ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2007, том 43, № 1, с. 133–136

ЗАМЕТКИ И ПИСЬМА

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ САМООРГАНИЗАЦИИ РЫНКА ТРУДА ДЛЯ НЕСКОЛЬКИХ ОТРАСЛЕЙ ЭКОНОМИКИ

© 2007 г. Е. А. Семенчин, И. В. Зайцева

(Ставрополь)

Предложенные в (Васильев, 2001; Семенчин, Зайцева, 2004) модели самоорганизации рынка рабочей силы для одной или двух отраслей экономики позволяют проанализировать эффективность принятия тех или иных управленческих решений и спрогнозировать вероятность развития событий на рынке труда. Входящие в данные модели феноменологические параметры открывают возможности исследования влияния на макроэкономические процессы ряда субъективных факторов. В данной работе обобщаются результаты работ (Васильев, 2001; Семенчин, Зайцева, 2004) на случай n различных отраслей экономики.

Обозначим через $N_1^{(i)}(t)$ – общее число специалистов, занятых в отрасли i экономики в момент времени t; $N_2^{(i)}(t)$ – число потенциальных рабочих, которые могут быть привлечены для работы в отрасль i и которые в момент времени t являются безработными; $\sum_{i=1}^n (N_1^{(i)} + N_2^{(i)}) = N =$ $=$ const – емкость рынка рабочей силы; $W_1^{(i,j)}$ – вероятность того, что безработный специалист отрасли i может найти работу по специальности в отрасли j за период времени с t до $t + dt$; $W_2^{(i)}$ – вероятность увольнения работающего специалиста отрасли i за период времени с t до $t + dt$, $i, j =$ $1, \dots, n$, $t \in \in [0; \infty)$ (заметим, что в общем случае $\sum_{i=1}^n W_1^{(i,j)} \neq 1$).

В соответствии с введенными обозначениями имеем систему дифференциальных уравнений, описывающую динамику перераспределения рабочей силы в n различных отраслях экономики:

$$\begin{cases} dN_1^{(1)}(t)/dt = -N_1^{(1)}(t)W_2^{(1)} + \sum\limits_{i=2}^{n} N_1^{(i)}(t)W_2^{(i)} - N_2^{(1)}(t)W_1^{(1,1)} + \sum\limits_{i=2}^{n} N_2^{(i)}(t)W_1^{(i,1)}; \\ \dots \\ dN_1^{(n)}(t)/dt = \sum\limits_{i=1}^{n-1} N_1^{(i)}(t)W_2^{(i)} - N_1^{(n)}(t)W_2^{(n)} + \sum\limits_{i=1}^{n-1} N_2^{(i)}W_1^{(i,n)} - N_2^{(n)}(t)W_1^{(n,n)}; \\ dN_2^{(1)}(t)/dt = \sum\limits_{i=1}^{n} N_1^{(i)}(t)W_2^{(i)} - N_1^{(n)}(t)\sum\limits_{i=1}^{n} W_1^{(1,i)} + \sum\limits_{i=2}^{n} N_2^{(i)}(t)W_1^{(i,1)}; \\ \dots \\ dN_2^{(n)}(t)/dt = \sum\limits_{i=1}^{n} N_1^{(i)}(t)W_2^{(i)} + \sum\limits_{i=1}^{n-1} N_2^{(i)}(t)W_1^{(i,n)} - \sum\limits_{i=1}^{n} N_2^{(n)}(t)W_1^{(n,i)}. \end{cases} \qquad (1)$$

Предполагаем, что в начальный момент времени $t = 0$ число специалистов, занятых в отрасли i экономики, равно $N_{10}^{(i)}$, а число потенциальных рабочих, которые могут быть привлечены для работы в отрасль j и которые в момент времени t являются безработными, $N_{20}^{(j)}$, т.е.

$$N_1^{(i)}(0) = N_{10}^{(i)}, \quad N_2^{(j)}(0) = N_{20}^{(j)}, \quad i, j = 1, \dots, n. \qquad (2)$$

Вероятности $W_2^{(i)}$, $W_1^{(i,j)}$ являются постоянными величинами, $i, j = 1, \dots, n$.

Так как любая математическая модель заведомо несет в себе погрешность (нельзя учесть все условия работы), то исследование устойчивости является одной из важных процедур в моделировании.

Устойчивость (асимптотическая устойчивость или неустойчивость) системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (2) определяется расположением относительно мнимой оси корней характеристического уравнения (Афанасьев и др., 1998):

$$P_n(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n = 0, \quad a_n = 1, \tag{3}$$

получаемого из характеристического уравнения

$$\det(W - \lambda\mathbf{I}) = 0 \tag{4}$$

после приведения подобных членов, где $\mathbf{I}$ – единичная матрица размера $n \times n$,

$$W = \begin{pmatrix} -W_2^{(1)} & 0 & \ldots & 0 & -W_1^{(1,1)} & W_1^{(2,1)} & \ldots & W_1^{(n,1)} \\ 0 & -W_2^{(2)} & \ldots & 0 & W_1^{(1,2)} & -W_1^{(2,2)} & \ldots & W_1^{(n,2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -W_2^{(n)} & W_1^{(1,n)} & W_1^{(2,n)} & \ldots & -W_1^{(n,n)} \\ W_2^{(1)} & W_2^{(2)} & \ldots & W_2^{(n)} & -W_1^{(1,1)} - \ldots - W_1^{(1,n)} & 0 & \ldots & 0 \\ W_1^{(2)} & W_2^{(2)} & \ldots & W_2^{(n)} & 0 & -W_1^{(2,1)} - \ldots - W_1^{(2,n)} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ W_2^{(1)} & W_2^{(2)} & \ldots & W_2^{(n)} & 0 & 0 & \ldots & -W_1^{(n,1)} - \ldots - W_1^{(n,n)} \end{pmatrix}.$$

Согласно (Афанасьев и др., 1998) характеристический многочлен (3) является устойчивым (асимптотически устойчивым) тогда и только тогда, когда его корни λ_j ($j = 1, \ldots, n$) имеют неположительную (отрицательную) вещественную часть, т.е. удовлетворяют условию $\mathrm{Re}(\lambda_j) \le 0$, $\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0$.

Непосредственное вычисление собственных значений характеристического уравнения при больших n весьма трудоемкий процесс, требующий значительных затрат времени. Поэтому при исследовании на асимптотическую устойчивость решения задачи (1), (2) прибегают к критерию Рауса–Гурвица (Афанасьев и др., 1998).

Для устойчивости (3), а значит асимптотической устойчивости решения (1), (2), необходимо и достаточно, чтобы были положительны все главные диагональные миноры

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = a_n\Delta_{n-1}$$

матрицы Гурвица

$$\mathbf{M}_{P_n} = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2_{2n-1} & a_{2n-2} & \ldots & a_n \end{pmatrix}.$$

С экономической точки зрения устойчивость (1), (2) означает, что в соответствии с уровнем занятости (1) при небольших отклонениях от (2) система с течением времени возвратится в начальное состояние. Если же задача (1), (2) является неустойчивой, то даже небольшие отклонения (1) обязательно приведут к другому соотношению числа безработных и занятых на производстве в нескольких отраслях экономики. Если система находится в окрестности устойчивой стационарной точки, то имеет место снижение темпов роста безработицы. В противном случае – темпы роста безработицы прогрессируют.

Проанализировав полученные сведения об устойчивых и неустойчивых состояниях рынка труда для n различных отраслей экономики, вполне возможно составить прогноз. Полученный прогноз позволит избежать кризисных состояний на рынке труда.

Пример 1. Проанализируем динамику перераспределения рабочей силы в трех отраслях экономики. Система дифференциальных уравнений (1) с начальными условиями (2) имеет вид:

$$\begin{cases}
dN_1^{(1)}(t)/dt = -N_1^{(1)}(t)W_2^{(1)} + \sum\limits_{i=2}^{3} N_1^{(i)}(t)W_2^{(i)} - N_2^{(1)}(t)W_1^{(1,1)} + N_2^{(2)}(t)W_1^{(2,1)} + N_2^{(3)}(t)W_1^{(3,1)}; \\
dN_1^{(2)}(t)/dt = N_1^{(1)}(t)W_2^{(1)} - N_1^{(2)}(t)W_2^{(2)} + N_1^{(3)}(t)W_2^{(3)} + N_2^{(1)}(t)W_1^{(1,2)} - N_2^{(2)}(t)W_1^{(2,2)} + N_2^{(3)}(t)W_1^{(3,2)}; \\
dN_1^{(3)}(t)/dt = N_1^{(1)}(t)W_2^{(1)} + N_1^{(2)}(t)W_2^{(2)} - N_1^{(3)}(t)W_2^{(3)} + N_2^{(1)}(t)W_1^{(1,3)} + N_2^{(2)}(t)W_1^{(2,3)} - N_2^{(3)}(t)W_1^{(3,3)}; \\
dN_2^{(1)}(t)/dt = \sum\limits_{i=1}^{3} N_1^{(3)}(t)W_2^{(3)} - N_2^{(1)}(t)\sum\limits_{i=1}^{3} W_1^{(1,i)} + \sum\limits_{i=2}^{3} N_2^{(i)}(t)W_1^{(i,1)}; \\
dN_2^{(2)}(t)/dt = \sum\limits_{i=1}^{3} N_1^{(i)}(t)W_2^{(i)} + N_2^{(1)}(t)W_1^{(1,2)} - N_2^{(2)}(t)\sum\limits_{i=1}^{3} W_1^{(2,i)} + N_2^{(3)}(t)W_1^{(3,2)}; \\
dN_2^{(3)}(t)/dt = \sum\limits_{i=1}^{3} N_1^{(i)}(t)W_2^{(i)} + \sum\limits_{i=1}^{2} N_2^{(i)}(t)W_1^{(i,3)} - \sum\limits_{i=1}^{3} N_2^{(3)}(t)W_1^{(3,i)}.
\end{cases}$$

Тогда получим матрицу коэффициентов системы дифференциальных уравнений (1):

$$W = \begin{pmatrix}
-W_2^{(1)} & 0 & 0 & -W_1^{(1,1)} & W_1^{(2,1)} & W_1^{(3,1)} \\
0 & -W_2^{(2)} & 0 & W_1^{(1,2)} & -W_1^{(2,2)} & W_1^{(3,2)} \\
0 & 0 & -W_2^{(3)} & W_1^{(1,3)} & W_1^{(2,3)} & -W_1^{(3,3)} \\
W_2^{(1)} & W_2^{(2)} & W_2^{(3)} & -\sum\limits_{i=1}^{3} W_1^{(1,i)} & 0 & 0 \\
W_1^{(2)} & W_2^{(2)} & W_2^{(3)} & 0 & -\sum\limits_{i=1}^{3} W_1^{(2,i)} & 0 \\
W_2^{(1)} & W_2^{(2)} & W_2^{(3)} & 0 & 0 & -\sum\limits_{i=1}^{3} W_1^{(3,i)}
\end{pmatrix}.$$

Пусть в системе (1), (2) заданы:

$$\begin{gathered}
W_2^{(1)} = 0.1, \quad W_2^{(2)} = 0.2, \quad W_2^{(3)} = 0.3, \\
W_1^{(1,1)} = 0.3, \quad W_1^{(1,2)} = 0.2, \quad W_1^{(1,3)} = 0.1, \\
W_1^{(2,1)} = 0.4, \quad W_1^{(2,2)} = 0.1, \quad W_1^{(2,3)} = 0.5, \\
W_1^{(3,1)} = 0.6, \quad W_1^{(3,2)} = 0.2, \quad W_1^{(3,3)} = 0.3.
\end{gathered}$$

Характеристическое уравнение матрицы коэффициентов системы дифференциальных уравнений W примет вид:

$$\begin{vmatrix} -0.1-\lambda & 0 & 0 & -0.3 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & -0.2-\lambda & 0 & 0.2 & -0.1 & 0.2 \\ 0 & 0 & -0.3-\lambda & 0.1 & 0.5 & -0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & -0.6-\lambda & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0 & 0 & -1.1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Получим характеристический многочлен:

$$P_6(\lambda) = \lambda^6 + 3.3\lambda^5 + 3.87\lambda^4 + 1.904\lambda^3 + 0.354\lambda^2 + 0.014\lambda - 0.001 = 0, \quad a_4 = 1,$$

матрица Гурвица для которого имеет вид:

$$\mathbf{M}_{P_6} = \begin{pmatrix} 0.014 & -0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.904 & 0.354 & 0.014 & -0.001 & 0 & 0 \\ 3.3 & 3.87 & 1.904 & 0.354 & 0.014 & -0.001 \\ 0 & 1 & 3.3 & 3.87 & 1.904 & 0.354 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3.3 & 3.87 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим главные диагональные миноры матрицы Гурвица: $\Delta_1 = 0.014 > 0$; $\Delta_2 = 0.007 > 0$; $\Delta_3 = 0.012 > 0$; $\Delta_4 = 0.039 > 0$; $\Delta_5 = 0.106 > 0$. Следовательно, при данных вероятностях многочлен $P_6(\lambda)$ является устойчивым, а задача (1), (2) асимптотически устойчива.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Афанасьев В.Н. и др. (1998): Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа.

Васильев А.Н. (2001): Модель самоорганизации рынка труда // *Экономика и мат. методы*. Т 37. № 2.

Семенчин Е.А., Зайцева И.В. (2004): Математическая модель самоорганизации рынка труда для двух отраслей экономики // *Экономика и мат. методы*. Т. 40. № 4.

Поступила в редакцию
18.01.2006 г.