим самоподобием во времени, к тому же и квазицикличны (Peters, 1993; Коханенко, 2003). Здесь “квази” указывает на определенную нечеткость характеристики. Эволюция систем имеет некоторый нечеткий период T, в течение которого сохраняется память о прошлом, о начальных условиях; это так называемая долговременная память. Обычно “время жизни” долговременной памяти оценивается эмпирически.

Результаты, полученные выше, позволяют записать аналитическое выражение для времени цикла. Для этого следует воспользоваться теоремой 4.

Теорема 4. *Максимально возможное время цикла персистентной системы в пространстве элементов T_1 и пространстве кластеров T_2 определяется соотношениями*:

$$T_1 = -0.5[g_1 + (g_1^2 - 4r_1)^{0.5}], \quad T_2 = -0.5[g_2 \pm (g_2^2 - 4r_2)^{0.5}], \tag{15}$$

где $g_1 = 2/a_1$, $r_1 = -g_1/(Nn_{01}^{-(\alpha+2)} - a_1)$, $g_2 = 2/a_2$, $r_2 = -g_2/(x - a_2)$.

Доказательство теоремы основано на использовании соотношений (7) и (8). Соотношения можно представить в виде квадратного уравнения относительно соответствующего T: $T_2 + gT + r$, решения которого согласуются с (15). Решения имеют особенности: для времени цикла в пространстве элементов при $Nn_{01}^{-(\alpha+2)} = a_1$, для времени цикла в пространстве кластеров при $x = a_2$.

Ниже на рис. 1, 2 приведены графики количественных оценок для времен циклов T_1, T_2 персистентной системы при различных значениях фрактальной размерности α и параметров динамики соответствующей плотности распределения a_1, a_2 и n_{01}/N. Графики построены для $N = 500$, $a_1 = 0.01$ и $\alpha = 1.01$ (T_{11}, T_{21}), $\alpha = 1.51$(T_{15}, T_{25}), $\alpha = 1.91$ (T_{19}, T_{29}). Из графиков видно, что уменьшение фрактальной размерности уменьшает время цикла T_2 в пространстве кластеров и увеличивает время цикла T_1 в пространстве элементов. Времена циклов в пространстве элементов и T_1 и в пространстве кластеров T_2 существенно отличаются. Графики показывают, что у систем с персистентной динамикой времена циклов T_1 и T_2 при величинах параметра $n_{01}/N > 0.1$ изменяются медленно. Кроме того, из количественного изучения следует, что уменьшение параметра a_1 приводит к более длительным временам циклов T_1, T_2. Так, при параметрах построения графиков рис. 1, 2 уменьшение a_1 на порядок примерно во столько же уменьшает времена циклов.

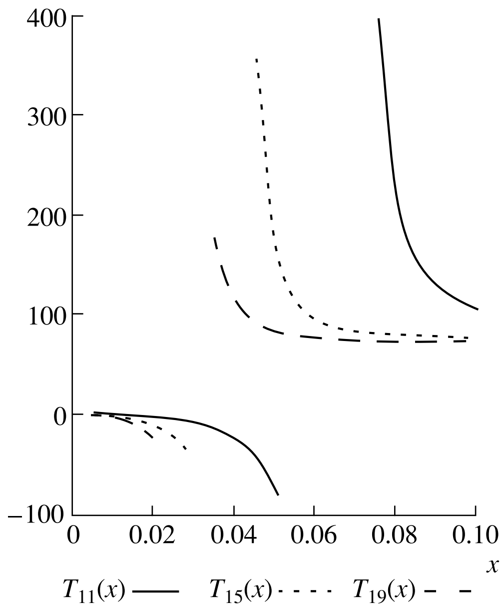

Рис. 1. Изменение времен циклов в пространстве элементов.

При увеличении числа кластеров растет время цикла T_2. Это напоминает известный из теории многокомпонентных нелинейных систем в науковедении результат: чем крупнее рубрикация публикаций в области знаний, тем больше период пульсации.

Кроме того, при увеличении фрактальной размерности растет и время цикла T_2 в пространстве кластеров. Это согласуется с характером изменения времени цикла цен акций, полученным по результатам многолетних наблюдений (Peters, 1993) для десяти крупнейших американских компаний, при различных показателях Херста, соответствующих диапазону фрактальной размерности 1.2–1.8. Если по этим данным построить прямую регрессии, то она при значимости $p = = 0.05$ будет иметь вид $T = -109.427 + 107.682(\alpha + 1)$ (месяц), представленный на рис. 3. На этом же рисунке дан график $T_2(\alpha)$ при $a_1 = 0.014$, $x = 0.05$. Очевидно сходство в указанном диапазоне α поведения времен циклов, изображенных на рис. 3.

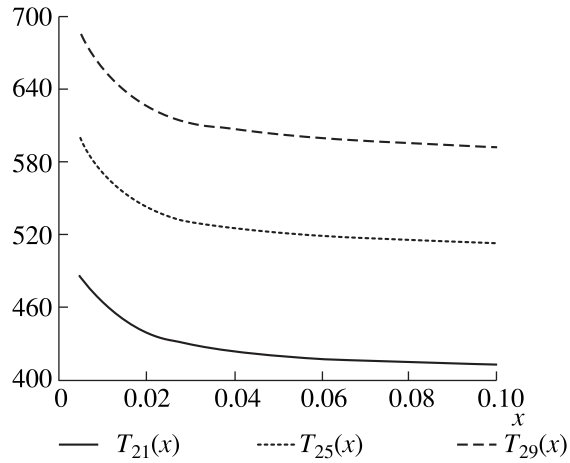

Рис. 2. Изменение времен циклов в пространстве кластеров.

5. ФРАКТАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЯ ИЕРАРХИИ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Благодаря специфической модели информационных потоков иерархические структуры достаточно часто встречаются в социально-экономических системах. Это, как правило, множества кластеров, каждый из которых представляет совокупность кластеров; благодаря этому и возникает многоуровневость. Среди кластеров имеются самоподобные при определенном скейлинге. Меняется масштаб от уровня к уровню, но форма остается постоянной. В связи с этим можно гипотетически ожидать наличия фрактальных свойств у таких структур. В данной работе изучается фрактальность иерархической структуры бюджета.

Бюджет рассматривается как двухуровневая иерархическая система (Коханенко, Пищик, 2004): на первом – микроуровне – система включает множество релевантных элементов (потреб-

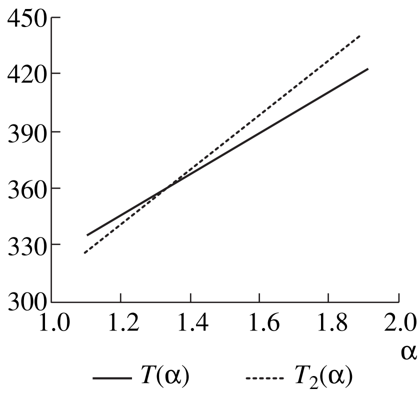

Рис. 3. Сравнение времен циклов T и T_2.

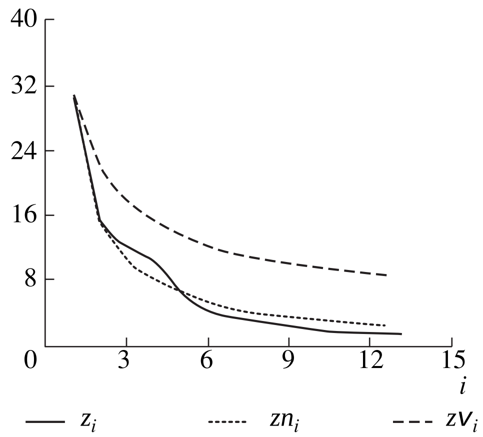

Рис. 4. Плановая и граничные структуры бюджета РФ 2003 г.

ностей, возможностей и т.д.), на втором уровне – структурируется как ансамбль взаимосвязанных кластеров (статей бюджета), включающих элементы первого уровня.

В соответствии с изложенным выше система относительно плотности f_i, $i = 1, 2$, распределения соответствующих переменных каждого уровня (количество I, n акцентированных элементов и кластеров, соответственно) одновременно представляется и в статике, и динамике. Это объединяет фрактальную геометрию с динамикой фрактальных структур, подтверждая метафору (Вильямс, 2000): “путь … определяется внутренними структурами, которые, как правило, скрыты от наших глаз; …невидимая структура все же может быть обнаружена и … изменена”. В статике – это стационарные уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова, в динамике – это линейные дифференциальные уравнения относительно соответствующих плотностей распределения. При этом функциональная связь плотности f_1 распределения элементов и плотности f_2 распределения кластеров фрактальна: $f_1 = c_1 f^{-(\alpha + 1)}$. Очевидно, при наличии трех уровней можно также получить фрактал и т.д. Применительно к бюджету f_{ij} это, например, относительные доли j статей доходной или расходной частей на уровне i. Описанную модель можно получить и на основе вариационного принципа максимума информационной энтропии (Коханенко, Рудый, 2003). Как показано в (Коханенко, 2003), $(\alpha + 1) = a/a_{i+1}$ есть отношение интенсивностей особенностей, потребностей, возможностей уровней иерархии i и $i + 1$. В зависимости от величин указанных интенсивностей будут наблюдаться различные варианты структурного самоподобия. Так можно ожидать, что, как правило, при линейном относительно i изменении интенсивностей фрактальная размерность будет постоянная по уровням.

Ниже приведены табл. 2, 3, 4 с результатами оценки[1], выполненной с помощью простой регрессии фрактальных размерностей для бюджетов Ростовской области и России за несколько лет. Регрессия получалась на основе (11), (12) в виде кривой $f_i(m)$, где m – кластер m уровня i; $m = 1, …, n$. В таблицах использованы следующие обозначения: RP – плановая расходная часть бюджета, RF – исполненная расходная часть бюджета, DP – плановая доходная часть бюджета, DF – исполненная доходная часть бюджета. Верхний уровень для РФ включает такие кластеры, как национальная оборона, обслуживание государственного долга, социальная политика, дорожное хозяйство, государственное управление, промышленность, энергетика и строительство, международная деятельность, правоохранительная деятельность, фундаментальные исследования, здравоохранение и физическая культура, сельское хозяйство и рыболовство, финансовая помощь бюджетам других уровней; для Ростовской области – бюджетная помощь другим уровням, дорожное хозяйство, промышленность, энергетика и строительство, социальная политика, здравоохранение и физическая культура, образование, государственное управление, жилищно-коммунальное хозяйство, охрана природных среды и ресурсов, культура, сельское хозяйство и рыболовство, обслуживание государственного долга, прочие расходы. Нижний уровень представляют составляющие расшифровки кластеров верхнего уровня.

[1] Исходная экономическая статистика взята с сайта http://www.openbudget.karelia.ru/budnord/rassian/north-caucasian/rostov-region/rostov obl.htm, которая, к сожалению, имеет пропуски, что отразилось на полноте таблиц.

Таблица 2. Ростовская область. Верхний уровень

Годы	*RP**	*RF**	*DP*	*DF*
2000	0.75	0.75	–	–
2001	0.65	0.65	0.45	0.48
2002	0.65	–	0.31	–

Таблица 3. Федеральный бюджет. Верхний уровень

Годы	*RP*	*RF*	*DP*	*DF*
1992	0.63	–	0.50	–
1993	1.02	–	0.67	–
1994	0.83	–	0.56	–
1995	0.93	–	–	–
1996	1.03	1.03	0.50	
1997	0.83	0.72	0.53	0.44
1998	0.85	0.68	0.53	0.51
1999	0.90	0.85	0.49	0.67
2000	0.89	0.85	0.69	0.39
2001	0.86	–	0.53	0.48
2002	0.88	–	0.49	–
2003	0.79	–	0.37	–

Таблица 4. Число кластеров (n) и фрактальные размерности (α) для нижнего уровня бюджета 2001 г. Ростовской области (РО) и России (РФ)

РО	n	1	4	3	3	6	3	4	4	–	–	2	–	2
	α	–	0.29	0.20	0.19	0.42	0.20	0.35	1.59	–	–	0.25	–	0.98
РФ	n	2	5	2	4	7	7	6	5	6	3	4	2	4
	α	–	0.28	–	0.93	0.39	0.43	0.33	0.50	–	0.36	0.26	–	0.82

На графике на рис. 4 показаны плановые (z) и соответствующие теореме 3 граничные (zn_i, zv_i) в области персистентности структуры расходной части бюджета России 2003 г. Из графика видно, что плановый бюджет несколько выходит за пределы области персистентности.

В соответствии с (Коханенко, 2003) и приведенными выше теоремами величина фрактальной размерности может свидетельствовать о системной устойчивости, характере поведения системы (в смысле цикличности и возможности смены в последующем цикле тренда). Данные таблиц достаточны для проведения такого анализа, но ограниченность объема статьи не позволяет его осуществить подробно. В главном анализ позволяет охарактеризовать рассматриваемые бюджеты следующим образом. Всем изученным бюджетам свойственна возможность самоорганизованной критичности (Коханенко, 2003); большинство плановых и исполненных расходных и доходных частей бюджетов верхнего уровня антиперсистентны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Вильям Б. (2000): Торговый хаос: Экспертные методики максимизации прибыли. М.: ИК Аналитика.

Клейнер Г.Б. (2003): Особенности формирования экономических институтов в России // *Экономика и мат. методы*. Т. 39. № 3.

Клейнер Г.Б., Смоляк С.А. (2000): Эконометрические зависимости: принципы и методы построения. М.: Наука.

Коханенко И.К. (2003): Фрактальная размерность как критерий системной устойчивости // *Изв. РАН. Теория и системы управления*. № 2.

Коханенко И.К., Пищик В.И. (2004): Оценка “времени жизни” долговременной памяти системы // *Обозрение прикл. и промышл. матем*. Т. 11. Вып. 1.

Коханенко И.К., Рудый С.С. (2003): Вариационные принципы, объясняющие фракталы // *Обозрение прикл. и промышл. матем*. Т. 10. Вып. 2.

Кроновер Р.М. (2000): Фракталы и хаос в динамических системах. М.: ПОСТМАРКЕТ.

Малинецкий Г.Г. (2000): Введение в нелинейную динамику. М.: Эдиториал, УРСС.

Олейник А.Н. (2000): Институциональная экономика // *Вопросы экономики*.

Репке Г. (1990): Неравновесная статистическая механика. М.: Мир.

Peters E.E. (1993): Chaos and Order in the Capital Markets. N.Y., Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore: Jon Wiley&Sons, Inc.

Peters E.E. (1994): Fractal market analysis. N.Y.: John Wiley&Sons, Inc.

Warnecke H.J. (1993): The Fractal Company. Berlin: Springer Verlag.

Поступила в редакцию
22.06.2004 г.

Fractal Topology and the Dynamics of Economic Systems

I. K. Kokhanenko

The possibilities of using fractal mathematics for an estimation of trends stability in economic systems are studied. The sufficient condition of persistence of fractals is demonstrated, the ratio for definition of cycle time persistence is introduced. The connection of fractal topology of systems with their dynamics is substantiated. The application of the obtained theoretical outcomes to the analysis of the budget is described.