ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2007, том 43, № 2, с. 57–75

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

МЕЖОТРАСЛЕВЫЕ МОДЕЛИ И ТЕОРИЯ КЛЮВОВ

© 2007 г. Э. Б. Ершов
(Москва)

Показывается, что для балансовых и оптимизационных, статических и динамических межотраслевых моделей множества их допустимых решений при естественных допущениях содержат особые решения, называемые клювами. Используются определения и утверждения, содержащиеся в (Ершов, 2002, 2007).

ВВЕДЕНИЕ

Взаимодействия в многоотраслевой экономике отображаются с помощью межотраслевых и более общих, включающих их как блоки, интегрированных моделей. Такие модели представляют собой достаточно сложный и в то же время изученный объект, для которого характерным свойством является неубывание объемов текущих затрат, объемов первичных факторов (труда и капитала) и невоспроизводимых природных ресурсов, необходимых для получения отраслевых выпусков в зависимости от их объемов. Это свойство проявляется, если производственные факторы и затраты, а также результаты, т.е. выпуски, измеряются в так называемых физических единицах или в некоторых фиксированных ценах. Именно свойство неубывания затрат вместе с простыми свойствами неравенств, обобщающих балансовые соотношения, позволяют в межотраслевых моделях использовать слабомонотонные по невыделенным аргументам нульслотовые и однослотовые функции. Другие свойства допустимых множеств решений, т.е. непустота, ограниченность и замкнутость, обеспечивающие существование у таких множеств клювов, представляют собой обычные свойства балансово-эконометрических моделей и их оптимизационных обобщений.

Покажем, что межотраслевые модели представляют собой объект, для изучения свойств и нахождения решений которых естественно использовать подход, связанный с клювами.

1. СТАТИЧЕСКИЕ МЕЖОТРАСЛЕВЫЕ МОДЕЛИ

Проиллюстрируем существование клювов на примерах наиболее известных по публикациям типовых статических межотраслевых моделей. История таких моделей началась со статической модели межотраслевого баланса В.В. Леонтьева (Leontief, 1936, 1941), представленной системой линейных уравнений распределения продукции n отраслей

$$X = aX + Y, \tag{1}$$

с n неизвестными $X = (x_i)$, в которой неотрицательна матрица коэффициентов прямых (текущих) затрат (a) со спектральным радиусом $\rho(a) < 1$. Элементарным обобщением этой модели является модель, задаваемая системой неравенств:

$$X \geq aX + Y, \quad X \geq 0, \tag{2}$$

определяющих допустимое множество Ω ее решений, при условии, что $(a) \geq 0$ и $\Omega \neq \varnothing$, имеет мини-клюв $\check{X}(\Omega)$, так как множество Ω очевидным образом удовлетворяет условиям теорем 1 и 2 о клювах (Ершов, 2002, 2007).

Напомним, что непустое множество Ω в n-мерном вещественном пространстве R_n точек $X \equiv (x_i)$ имеет мини-клюв, если существует принадлежащая ему точка $\check{X} \equiv (\check{x}_i)$, $\hat{X} \in \Omega$, такая, что для любой точки $Y \equiv (y_i) \in \Omega$ выполнена система неравенств $\check{x}_i \leq y_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Для макси-клюва $\hat{X} \equiv (\hat{x}_i) \in \Omega$ требуется выполнение неравенств $\hat{x}_i \geq y_i$, $i = 1, \ldots, n$. Достаточные условия существования у множества Ω мини- или макси-клюва в наиболее простой форме представляются в виде следующих утверждений.

Теорема 1 о клювах. *Множество* $\Omega \subset R_n$ *имеет мини-клюв* (*макси-клюв*), *если оно*: *непусто*; *ограничено снизу* (*сверху*); *замкнуто*; *замкнуто относительно бинарной операции покоординатной минимизации* (*максимизации*), *определенной для пары точек* X^{I}, X^{II} *следующим образом*:

$$X^{\mathrm{I,\,II}} \equiv \min(X^{\mathrm{I}};\, X^{\mathrm{II}}) \equiv (x_i^{\mathrm{I,\,II}}) = (\min(x_i^{\mathrm{I}};\, x_i^{\mathrm{II}}))\ (\textit{или}\ X^{\mathrm{I,\,II}} \equiv \max(X^{\mathrm{I}};\, X^{\mathrm{II}}) \equiv (x_i^{\mathrm{I,\,II}}) = (\max(x_i^{\mathrm{I}};\, x_i^{\mathrm{II}}))),$$

где $X^{\mathrm{I}} \equiv (x_i^{\mathrm{I}})$, $X^{\mathrm{II}} \equiv (x_i^{\mathrm{II}})$, *т.е. из* $X^{\mathrm{I}} \in \Omega$, $X^{\mathrm{II}} \in \Omega$ *следует* $\min(X^{\mathrm{I}};\, X^{\mathrm{II}}) \in \Omega$.

Теорема 2 о клювах. *Непустое множество* $\Omega \subset R_n$ *замкнуто относительно операции* $\min(X^{\mathrm{I}};\, X^{\mathrm{II}})$ (*или* $\max(X^{\mathrm{I}};\, X^{\mathrm{II}})$), *если оно задается системой неравенств*

$$f_\alpha(x_{i(\alpha)};\, X^{i(\alpha)}) \geq > 0, \quad \alpha = 1, \ldots, N,$$

где символ "$\geq>$" *означает*, *что в неравенстве* α *используется один из символов* "$\geq$" *или* "$>$", $i(\alpha)$ – *номер выделенной для функции* f_α *переменной* (*номер* $i(\alpha)$ *может быть не определен*), $X^{i(\alpha)}$ – *набор переменных* x_k, $k \neq i(\alpha)$, *и выполняются условия*:

– *область определения* ω_α *функции* $f_\alpha(X)$ *замкнута относительно выбранной операции*;

– *функция* $f_\alpha(x_{i(\alpha)};\, X^{i(\alpha)})$ *невозрастающая* (*неубывающая*) *по* x_k, $k \neq i(\alpha)$.

Выделенный аргумент $x_{i(\alpha)}$, по которому к функции $f_\alpha(X)$ не предъявляются требования неубывания или невозрастания, называют слотовой переменной, или *слотом*. Свойство невозрастания функции f по переменной x_j будем обозначать чертой под x_j, свойство неубывания – чертой над x_j. Тогда $f(x_i, \underline{X}^i)$ – невозрастающая по x_k, $k \neq i$, функция. В дальнейшем используется обозначение $\underline{MA}$ для множества точек $X \equiv (x_i)$, удовлетворяющих при заданной точке $A \equiv (a_i)$ системе неравенств $a_i \leq x_i$, $i = 1, \ldots, n$, и $\overline{MA}$, если $x_i \leq a_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Естественным обобщением моделей (1) и (2) является модель, в которой каждый межотраслевой поток затрат x_{ij} ($i, j = 1, \ldots, n$) – это неубывающая функция выпуска X_j в отрасли j или, в более общем случае, сумма потоков $\sum_j x_{ij}$ продукции отрасли i является неубывающей, но не обязательно сепарабельной функцией $\psi_i(X)$ переменных $x_1, \ldots, x_n$ (Ершов, 1963; Sandberg, 1973; Lahiri, 1976, 1977; Бусыгин, 1976; Багриновский, 1977; Багриновский, Бусыгин, Радченко, 1978; Багриновский, Бусыгин, 1980). Отметим, что предположение о возрастании по всем аргументам суммы $\sum_j x_{ij}$, считающейся, как правило, сепарабельной ($\sum_j x_{ij} \equiv \sum_j x_{ij}(x_j)$), является стандартным для линейных и нелинейных, статических и динамических межотраслевых моделей.

Множество Ω допустимых решений такой обобщенной модели, в которой конкретизируется вид функций $\psi_i(X)$, задается системой неравенств:

$$f_i(X) \equiv x_i - \psi_i(X) - Y_i \geq 0, \quad x_i \geq 0, \tag{3}$$

в которых x_i – выделенная переменная для однослотовых и не возрастающих по невыделенным аргументам функций $f_i(X) \equiv f_i(x_i;\, \underline{X}^i)$ и $g_i(\bar{x}_i) \equiv x_i \geq 0$. Очевидно, что если Ω непусто, то существует мини-клюв $\check{X}(\Omega)$. Если $Y > 0$ и $\psi_i(0) \geq 0$, то мини-клюв $\check{X}(\Omega)$ – одно из неотрицательных решений в общем случае нелинейной системы уравнений $F(X) \equiv X - \psi(X) - Y = 0$ и даже мини-клюв для множества $\Omega F(X) \cup \overline{MO}$, где $O = (0, \ldots, 0) \in R_n$ и $\Omega F(X)$ – множество всех решений системы $F(X) = 0$.

Частными случаями моделей этого класса, помимо модели (2), являются:

– модель межотраслевых взаимодействий (Яременко, Ершов, Смышляев, 1975) и ее оптимизационные варианты, для которых потоки x_{ij} задаются линейными уравнениями

$$x_{ij} = a_{ij}^0 + a_{ij}^i x_i + a_{ij}^j x_j$$

с неотрицательными коэффициентами a_{ij}^i при переменной x_i, моделирующей влияние фактора предложения, и a_{ij}^j при x_j как переменной, отражающей фактор спроса, или, точнее, функциями $x_{ij} = \max(0;\, a_{ij}^0 + a_{ij}^i x_i + a_{ij}^j x_j)$, а сами потоки включаются в уравнения (1) или в неравенства

$$x_i \geq \sum_j x_{ij} + Y_i, \quad i = 1, \ldots, n; \tag{4}$$

– модель взаимодействия межотраслевых потоков (Ершов, 1991), в которой

$$x_{ij} = \max\left(0;\ a_{ij}^0 + \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k x_{jk} + \sum_{l=1}^{m} \tilde{a}_{ij}^l Y_{jl}\right),$$

Y_{jl} – задаваемые отраслевые компоненты, $j = 1, \ldots, n$, функционального элемента l конечного продукта, коэффициенты a_{ij}^k и $\tilde{a}_{ij}^l$ неотрицательны, а множество допустимых решений Ω задается системой неравенств (4) и $x_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$. При $a_{ij}^0 = 0$ и $a_{ij}^k = \tilde{a}_{ij}^l \equiv a_{ij} \geq 0$ модель взаимодействия межотраслевых потоков превращается в обычную оптимизационную модель Леонтьева (2) или, если используются равенства, в модель (1), поскольку в таком случае $x_{ij} = a_{ij}(\sum_k x_{jk} + \sum_l Y_{jl}) \equiv a_{ij}x_j$.

Гипотеза использования в каждой отрасли одной средней линейной производственной технологии, на которой основывается модель Леонтьева, была заменена в модели, предложенной П. Самуэльсоном (Samuelson, 1951), на гипотезу существования в отрасли j нескольких линейных технологий с номерами $\lambda \in r(j)$. Допустимое множество Ω решений этой модели задается системой неравенств:

$$\Omega:\ \sum_{l \in r(i)} x_i^\lambda \geq \sum_j \left(\sum_{\lambda \in r(j)} a_{ij}^\lambda x_j^\lambda\right) + Y_i, \quad i = 1, \ldots, n;$$
$$x_j^\lambda \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad \lambda \in r(j). \tag{5}$$

В ней x_j^λ – интенсивность использования в отрасли j технологии с номером-шифром λ, $r(j)$ – множество шифров таких технологий, коэффициенты затрат a_{ij}^λ и элементы Y_i вектора $Y = (Y_i)$ конечного продукта неотрицательны, и минимизируется критериальная функция $\sum_j \sum_{\lambda \in r(j)} c_j^\lambda x_j^\lambda$ с положительными коэффициентами c_j^λ, экономическая интерпретация которых не влияет на свойства модели.

Ряд исследователей, развивающих математическую экономику как направление экономической науки, в том числе П. Самуэльсон, К. Эрроу, Н. Джоржеску-Роэген, Т. Купманс, в статьях, включенных в “Cowles Commission Monograph № 13” (см. (Ершов, 2007)), а затем С. Карлин (Карлин, 1964, § 8.5) и К. Ланкастер (Ланкастер, 1972, § 6.7) показали, что двойственная к этой модели задача линейного программирования имеет оптимальное решение $p^{opt} = (p_j^{opt})$, которое не зависит от вектора Y. Это приводит к разделению технологий каждой отрасли на всегда отсутствующие в оптимальном решении (при любом Y) или неоптимальные, неэффективные технологии и оптимальные технологии, которые могут появляться в оптимальном решении. Даже использование только одной из оптимальных технологий в каждой отрасли обеспечивает нахождение одного из оптимальных решений модели. В какой-то мере это свойство оправдывало в рамках принятых допущений гипотезу существования единственной, средней технологии в каждой отрасли.

Основное свойство модели (5) – независимость разделения технологий на оптимальные и неоптимальные от вектора конечного продукта – оказывается простым следствием того факта, что двойственная задача линейного программирования с допустимым множеством решений $\tilde{\Omega}$:

$$\tilde{\Omega}:\ p_j \geq 0, \quad \sum_i p_i a_{ij}^\lambda - p_j + c_j^\lambda \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad \lambda \in r(j), \tag{6}$$

на котором максимизируется критерий $\sum_j p_j Y_j$, имеет макси-клюв $\hat{p}(\Omega)$. Его координаты очевидным образом не зависят от координат вектора $Y = (Y_j)$, как от параметров параметров критериальной функции.

Идеи и методы линейного программирования многократно использовались при формулировании, анализе свойств и нахождении решений оптимизационных межотраслевых моделей. Возможно, наиболее характерным примером из множества таких моделей, описывающих состояние межотраслевой системы в одном году, одном периоде, является *модель экономного планирования*, предложенная в (Юдин, Гольштейн, 1961). Она задается системой уравнений для межотраслевых потоков x_{ij} и объемов капитальных затрат K_{ij} продукции отрасли i, расходуемой в отрасли j:

$$x_{ij} = \max_{\alpha}(a_{ij}^{0,\alpha} + a_{ij}^{\alpha}x_j), \quad \alpha = 1, \ldots, n_j, \quad K_{ij} = \max_{\beta}(b_{ij}^{0,\beta} + b_{ij}^{\beta}x_j), \quad \beta = 1, \ldots, m_j, \tag{7}$$

где $x_{ij}(0) = 0$, $K_{ij}(x_j) = 0$ при $0 \le x_j \le x_j^0$ и коэффициенты a_{ij}^{α}, b_{ij}^{β} предполагаются неотрицательными, а также неравенствами:

$$\begin{gathered} x_i \ge \sum_j x_{ij} + \sum_j K_{ij} + Y_i, \quad i = 1, \ldots, n; \\ U_r \ge \sum_j u_{rj}(x_j), \quad j = 1, \ldots, R, \end{gathered} \tag{8}$$

в которых U_r – объем невоспроизводимого ресурса r, $u_{rj}(x_j)$ – кусочно-линейная функция выпуска x_j, задаваемая в том же виде, что и функции $x_{ij}(x_j)$ и $K_{ij}(x_j)$, т.е.

$$r_{rj} = \max_{\gamma}(d_{rj}^{0,\gamma} + d_{rj}^{\gamma}x_j), \quad \gamma = 1, \ldots, l_j. \tag{9}$$

Функции x_{ij}, K_{ij} и u_{rj} предполагались при $x_j \ge 0$ неотрицательными и выпуклыми функциями переменной x_j, так же как и функции $c_j(x_j) \equiv \max_{\delta}(c_j^{0,\delta} + c_j^{\delta}x_j)$, образующие минимизируемый критерий $\sum_j c_j(x_j)$. Это предположение позволило Д.Б. Юдину и Е.Г. Гольштейну представить модель экономного планирования в виде задачи линейного программирования с неотрицательными переменными x_j, x_{ij}, K_{ij}, u_{rj}, Z_j и Z ($i, j = 1, \ldots, n$; $r = 1, \ldots, R$):

$$\min Z;$$

$$\begin{gathered} x_j \ge \sum_j x_{ij} + \sum_j K_{ij} + Y_i; \quad x_{ij} \ge a_{ij}^{0,\alpha} + a_{ij}^{\alpha}x_j; \quad \alpha = 1, \ldots, n_j; \\ K_{ij} \ge b_{ij}^{0,\beta} + b_{ij}^{\beta}x_j; \quad \beta = 1, \ldots, m_j; \quad u_{rj} \ge d_{rj}^{0,\gamma} + d_{rj}^{\gamma}x_j; \quad \gamma = 1, \ldots, l_j; \\ Z_j \ge c_j^{0,\delta} + c_j^{\delta}x_j; \quad \delta = 1, \ldots, q_j; \quad \sum_j Z_j \le Z; \quad i, j = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{10}$$

Для задачи (10) они предложили специальный метод нахождения оптимального решения, учитывающий ее структуру.

Специфическое свойство модели экономного планирования становится очевидным, если рассматривать общую модель, частным случаем которой является модель (10), допустимое множество решений Ω для которой задается системой неравенств:

$$\Omega: \begin{gathered} x_i \ge \sum_j x_{ij}(x_j) + \sum_j K_{ij}(x_j) + Y_i, \quad i = 1, \ldots, n, \\ U_r \ge \sum_j u_{rj}(x_j), \quad r = 1, \ldots, R, \end{gathered} \tag{11}$$

в которых x_{ij}, K_{ij} и u_{rj} – непрерывные, неубывающие и неотрицательные при $x_j \ge 0$ функции переменной x_j, не предполагаемые выпуклыми, или даже системой неравенств:

$$\Omega: x_i \ge F_i(X) + Y_i, \quad U_r \ge U_r(X), \quad x_i \ge 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad r = 1, \ldots, R, \tag{12}$$

где $F_i(X)$, $U_r(X)$ – непрерывные, неубывающие и неотрицательные функции переменных $x_1, \ldots, x_n$, определенные при $X \ge 0$.

Непустые по предположению множества Ω допустимых решений (11) или (12) удовлетворяют, как легко убедиться, условиям теорем 1 и 2 о мини-клювах. Следовательно, мини-клювы $\check{X}(\Omega)$ существуют, и при $Y > 0$, $F(0) = 0$ они являются мини-клювами для балансовых вариантов этих моделей $X = F(X) + Y$, поскольку допустимые, т.е. неотрицательные, решения таких моделей оказываются положительными, так как $X \geq Y$.

Завершим раздел, посвященный статическим межотраслевым моделям, рассмотрением возможного объединения идей, используемых в моделях Самуэльсона и экономного планирования. Пусть в отрасли j технология может реализовываться по вариантам с номерами λ_j, $\lambda \in r(j)$, $\dim r(j) = m_j$, и затраты продукта i представляются непрерывной и неубывающей функцией $g_{ij}^{\lambda}(x_j^{\lambda})$ от объема продукции x_j^{λ}, производимого по технологии λ_j. В статической постановке модели функции g_{ij}^{λ} могут включать как текущие, так и капитальные затраты. Тогда ограничения, выражающие допустимые распределения производимой продукции, задаются в виде неравенств:

$$\sum_{\lambda \in r(i)} x_i^{\lambda} \geq \sum_j \sum_{\lambda \in r(i)} g_{ij}^{\lambda}(x_j^{\lambda}) + y_j, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{11а}$$

рассматриваются ограничения по R невоспроизводимым ресурсам:

$$U_r \geq \sum_j \sum_{\lambda \in r(i)} u_{rj}^{\lambda}(x_j^{\lambda}), \quad r = 1, \ldots, R, \tag{12б}$$

а на переменные накладываются требования неотрицательности:

$$x_i^{\lambda} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \lambda \in r(i), \quad m_i = \dim r(i) \tag{11в}$$

В естественных предположениях $y_i > 0$, $g_{ij}^{\lambda}(x_j^{\lambda}) \geq 0$, $g_{ij}^{\lambda}(0) = 0$ и $u_{\tau j}^{\lambda}(x_j^{\lambda}) \geq 0$, $u_{\tau j}^{\lambda}(0) = 0$ будем выбирать в каждой отрасли только одну технологию так, чтобы на множестве Ω, определенном условиями (11а), (12б) и (11в), принимал наименьшее значение критерий $G(x_i^1, \ldots, x_n^{m_n}) \equiv G(z)$ – возрастающая по аргументам x_j^{λ} функция. Очевидно, что использование нескольких технологий в любой отрасли, так же как в модели Самуэльсона, не может привести к уменьшению минимального на Ω значения критерия G, хотя смеси технологий могут образовывать оптимальные решения. Но анализ оптимальных решений в случае, если не постулируется единственность применяемой в отрасли технологии, затруднен тем, что от функций g_{ij}^{λ}, y_{rj}^{λ} требуются лишь непрерывность и неубывание по всем аргументам. А это делает бесперспективными попытки сформулировать двойственную задачу по отношению к исходной оптимизационной задаче. Конечно, предполагается непустота множества Ω.

Пусть $\Lambda = \{\lambda(1), \ldots, \lambda(n)\}$ – набор индексов применяемых в отраслях технологий, $\lambda(i) \in r(i)$. Множества таких наборов, для которых ограничения (11а), (12б), (11в) совместны с ограничениями $x_i^{\lambda} = 0$ при $\lambda \neq \lambda(i)$, будем обозначать J. Для $\Lambda \in J$ непустое множество допустимых решений модели обозначим $\Omega(\Lambda)$. Для $\Omega(\Lambda)$ из теорем 1 и 2 о клювах следует существование мини-клюва $\check{Z}(\Omega(\Lambda)) \in \Omega(\Lambda)$, координатами которого в N-мерном пространстве $R_N(N \equiv \sum_i m_i)$ являются интенсивности технологий $x_i^{\lambda(i)} > 0$ и $x_i^{\lambda} = 0$, $\lambda \neq \lambda(i)$, $i = 1, \ldots, n$. Следовательно, множество мини-клювов $\check{Z}(\Omega(\Lambda)) \equiv \check{Z}(\Lambda)$, $\Lambda \in J$, представляет собой множество оптимальных решений рассматриваемой модели с любыми возрастающими критериями $G(z)$. Это подмножество множества Ω можно обозначать $(\mathrm{Min}\,\Omega^+)$ и называть Парето-оптимальным подмножеством для Ω и возрастающих функций $G(z)$. Для выбранного критерия множеством оптимальных решений является $\operatorname{Argmin}_{\Lambda \in J} G(\check{Z}(\Lambda))$.

Рассмотренная обобщенная модель экономного планирования по свойствам оптимальных решений отличается от модели Самуэльсона и исходного варианта модели экономного планирования. Для модели Самуэльсона множество технологий, применяемых в оптимальных решениях, не зависит от вектора конечного продукта y, но зависит от минимизируемого критерия. Для модели экономного планирования существует решение – мини-клюв, зависящий от вектора y, которое определяется независимо от задания минимизируемого критерия. Обобщенная модель экономного планирования имеет при фиксированном векторе y конечное множество характерных решений $\check{Z}(\Lambda)$, $\Lambda \in J$, совпадающее с множеством оптимальных решений модели с любыми возрастающими критериями $G(z)$.

Обобщенная модель экономного планирования (или обобщенная модель Самуэльсона) наглядно иллюстрирует введенное в (Ершов, 2002, 2007) понятие S-клюва, базирующееся на разбиении индексов k, рассматриваемых переменных z_k, $k = 1, \ldots, N$, на непересекающиеся множества S^-, S^0, S^+. Напомним, что множество $B(\Omega; S)$ точек $Z \in \Omega \subset R_N$ называется обобщенным или S-клювом, если для любой точки $\tilde{z} \equiv (\tilde{z}_k) \in B(\Omega; S)$ имеем

$$\tilde{z}_k = \min_{z \in \Omega} z_k \quad \text{при} \quad k \in S^-, \quad \tilde{z}_k = \max_{z \in \Omega} z_k \quad \text{при} \quad k \in S^+,$$

и на $\tilde{z}_k$, $k \in S^0$, ограничения не накладываются. При заданном наборе $\Lambda = \{\lambda(1), \ldots, \lambda(n)\}$ индексов используемых технологий, $\Lambda \in J$, непустое множество допустимых решений $\Omega(\Lambda)$ этой модели, как легко увидеть, представляет собой S-клюв $B(\Omega; S(\Lambda))$, определяемый разбиением $S(S^-; S^0; S^+)$, для которого S^0 состоит из индексов неиспользуемых технологий, т.е. составных индексов переменных $z_k \equiv x_i^\lambda$, $\lambda \neq \lambda(i) \in \Lambda$, $S^- = \Lambda$ и $S^+ = \varnothing$. В свою очередь, множества $\Omega(\Lambda) \equiv B(\Omega; S(\Lambda))$ сами имеют мини-клювы $\check{Z}(\Omega(\Lambda))$, которые и образуют множество (MinΩ^+).

2. ДИНАМИЧЕСКИЕ МЕЖОТРАСЛЕВЫЕ МОДЕЛИ

Динамические межотраслевые модели отличаются от статических тем, что в их уравнениях, образующих блоки для последовательных лет, обычно используются переменные (как правило, это отраслевые объемы годовых капитальных вложений (инвестиций) и вводов основных фондов на конец года) для лет, предшествующих году t, для которого моделируется распределение продукции, или некоторые из таких переменных для лет, следующих за этим годом. Динамические модели не удается, как это будет видно из дальнейшего, представить в виде систем неравенств, в которых используются только нульслотовые и однослотовые, невозрастающие или неубывающие по невыделенным аргументам функции. Следовательно, в их исходных, не использующих дополнительные предположения вариантах такие модели не должны иметь и не имеют клювов.

Но у динамических моделей имеется важная особенность. При подготовке исходных данных, предназначенных для целей прогнозирования, необходимо задать согласованные траектории параметров или изменения используемых функциональных, не обязательно линейных зависимостей. Согласованные в широком смысле траектории, т.е. не только между собой, но и по отношению к сценарным гипотезам, принимаемым при задании значений экзогенных переменных для прогнозируемого периода. В то же время для прошедших лет, если в них происходили существенные изменения, предполагаемые постоянными параметры динамических моделей, оцениваемые статистическими методами, порождают модельные траектории, сильно отличающиеся от фактических траекторий основных переменных модели. Отказ же от гипотезы постоянства параметров приводит к необходимости выбрать класс функций, содержащих свои оцениваемые параметры, с помощью которых можно определять исходные или первичные и уже непостоянные параметры. При этом принимаемые гипотезы должны допускать содержательную экономическую интерпретацию, а в идеале даже обоснованный выбор между конкурирующими вариантами наборов таких гипотез.

В этих условиях принимаются достаточно простые гипотезы об используемых зависимостях и их параметрах. Фактически это приводит к тому, что динамические межотраслевые модели не предназначаются для предсказания или пост-прогнозирования с высокой точностью взаимосвязанных годовых итогов функционирования экономики для последовательности лет прогнозируемого или анализируемого периода. С помощью таких моделей, если разрабатываются количественно определенные, а не символические их варианты, выявляются лишь общие тенденции, отображаемые в динамиках и в соотношениях переменных. Понимание реальных возможностей и назначения динамических межотраслевых моделей с заведомо большим числом экзогенно задаваемых параметров позволяет существенно ограничивать классы рассматриваемых траекторий значений хотя бы части их переменных. Целесообразность параметрического задания достаточно простых классов траекторий, т.е. перехода к их определению с помощью меньшего числа параметров по сравнению с числом элементов траекторий переменных, исследовалась и обосновывалась многими авторами, например (Багриновский, 1968, 1969; Аганбегян, Багриновский, Гранберг, 1972, гл. V).

В целом ряде динамических межотраслевых моделей траектории всех или части переменных определяются с помощью относительно простых функций времени, главным образом линейных, параболических или экспоненциальных, характеризующихся постоянством первых или вторых разностей или темпов роста (Боярский, 1962, очерк X; Конюс, 1964, 1965, гл. 4; Беленький, Волконский, Павлов, 1972; Lahiri, 1977).

Траектории переменных, моделируемые с помощью функций от времени с небольшим числом параметров, значения которых можно включать в число переменных или параметров динамических моделей без необоснованного усложнения таких моделей и методов нахождения их решения, будем называть *регулярными траекториями*. Если для таких функций известны их значения для базового и, быть может, предшествующего года (в случае параболической функции, т.е. квадратичного многочлена от времени), то порождаемые ими траектории определяются значением одного параметра, рассматриваемого в качестве одной из переменных модели. Это обеспечивает возникновение нужных свойств у используемых функций, на которых основываются достаточные условия существования клювов.

Приведем типичные примеры динамических межотраслевых моделей, имеющих клювы. Простейшие динамические модели межотраслевого баланса связывают инвестиционные затраты отраслей непосредственно с годовыми приростами объемов продукции и задаются одной из систем уравнений (Leontief, 1941, 1970; Ланге, 1961; Конюс, 1961; Смирнов, 1965; Tsukui, 1968; Берри, Лотош, 1971; Коссов, 1973; Коош, 1973; Смехов, Уринсон, 1976, гл. 13; Ершов, Рутковская, 1978):

$$X^t = a^t X^t + b^t (X^t - X^{t-1}) + Y^t, \tag{13а}$$

$$X^t = a^t X^t + c^t (X^{t+1} - X^t) + Y^t \tag{13б}$$

или даже

$$X^t = a^t X^t + b^t (X^t - X^{t-1}) + c^t (X^{t+1} - X^t) + Y^t, \tag{13в}$$

где $t = 1, \ldots, T$; вектор X^0 известен; матрицы a^t, b^t и c^t неотрицательны и для моделей (13а) и (13в) на вектор выпусков X^{T+1} в году $T + 1$ накладывается дополнительное, терминальное условие, ограничивающее его элементы снизу. Такое условие задается, например, с помощью соотношений $X^{T+1} = X^{T+1,0}$, где $X^{T+1,0}$ – задаваемый вектор, или $X^{T+1} - X^T = X^T - X^{T-1}$.

Очевидно, что эти модели интерпретируются только в предположении о неубывании во времени выпусков x_i^t каждой отрасли, т.е. при неотрицательности инвестиционных затрат, зависящих от векторов приростов $\Delta X^t = X^t - X^{t-1}$ и $\Delta X^{t+1} = X^{t+1} - X^t$. Для оптимизационных вариантов этих моделей, получаемых заменой равенств в уравнениях распределения продукции на неравенства "≥", добавлением требований неотрицательности векторов $\Delta X^t (t = 1, \ldots, T)$ и терминального ограничения $\Delta X^T \ge 0$ или $\Delta X^{T+1} \ge \Delta X^T$, как легко видеть, множества допустимых решений не обязаны быть замкнутыми относительно операции покоординатной минимизации. Действительно, в задающих модели неравенствах, например в неравенствах

$$f_i^t(X) \equiv x_i^t - \sum_j a_{ij}^i x_j^t - \sum_j b_{ij}^t (x_j^t - x_j^{t-1}) - \sum_j c_{ij}^t (x_j^{t+1} - x_j^t) - Y_i^t \ge 0,$$

имеется несколько переменных, по которым функция $f_i^t(X)$ не является невозрастающей.

Однако, если принять подходящую упрощающую гипотезу о траекториях переменных x_j, например:

– *линейную гипотезу*, согласно которой

$$x_i^t = x_i^0 + t\Delta x_i, \quad t = 1, \ldots, T+1, \text{ и } \Delta x_i \ge 0; \tag{14а}$$

– *параболическую гипотезу*, при которой

$$x_i^t = x_i^0 + (x_i^1 - x_i^{-1}) 0.5t + [(x_i^1 + x_i^{-1}) 0.5 - x_i^0] t^2, \tag{14б}$$

где известны x_i^0, x_i^{-1}; x_i^1 – переменная, задающая траекторию $\{x_i^t\}$; и выполняются неравенства $x_i^0 \geq x_i^{-1} > 0$ и $x_i^1 \geq 2x_i^0 - x_i^{-1}$, обеспечивающие неубывание положительной траектории $\{x_i^t\}$ при $t \geq 0$;

– *экспоненциальную гипотезу*, базирующуюся на постоянстве темпа роста z_i для объема продукции x_i отрасли i, т.е.

$$x_i^1 = x_i^0 \times (z_i)^t, \quad t = 1, \ldots, T+1, \quad \text{при ограничении} \quad z_i \geq 1, \tag{14в}$$

то модели (13а)–(13в) трансформируются в модели, содержащие соответственно переменные Δx_i, x_i^1 или z_i, $i = 1, \ldots, n$, для которых выполняются условия теоремы 2 о мини-клюве. Покажем это на примере наиболее общей модели (13в).

Получаемые с использованием гипотез (14а)–(14в) модели представляются следующими системами неравенств:

– при линейной гипотезе:

$$\begin{gathered} f_i^t(\Delta X) \equiv x_i^0 + t\Delta x_i - \sum\nolimits_j a_{ij}^t(x_i^0 + t\Delta x_j) - \sum\nolimits_j (b_{ij}^t + c_{ij}^t)\Delta x_j - Y_i^t \geq 0, \\ \Delta x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n; \quad t = 1, \ldots, T; \end{gathered} \tag{15а}$$

– при параболической гипотезе:

$$\begin{gathered} f_i^t(X^1) \equiv \sum_j (\delta_{ij} - a_{ij}^t)\{(x_j^1 - x_j^{-1})0.5t + [(x_j^1 - x_j^{-1})0.5 - x_j^0]t^2\} - \\ - 0.5\sum_j (b_{ij} + c_{ij}^t)(x_j^1 - x_j^{-1}) - \sum_j [b_{ij}^t(2t-1) + c_{ij}^t(2t+1)][0.5(x_j^1 - x_j^{-1}) - x_j^0] - Y_i^t \geq 0, \\ x_i^1 \geq 2x_i^0 - x_i^{-1}, \quad i = 1, \ldots, n; \quad t = 1, \ldots, T; \end{gathered} \tag{15б}$$

– при экспоненциальной гипотезе:

$$\begin{gathered} f_i^t(z) \equiv \sum_j (\delta_{ij} - a_{ij}^t)x_j^0 z_j^t - \sum_j b_{ij}^t x_j^0 z_j^{t-1}(z_j - 1) - \sum_j c_{ij}^t x_j^0 z_j^t(z_j - 1) - Y_i \geq 0, \\ z_i \geq 1, \quad i = 1, \ldots, n; \quad t = 1, \ldots, T. \end{gathered} \tag{15в}$$

В системах (15а)–(15в) функции $f_i^t(\Delta X)$, $f_i^t(X^1)$ и $f_i^t(z)$ переменных $\Delta X = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$, $X^1 = (x_1^1, \ldots, x_n^1)$ и $z = (z_1, \ldots, z_n)$ соответственно не возрастают по аргументам с номерами j, отличными от номера выделенного аргумента однослотовой функции i. Конечно, невозрастание здесь является следствием ограничений $\Delta x_i \geq 0$, $x_i^1 \geq 2x_i^0 - x_i^{-1}$ и $z_i \geq 1$, накладываемых на переменные моделей.

Более сложные динамические модели базируются на взаимозависимости между траекториями отраслевых инвестиций (капиталовложений), вводов и выбытий основных фондов и объемов основных фондов (капитала) в отраслях в среднегодовом выражении, на конец и начало года. Принято выделять модели следующих двух типов.

Если капитальные вложения в основные фонды отрасли в году t определяются будущей траекторией вводов основных фондов, т.е. брутто-приростов капитала в этой отрасли, прогнозируемой с помощью динамической межотраслевой модели, то независимо от выбора конкретной формы такой связи линейные, по предположению, модели этого типа представляются в балансовых вариантах системами уравнений с опережающими значениями вводов основных фондов. Иногда в записи таких моделей используется оператор правого сдвига R, определяемый тождеством $R\xi_t = \xi_{t+1}$ для любой последовательности $\{\xi_t\}$. Модели этого типа естественно называть моделями типа R или F-моделями, используя термин “FUTURE”.

При естественном предположении о конечности продолжительности Q периода такого опережения типовая линейная R или F-модель задается:

– уравнениями распределения продукции отраслей в каждом году t периода $t \in [1; T]$:

$$X^t = a^t X^t + \sum_{\tau=0}^{Q} b^{t,\tau} B^{t+\tau} + Y^t, \quad t = 1, \ldots, T; \tag{16а}$$

– уравнениями баланса потребностей в капитале (основных фондах) и наличия капитала (обычно в среднегодовом выражении) в году t

$$\varphi^t X^t = h^t F^0 + \sum_{\tau=1}^{t} g^{t,\tau} B^{\tau}, \quad t = 1, \ldots, T, \tag{16б}$$

где h^t и $g^{t,\tau}$ – неотрицательные диагональные матрицы, с помощью которых отображаются процессы выбытия элементов капитала и его использования в году t, $F^0 = (F_j^0)$ – вектор объемов основных фондов в отраслях на момент начала прогнозируемого периода;

– терминальными требованиями к вводам основных фондов $B^{T+\tau}$, $\tau = 1, \ldots, Q$, в годы за пределами прогнозного периода, которые могут представляться, например, уравнениями

$$B_j^{T+\tau} = B_j^T, \quad B_j^{T+\tau} = B_j^T + \frac{\tau}{T}\sum_{\tau=0}^{T-1} B_j^t, \quad B_j^{T+\tau} = B_j^T + \frac{\tau}{T}\sum_{\tau=1}^{T} B_j^t \tag{16в}$$

или

$$B_j^{T+\tau} - B_j^{T+\tau-1} = (B_j^{T+\tau-1} - B_j^{T+\tau-2}) + \Delta^2 B_j,$$

где вторая разность $\Delta^2 B_j$ для вводов в отрасли j после года T, т.е. при $\tau \geq 1$ или $\tau \geq 2$, предполагается постоянной и неотрицательной. Она задается следующим образом: считается независимой переменной модели или определяется в виде линейной функции от $B_j^0, \ldots, B_j^T$. Отметим принципиальную возможность выбора для отраслей различных вариантов терминальных условий.

К моделям типа R относятся преимущественно динамические модели межотраслевого баланса, предлагавшиеся в работах советских экономистов для использования при выполнении предплановых расчетов (Баранов, 1968; Аганбегян, Багриновский, Гранберг, 1972; Матлин, Шулепникова, 1978; Гранберг, 1985, гл. 4, 5).

Динамические модели второго типа исходят из предположения о зависимости брутто-приростов капитала (основных фондов) в отрасли в году t от инвестиций в нее в предшествующие годы. Для моделирования таких зависимостей применяются уравнения с распределенными лагами, в которых используется лаговый оператор L: $L\xi_t \equiv \xi_{t-1}$. Такие модели естественно называть моделями типа “L” или P-моделями (от термина “PAST”).

В достаточно общем виде линейные по переменным, балансовые модели типа L представляются:

– уравнениями распределения продукции

$$X^t = a^t X^t + b^t K^t + Y^t, \quad t = 1, \ldots, T; \tag{17а}$$

– уравнениями баланса потребностей в капитале и его наличия в отраслях в годах периода (16б);

– уравнениями инвестиционного процесса с конечными ($Q < +\infty$) или бесконечными ($Q = +\infty$) запаздываниями

$$B^t = a^t X^t + \sum_{\tau=0}^{Q} \mu^{\tau} K^{t-\tau}, \tag{17б}$$

в которых капиталовложения K_j^t считаются известными при $t \leq 0$ и переменными при $t \geq 1$, а матрицы μ^{τ} предполагаются диагональными и неотрицательными.

Важным частным случаем уравнений (17б) являются уравнения распределенного геометрического лага

$$B_j^t = \mu_j^0 (E - q_j L)^{-1} K_j^t$$

с параметрами $\mu_j^0 > 0$ и $0 \le q_j < 1$. Эти уравнения включаются в модель в конечной форме

$$B_j^t = q_j B_j^{t-1} + \mu_j^0 K_j^t.$$

Предположение о полном превращении инвестиций во вводы основных фондов формализуется в виде равенства $\mu_j^0 \sum_{t=0}^{\infty} q_j^t \equiv \mu_j^0 / (1 - q_j) = 1$.

Разрешенность уравнений (17б) относительно переменных B_j^t позволяет подставить их в (16б) и представить типовую линейную P-модель системами уравнений (17а) и

$$\varphi^t X^t = h^t F^0 + \sum_{\tau=0}^{T+Q} \nu^{t,\tau} K^{t-\tau} \tag{18}$$

с очевидным образом определяемыми диагональными и неотрицательными матрицами h^t и $\nu^{t,\tau}$.

Модели типа L рассматривались преимущественно в работах, посвященных процессам, происходящим в экономиках капиталистических стран.

Общим для имеющих теоретическую ориентацию моделей типа R и L было то, что выбор вида зависимости между рядами инвестиций и брутто-приращений капитала делался из априорных соображений и единообразно для всех отраслей. Эта традиция была подвергнута проверке в (Ершов, Рутковская, 1978), но только применительно к условиям функционирования плановой экономики СССР. Исследование показало, что вполне допустимо дифференцировать выбор инвестиционных уравнений для отраслей, опираясь на методы эконометрического оценивания их параметров, т.е. применять динамические модели смешанного типа, или LR-модели.

Необходимо также иметь в виду, что к решениям балансовых межотраслевых моделей предъявлялось явно не формулируемое требование неотрицательности переменных, т.е. элементов векторов X^t, B^t и K^t. Это требование накладывало также не формулируемые ограничения на экзогенные переменные и параметры моделей, в том числе на динамику векторов конечного нетто-продукта Y^t, не включающего отраслевые инвестиции, на коэффициенты отраслевых среднегодовых фондоемкостей φ_j^t и коэффициенты h_j^t, отражающие процесс уменьшения со временем возможностей использования начального капитала F_j^0 в отрасли j. Учет ограниченности факторов труда и природных ресурсов, объемов, временной и отраслевой структуры незавершенного строительства, а также ряда других ограничений, в том числе характеризующих внешние экономические связи и обязательства страны, приводил к необходимости добиваться согласованности исходных данных модели, обеспечивающей хотя бы неотрицательность балансового решения.

Такая ситуация могла разрешаться двумя способами: неформализуемым, использующим постепенную, многоэтапно реализуемую корректировку исходных данных модели в процессе практических расчетов, что может приводить к осознанной или неосознанной подгонке модели под получение заранее выбранных качественных и даже количественных результатов; конструктивно реализуемым, применяющим переход к оптимизационной формулировке модели, к неравенствам вместо равенств, включению в модель требований неотрицательности значений ее основных переменных, к использованию минимальных корректировок исходных данных, к принятию упрощающих предположений о траекториях хотя бы части переменных с тем, чтобы компенсировать несогласованность значений ее параметров, которая может проявляться в виде трудно интерпретируемых, сильно или необъяснимо колеблющихся и даже недопустимых по содержательным соображениям траекторий переменных для балансовых вариантов моделей.

Оптимизационные версии моделей (16а), (16б) и (17а), (18), включающие требования неотрицательности их переменных и, если это необходимо, терминальные ограничения, содержат неравенства:

$$f_i^t(X;\ B) \equiv x_i^t - \sum_j \left(a_{ij}^t x_{ij}^t + \sum_{\tau = 0}^{Q} b^{t,\tau} B_j^{t+\tau} \right) - Y_i^t \geq 0, \tag{18а}$$

$$g_i^t(X;\ B) \equiv h_i^t F_i^0 + \sum_{\tau = 1}^{t} g^{t,\tau} B_i^t - \varphi_i^t x_i^t \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n; \quad t = 1, \ldots, T. \tag{18б}$$

Отметим, что функции g_i^t не убывают по переменным B_i^τ с разными τ. Поэтому множества допустимых вариантов этих моделей не подпадают под действие теоремы 2 о мини-клюве. Это приводит к необходимости обоснованного выбора критерия оптимизации и значений его параметров. Для многосекторных моделей теория, по-видимому, не дает возможности осуществить такой выбор на стадии подготовки модели ни в случае минимизируемого (затратного), ни в случае максимизируемого (полезностного) критерия.

Проблема выбора минимизируемого критерия оптимальности решается кардинально, если модель допускает модификацию, предположения которой не противоречат ее назначению и в то же время обеспечивают существование у нее безусловно оптимального решения – мини-клюва. Принятие охарактеризованных упрощающих гипотез о траекториях переменных B_i^t и K_i^t, которые выражались с помощью формул (14а)–(14в), оказываются для моделей (13а)–(13в) именно такими допущениями. Но применение этих допущений к моделям типа R и L дает возможность и даже необходимость уточнить требования, накладываемые на параметры, значения которых определяют соответствующие траектории. От траекторий переменных B_i^t и K_i^t, используемых в неравенствах (18б) R-моделей и в неравенствах

$$\sum_{\tau = 0}^{Q} \mu_i^\tau K_i^{t-\tau} - B_i^t \geq 0 \tag{19}$$

L-моделей, требуется неотрицательность и возможность представления сумм $\sum_{\tau = 1}^{t} g_i^{t,\tau} B_i^t$ или $\sum_{\tau = 0}^{Q} \mu_i^\tau K_i^{t-\tau}$ в виде функций нескольких переменных, разделяемых на одну выделенную, слотовую переменную и остальные, невыделенные переменные. Функция должна быть невозрастающей по невыделенным аргументам и может возрастать только по одной переменной. Указанные суммы этим требованиям не удовлетворяют.

Однако принятие по отношению к переменным B_i^t или K_i^t линейной, параболической или экспоненциальной гипотезы (общей или различных для разных отраслей) изменяет свойства функций, используемых в неравенствах (18б) и (19). Во-первых, траектории переменных, моделируемых с помощью этих гипотез, определяются значением всего одной переменной: ΔB_i или ΔK_i для линейной гипотезы; B_i^1 или K_i^1 для параболической гипотезы; темпа роста z_i^B или z_i^K для экспоненциальной гипотезы. От этой переменной зависят суммы $\sum_{\tau = 1}^{t} g_i^{t,\tau} B_i^t$ и $\sum_{\tau = 0}^{Q} \mu_i^\tau K_i^{t-\tau}$.

Во-вторых, неотрицательность коэффициентов в этих суммах позволяет считать функции, используемые в (18б) и (19), неубывающими по переменным, определяющим в R-моделях траектории $\{B_i^t\}$ и в L-моделях – траектории $\{K_i^1\}$, т.е. рассматривать эти переменные как слотовые. Но свойство неубывания по выделенной переменной не является необходимым для того, чтобы получаемые модели имели мини-клювы. Важнее тот факт, что условия неотрицательности параметризованных траекторий переменных выражаются в виде неравенств на переменные, представляющих собой частные случаи неравенств, используемых в формулировке теоремы 2 о мини-клювах. Очевидно, что ограничения $\Delta B_i \geq -B_i^0/T$ и $z_i^B \geq 0$ (если $B_i^t \equiv B_i^0 (z_i^B)^t$), обеспечивающие неотрицательность траектории $\{B_i^t\}$ при принятии линейной и экспоненциальной гипотез, подпадают под действие этой теоремы.

Гипотезу о параболическом характере траектории какой-либо переменной целесообразно рассмотреть более детально. Важно то, что именно она позволяет моделировать немонотонную динамику некоторой переменной q, при которой значения $q(t)$ при $t \ge 0$ сначала убывают, оставаясь неотрицательными, а затем начинают расти.

Параболическая траектория, определяемая неотрицательными значениями переменной q при $t = -1$, 0 и +1, задается в виде квадратической функции времени

$$q(t) \equiv at^2 + bt + c = \{0.5[q(1) + q(-1)] - q(0)\}t^2 + 0.5[q(1) - q(-1)]t + q(0), \tag{20}$$

использовавшейся в (14б). Здесь $q(-1)$ и $q(0)$ будем считать параметрами, значения которых определяются статистическими методами или задаются экзогенно; значение $q(1)$ включим в число переменных модели. Требование неотрицательности величин $q(t)$ при $t \ge 1$ представляется с помощью ограничений $q(1) \ge 0$ и $b^2 - 4ac \le 0$. Добавление предположения о немонотонности неотрицательной траектории $\{q(t)\}$ при $t \ge 0$, как показал элементарный анализ, приводит к двустороннему ограничению

$$(\sqrt{q(-1)/q(0)} - 2)^2 \le q(1)/q(0) \le 1. \tag{21}$$

Оно задает диапазон допустимых значений переменной $q(1)$, если $0 < q(0) < q(-1) \le 9q(0)$. Последнее требование к значениям $q(0)$ и $q(-1)$ является вполне реалистичным по отношению к наблюдаемым динамикам убывающих до периода с $t = 0$ переменных. Очевидно, что ограничение (21) удовлетворяет условиям теоремы 2 о мини-клювах.

В балансовых и оптимизационных моделях часто принимается гипотеза экспоненциального изменения части переменных. Для межотраслевых моделей эта гипотеза применяется к вводам B_i^t, капиталовложениям K_i^t и выпускам x_i^t, что сводится к введению их предполагаемых постоянными темпов z_i^B, z_i^K и z_i^X. На переменные группы z накладываются ограничения вида $z \ge 0$ или $z \ge 1$. Одной из наиболее разработанных и детально проанализированных межотраслевых моделей, использовавших экспоненциальную гипотезу для части ее переменных, является модель оптимального планирования, предложенная и реализованная в (Волконский, 1967; Беленький, 1967, 1968). Для этой модели авторы обнаружили, доказали и использовали при конструировании метода нахождения решения существование мини-клюва.

Покажем, что рассмотрение семейств регулярных траекторий для части переменных является полезным при применении к динамическим межотраслевым моделям, полностью ориентированным на практическое проведение предплановых и прогнозных расчетов. Такие модели были разработаны и применялись в Научно-исследовательском экономическом институте (НИЭИ) при Госплане СССР под руководством Ф.Н. Клоцвога (Клоцвог, Новичков, 1971) и в Институте экономики и организации промышленного производства (ИЭиОПП) Сибирского отделения АН СССР под руководством Н.Ф. Шатилова (Шатилов, 1967). В этих моделях использовались близкие допущения, в том числе постулировалась линейная однородная зависимость, связывающая объемы капитальных вложений K_i^t и вводы основных фондов B_i^t в году t для отрасли i, представляемая уравнением $K_j^t = \psi_j^t B_j^t$. Коэффициент ψ_j^t получается из балансового равенства $N_i^{t-1} + K_i^t = N_i^t + B_i^t$, в котором N_i^t – объем незавершенного строительства в отрасли i на конец года t, в предположении, что $\Delta N_i^t \equiv N_i^t - N_i^{t-1} = (\lambda_i^B)B_i^t$ или $\Delta N_i^t = (\lambda_i^K)K_i^t$.

Оптимизационный вариант модели НИЭИ задается системой неравенств

$$x_i^t - \sum_j a_{ij}^t x_j^t - \sum_j b_{ij}^t \psi_j B_j^t - Y_i^t \ge 0, \tag{22а}$$

$$(1 - \eta_i \tilde{h}_i^t)F_i^{t-1} + \xi_i B_i^t - \varphi_i^t x_i \ge 0, \tag{22б}$$

$$x_i^t \ge 0, \quad B_i^t \ge 0 \tag{22в}$$

и уравнений

$$F_i^t = (1 - \tilde{h}_i^t)F_i^{t-1} + B_i^t, \quad i = 1, \ldots, n; \quad t = 1, \ldots, T, \tag{22г}$$

в которых коэффициенты $\tilde{h}_i^t$ задают доли выбывающих в году t фондов отрасли i, коэффициенты ξ_i и η_i используются для перевода годовых объемов вводов B_i^t и выбытий основных фондов ($\tilde{h}_i^t F_i^{t-1}$) в среднегодовое выражение и вектор начальных объемов основных фондов $F^0 = (F_i^0)$ известен. Неотрицательные в силу $F_i^0 > 0$, $0 < \tilde{h}_i^t < 1$, $B_i^t \geq 0$ переменные F_i^t исключаются из (22б), и получается модель, состоящая из неравенств (22а), (22в) и (18б), в которых коэффициенты h_i^t и $g_i^{t,\tau}$ в (18б) выражаются через коэффициенты неравенств (22б) и уравнений (22г).

Если для каждой переменной $B_i = \{B_i^t\}$, $i = 1, \ldots, n$, принимается какая-либо из охарактеризованных выше упрощающих гипотез, параметризующих их траектории, то существование у полученной модели мини-клюва ($\{\check{X}_i^t\}$; $\{\check{\pi}_i^B\}$) становится очевидным. Здесь π_i^B – параметр, включенный в число переменных модели, значение которого определяет траекторию $\{B_i^t\}$. Если прием регуляризации применяется и к отраслевым выпускам x_j^t отраслей с номерами $j \in \omega \subset \{1, \ldots, n\}$, то у такой модели также имеется мини-клюв ($\{\check{X}_i^t\}$; $\{\check{\pi}_j^X\}$;$\{\check{\pi}_i^B\}$), координатами которого являются отраслевые выпуски $\check{X}_i^t$ отраслей с нерегулярной динамикой $l \notin \omega$, и переменные $\check{\pi}_j^X$, $j \in \omega$, $\check{\pi}_i^B$, $i = 1, \ldots, n$, определяющие (как параметры) регулярные траектории x_j^t и $\{B_j^t\}$.

Общие приемы анализа зависимости координат клювов от значений параметров, задающих допустимое множество решений модели, рассмотренные в (Ершов, 2002, 2007, естественно применять к конкретным межотраслевым моделям. В качестве важнейших параметров динамических оптимизационных моделей имеет смысл выделять отраслевые объемы конечного продукта Y_i^t и основных фондов $h_i^t F_i^0$ (в среднегодовом выражении), зависящие от начальных значений фондов. Введем обозначения для этих параметров: $Y_i^t \equiv \pi_i^t$, $\pi = \{\pi_i^t\}$ и $h_i^t F_i^0 \equiv \tilde{\pi}_i^t$, $\tilde{\pi} = \{\tilde{\pi}_i^t\}$. Пусть $\Omega(\pi;\ \tilde{\pi})$ – множество допустимых решений модели с параметрами π и $\tilde{\pi}$. Сравним две модели с параметрами π^{I}, $\tilde{\pi}^{\mathrm{I}}$ и π^{II}, $\tilde{\pi}^{\mathrm{II}}$, предполагая, что выполняются (поэлементно) неравенства $\pi^{\mathrm{I}} \leq \pi^{\mathrm{II}}$ и $\tilde{\pi}^{\mathrm{I}} \geq \tilde{\pi}^{\mathrm{II}}$. Тогда, сравнивая неравенства, задающие модели, и в первую очередь те из них, в которых используются векторы $Y^t = (Y_i^t)$ и $F^{0,t} \equiv (h_i^t F_i^0)$, получаем $\Omega(\pi^{\mathrm{II}};\ \tilde{\pi}^{\mathrm{II}}) \subset \Omega(\pi^{\mathrm{I}};\ \tilde{\pi}^{\mathrm{I}})$, и, следовательно, координаты мини-клюва множества $\Omega(\pi;\ \tilde{\pi})$ при любом способе перехода к регулярным траекториям переменных являются неубывающими функциями параметров Y_i^t и невозрастающими функциями параметров $F_i^{0,t}$.

Это утверждение полностью согласуется с экономическим содержанием параметров, характеризующих имеющиеся начальные ресурсы $\tilde{\pi}$ и задаваемые результаты π, и не просто доказывается без использования понятийного аппарата теории клювов.

3. ЦЕЛЕСООБРАЗНОСТЬ КОНСТРУИРОВАНИЯ И ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИМЕЮЩИХ КЛЮВЫ МЕЖОТРАСЛЕВЫХ МОДЕЛЕЙ

Допустимые множества решений оптимизационных и балансовых межотраслевых моделей не всегда имеют клювы, в том числе и обобщенные. Но при конструировании таких моделей полезно учитывать те специфические возможности, которые получает исследователь, если создаваемая модель или какая-либо подсистема ее уравнений или неравенств удовлетворяет условиям, достаточным для существования у нее клюва, а также как расширяются возможности самого моделирования, если оно ставит перед собой цель получить модель или подмодель с такими свойствами. Кратко охарактеризуем такие возможности.

Для межотраслевых моделей с неединственным допустимым решением и особенно для динамических оптимизационных моделей сложности возникают при выборе и обосновании выбора критерия оптимальности. Экономическая теория не дает четких, позволяющих конструировать количественно определенные варианты критерия оптимальности рекомендаций, которые были бы применимы к широкому классу межотраслевых моделей. Выбор такого критерия должен учитывать структуру и целевую ориентацию модели, т.е. быть эндогенным элементом процесса ее построения. По нашему мнению, накопленный опыт разработки комплексных моделей экономики разных стран привел к тому, что в случае статической модели кардинальный путь решения проблемы критерия оптимальности сводится к встраиванию ее в модель общего экономического равновесия. Однако исходные принципы этого класса моделей могут не соответствовать или даже противоречить состоянию моделируемой экономической системы и характеру происходящих в ней процессов. Если же предполагается, что состояние равновесия будет достигнуто в периоде, достаточно удаленном от известного, начального и неравновесного состояния системы, то получаемое при использовании статической модели равновесное состояние, являющееся, конечно, модельно допустимым, должно быть проанализировано с точки зрения его достижимости. Ведь желательное равновесное состояние может оказаться недостижимым принципиально или в течение выбранного временного горизонта. Примеры описания таких недостижимых состояний, получаемых как вербально, так и с применением математических моделей, известны.

Анализ достижимости полученного желательного состояния, казалось бы, можно выполнить, включив равновесную статическую модель в динамическую модель, представляющую собой последовательность взаимосвязанных статических моделей. В идеале такое включение могло бы привести и к корректировке финального, равновесного состояния. Надежда на такой способ проверки достижимости финального состояния возникает, так как известен способ решения задач оптимального управления для технических систем с терминальными условиями. К сожалению, этот опыт представляется мало что дающим для моделирования и прогнозирования экономических процессов в случае систем, трансформирующих свою структуру. Неравновесный характер начального состояния и следующих за ним состояний моделируемой системы приводит к необходимости решать при разработке динамических моделей проблему соизмерения стратегической цели достижения равновесного состояния и текущих, тактических выгод, получаемых действующими в системе экономическими агентами в годы прогнозируемого периода. К этому добавляется незаданность продолжительности периода, в конце которого предполагается достичь равновесного состояния.

Приходится признать, что динамические модели процесса перехода межотраслевой динамики в состояние экономического равновесия к настоящему времени в должной мере не разработаны, и надеяться на то, что будущие теоретические и прикладные исследования устранят этот пробел.

В охарактеризованной ситуации может оказаться возможным решать проблему выбора критерия оптимальности более простым, но, тем не менее, конструктивным способом. Предлагается выделять среди показателей-переменных модели группу переменных, безусловно характеризующих затраты, которые естественно минимизировать, и другую группу, переменные которой определяют максимизируемые результаты, затем конструировать модель, имеющую мини-клюв или даже смешанный клюв, может быть, включающую в себя подмодели или частные модели с такими свойствами при фиксированных значениях экзогенных для них переменных. Такой подход к выбору решения из числа допустимых не означает, как легко убедиться, полного отказа от идеи содержательной оптимизации. В частном случае достаточно простых динамических межотраслевых моделей он применялся именно с целью преодоления трудности выбора критерия оптимальности и состоял в том, что последовательность векторов конечного продукта-нетто, не включающего производственные капитальные вложения в отрасли межотраслевого баланса, задавалась с помощью функций одной, в данном случае максимизируемой переменной (см. (Дудкин, Ершов, 1965; Дудкин, 1966; Волконский, 1967; Шатилов, 1967; Аганбегян, Багриновский, Гранберг, 1972; Уринсон, 1986, гл. 13)). При фиксированном значении этой переменной получалась модель, для оптимизационного варианта которой множество допустимых решений имело мини-клюв.

Заметим, что заслуживает внимания возможность использования монотонности зависимостей координат клювов для подмоделей от экзогенных для них переменных-параметров и определения компромиссных значений параметров модели (Ершов, 2002, 2007). Возможно, на этом пути удастся реализовать идею получения в моделях “максимальных результатов при минимальных затратах”, отличную от результатов теории двойственности для экстремальных задач и выпуклого анализа.

Другая проблема, с которой приходится сталкиваться при конструировании межотраслевых моделей, связана с ограниченностью класса функций, с применением которых формулируются эти модели. Прикладные модели, для которых должна быть решена задача численного нахождения решения, в своем большинстве базируются на линейных по переменным или приводимых к ним функциях. Конечно, известен потенциально более широкий класс зависимостей, при использовании которых для получаемых моделей нахождение их оптимальных решений не представляет собой практически не решаемую задачу. Имеются в виду модели, сводящиеся к нахождению решения задачи выпуклого программирования. Проблемы, связанные с нахождением решений нелинейных систем уравнений, задающих балансовые межотраслевые модели, являются весьма специфическими, заслуживают специального анализа и в этой работе не рассматриваются. Поэтому вернемся к ограничениям возможностей моделирования, возникающих при сведении моделей к задачам выпуклого программирования.

Теоретические аспекты выпуклого программирования и выпуклого анализа изучены досконально, о чем можно судить хотя бы по работам (Rockafeller, 1970; Нестеров, 1989). Но, несмотря на то, что разработаны многие программы для нахождения общих и частных экстремальных выпуклых задач, практически отсутствуют примеры их применения к нелинейным межотраслевым моделям, разрабатываемым не в учебных или иллюстративных целях. По-видимому, это объясняется двумя обстоятельствами.

Для многоразмерных, использующих достаточно разнообразные функциональные зависимости межотраслевых моделей, практическая реализация методов выпуклого программирования до настоящего времени оказывается слишком сложной, трудоемкой и не позволяет получать ясно интерпретируемые и устойчивые по отношению к вариациям исходных гипотез и значений параметров результаты. Требование выпуклости рассматриваемой задачи, столь естественное и удобное с математической точки зрения и казавшееся таким на начальных этапах межотраслевого моделирования, ограничивает, сужает возможности моделирования. Возможно, это требование даже входит в противоречие с результатами и идеями прикладных исследований, пограничных с межотраслевым балансом. Такие исследования связаны с конструированием и анализом отраслевых производственных функций, в том числе функций, определяющих границы производственных возможностей для отраслей, функций спроса на ресурсы и функций издержек, моделированием процессов формирования доходов и расходов экономических агентов, распределения ресурсов в системах, где действуют многие факторы, в том числе факторы спроса и предложения, моделированием процессов ценообразования и их влияния на структуры, являющиеся объектами анализа и прогнозирования в межотраслевых исследованиях. Известно значительное число конкретных исследований, имеющих собственные объекты и цели и в то же время создающих элементы базы межотраслевого моделирования, но результаты которых не укладываются в схему, удовлетворяющую требованию выпуклости. Подробный анализ таких результатов, которые могут учитываться или даже использоваться при разработке межотраслевых моделей, представляет собой многоаспектную, масштабную задачу, выходящую за рамки и возможности данной работы.

Ограничимся тем, что сформулируем гипотезу о целесообразности преодоления требования выпуклости как обязательного при конструировании межотраслевых моделей. Обосновывать эту гипотезу можно, анализируя специфику трансформационных процессов, происходящих в многоотраслевой экономике. Она состоит, по нашему мнению, в том, что важнейшие соотношения соответствующих моделей, не являющихся чисто балансовыми, например отраслевые производственные функции, должны изменяться не только и не столько за счет изменения значений их аргументов (переменных), но и функционально, в результате внутримодельного, а не экзогенного выбора вида зависимости из числа потенциально, но условно возможных. Условия трансформации одного вида зависимости, т.е. задающей ее функции, в другую аналитическую форму и определение периодов, в которые такие изменения произойдут, должны моделироваться. Трансформационные процессы не только порождаются существующими в системе противоречиями и неравновесиями, но и сами порождают их. Неизбежно сопутствующие трансформациям адаптационные процессы, растянутые во времени, не способны быстро обеспечить приспособление к создающимся новым условиям, полную динамическую согласованность с другими происходящими процессами, которую хотелось бы называть динамической равновесностью.

Представляется правдоподобным, что экономические процессы, приводящие к "выпуклости" технологических множеств, ограничений и других функциональных взаимосвязей между показателями, образующими ядро межотраслевых моделей, заполнению своеобразных пустот, не успевают реализоваться достаточно полно, если они происходят одновременно с сильными трансформационными процессами. Адаптационные процессы, имеющие, по-видимому, микроэкономический характер, происходят постоянно. Для систем, функционирующих относительно инерционно, без прохождения через состояния бифуркаций, без системных кризисов, вызывающих необходимость глубоких изменений системы, эти процессы порождают множества возможных состояний системы, для которых выполняется математическое требование выпуклости, т.е. реализуемости выпуклых линейных комбинаций допустимых состояний. Если же объектом моделирования и основанного на нем прогнозирования являются именно неравновесные в каком-то смысле, трансформационные процессы, то требование выпуклости, предъявляемое к разрабатываемым моделям, выглядит чрезмерно упрощающим представления о таком объекте, не оправдывается относительной простотой, свойствами его конструируемого математического образа.

В связи с проблемой выпуклости упомянем то, что в условиях неравновесия между спросом на продукцию отраслей и имеющимися доступными для них производственными факторами и ресурсами, социальных ограничений на процессы их перераспределения и использования может быть полезным рассматривать производственные функции и функции, определяющие границы производственных возможностей (frontier production functions) отраслей, не ограничивая значения их показателей эффективности от масштаба и однородности. При этом целесообразно допускать возможность возникновения узких мест (bottleneck effects) и новых, маргинальных технологий, дополняющих действующие технологии. Одним из математических инструментов, позволяющих моделировать такие ситуации и их возникновение, являются не обязательно выпуклые сплайн-функции, представляемые в виде поточечных верхних или нижних граней семейств функций. Очевидно, что такая конструкция может быть описана в терминах пересечений и объединений элементарных множеств, определяемых функциями таких семейств.

Невыпуклые в общем случае множества допустимых решений межотраслевых моделей, рассмотрение которых с экономических позиций представляется вполне оправданным, если не ограничивать класс используемых в них функций, порождают задачи, для которых нахождение оптимального решения нетривиально. Вряд ли удастся предложить для них достаточно общие алгоритмы нахождения таких решений. Поэтому заслуживает внимания любая возможность выбора класса применяемых в таких моделях функций, для которого возникающая задача, с одной стороны, оказывается эффективно решаемой, а с другой стороны, позволяет без существенных потерь отображать основные процессы и взаимодействия, происходящие в трансформирующейся многоотраслевой экономике. Модели, для которых допустимые множества решений имеют клювы, предлагается рассматривать для охарактеризованных целей. Класс однослотовых, слабо монотонных или монотонных по невыделенным аргументам функций оказывается удобным, хотя бы в основном, для целей межотраслевого моделирования, позволяет предложить приемлемый подход к проблеме выбора решения из множества допустимых решений и находить его.

Для нахождения характерных решений-клювов разработаны различные методы, в том числе не предполагающие выпуклости или линейности множеств допустимых решений. Некоторые такие методы ориентированы на применение к классам весьма конкретных моделей, но в модифицированном виде они могут быть приспособлены для нахождения клювов межотраслевых моделей более общего вида (Беленький, 1967, 1968а, 1968б; Sandberg, 1973; Бусыгин, 1976, гл. 6; Lahiri, 1976, 1977, 1983; Багриновский, Бусыгин, 1980; Lahiri, Pyatt, 1980). Специальным методом нахождения клювов, схема которого не зависит от конкретного вида функций, определяющих множество допустимых решений модели, является метод покоординатной релаксации, использующий последовательность спусков или подъемов по лучам, параллельным осям координат. Он может на каждой итерации находить граничную точку допустимого множества на луче или определять внутреннюю точку на нем, принимаемую в качестве начальной точки для очередной итерации.

Этот метод предполагает, что известно или найдено исходное приближение – допустимое решение. Такое приближение в некоторых случаях может быть определено уже на стадии разработки модели. Но для сложных, особенно динамических моделей, в которых имеются нелинейные соотношения, предполагать известным допустимое начальное приближение вряд ли оправдано, а задача его нахождения на начальном этапе метода может оказаться слишком трудно решаемой, даже не имеющей общего алгоритма решения хотя бы из-за специфики операции проектирования недопустимого начального приближения на невыпуклое множество допустимых решений.

В ситуации, когда допустимое начальное приближение не известно или не найдено, полезным может оказаться следующий прием. Пусть для определенности допустимое множество Ω^1 решений модели задается системой неравенств $f_\alpha(X) \geq 0$, $\alpha = 1, \ldots, N$, и условием $X \in M(A; B) \equiv \underline{MA} \cap \cap \overline{MB} \subset R_n$. Определим связанное с ним множество Ω^2 с помощью системы неравенств $f_\alpha(X) \leq 0$, $\alpha = 1, \ldots, N$, и условия $X \in M(A; B)$. Если удается доказать, что мини-клюв $\check{X}(\Omega^1)$ множества Ω^1

совпадает с макси-клювом $\hat{X}(\Omega^2)$ множества Ω^2, то можно найти клюв $\hat{X}(\Omega^2)$. При этом задача нахождения допустимого начального приближения $\tilde{X}^0 \in \Omega^2$ может быть существенно проще по реализации по сравнению с нахождением начального приближения $X^0 \in \Omega^1$. Так, в прикладных моделях в качестве кандидата на роль точки $\tilde{X}^0$ можно рассматривать точку A, которая часто совпадает с началом координат О или с задаваемым вектором Y конечного продукта или конечного продукта-нетто. Как правило, стандартные ограничения неотрицательности переменных вводятся так, что точка О или точка $X = Y$ является недопустимой для множества Ω^1, но удовлетворяет неравенствам, определяющим множество Ω^2.

Напомним, что методы нахождения клювов можно применять в случае систем нелинейных уравнений, если оптимизационная версия балансовой модели имеет клюв. Такая возможность рассматривалась в (Бусыгин, 1976, гл. 6; Багриновский, 1977, гл. VI; Ершов, 2002, 2007). Для приложений важно, что существуют методы нахождения клювов для дискретных множеств, задаваемых в виде пересечения дискретного множества-решетки D и множества, удовлетворяющего условиям теорем 1 и 2 о клювах. В частности, для этой цели можно применять модифицированный метод покоординатной релаксации, если известно начальное допустимое приближение, принадлежащее рассматриваемой решетке. Возможно, в подобной постановке межотраслевые модели окажутся имеющими более устойчивые к изменениям их параметров и проще экономически интерпретируемые решения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Открытым остается вопрос о том, насколько широка область применения однослотовых, слабо монотонных по невыделенным аргументам функций и конструируемых с их использованием экономико-математических моделей. То, что такие функции могут успешно применяться в моделировании столь сложной системы, которой является многоотраслевая экономика, позволяет надеяться на распространение предлагаемого подхода на другие предметные области экономической теории, прикладного моделирования и прогнозирования, в которых экономические агенты имеют, как правило, не вполне согласующиеся критерии выбора своих действий, и проблема существования, а тем более нащупывания общественного компромисса, не решается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Аганбегян А.Г., Багриновский К.А., Гранберг А.Г. (1972): Система моделей народнохозяйственного планирования. М.: Мысль.

Багриновский К.А. (1968): Проблемы построения системы моделей оптимального перспективного планирования. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора экономических наук. СО АН СССР, Объединенный Ученый совет по экономическим наукам. Новосибирск.

Багриновский К.А. (1969): О гладких решениях некоторых задач планирования. В кн. “*Проблемы народнохозяйственного оптимума*”. М.: Экономика.

Багриновский К.А. (1977): Основы согласования плановых решений. Глава VI. Приложение. М.: Наука,

Багриновский К.А., Бусыгин В.П., Радченко В.В. (1978): О методах согласования отраслевых решений в системе моделей // *Экономика и мат. методы*. Т. XIV. Вып.2.

Багриновский К.А., Бусыгин В.П. (1980): Математика плановых решений. М.: Наука.

Баранов Э.Ф. (1968). Проблемы разработки схемы динамической модели межотраслевого баланса // *Экономика и мат. методы*. Т. IV. Вып. 1.

Беленький В.З. (1967): Некоторые модели оптимального планирования, основанные на схеме межотраслевого баланса // *Экономика и мат. методы*. Т. III. Вып. 4.

Беленький В.З. (1968а): О задачах математического программирования, обладающих минимальной точкой // *Доклады АН СССР*. Т. 183. № 1.

Беленький В.З. (1968б): Об экстремальных задачах, обладающих минимальной точкой. Автореферат на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. М.: Центральный экономико-математический институт АН СССР.

Беленький В.З., Волконский В.А., Павлов Н.В. (1972): Динамические межотраслевые модели, их использование для расчетов плана и цен в экономическом анализе // *Экономика и мат. методы*. Т. VIII. Вып. 4.

Берри Л.Я., Лотош Я.М. (1971): Использование межотраслевого баланса в долгосрочном планировании. В сб.: “*Методология прогнозирования экономического развития СССР*”. М.: Экономика.

Боярский А.Я. (1962): Математико-экономические очерки. М.: Госстатиздат.

Бусыгин В.П. (1976): Абстрактный межотраслевой анализ. В кн. "*Математические вопросы построения системы моделей*". Новосибирск: Наука, Сибирское отделение АН СССР.

Волконский В.А. (1967): Модель оптимального планирования и взаимосвязи экономических показателей. М.: Наука.

Гранберг А.Г. (1985): Динамические модели народного хозяйства. М.: Экономика.

Дудкин Л.М. (1966): Сравнительный анализ критериев в статических моделях оптимального материального баланса народного хозяйства. В сб. "*Экономико-математические методы. Вып. III. Экономико-математические модели народного хозяйства*". М.: Наука.

Дудкин Л.М., Ершов Э.Б. (1965): Блочное построение оптимального материального баланса социалистического народного хозяйства. В сб. "*Экономико-математические методы. Вып. II. Методы оптимального планирования. Транспортные задачи*". М.: Наука.

Ершов Э.Б. (1963): Математические методы в статической модели межотраслевого баланса. Материалы научного совещания по проблемам межотраслевого баланса. М.: Научно-исследовательский экономический институт (НИЭИ) при Госплане СССР (ротапринт).

Ершов Э.Б. (1991): Оптимальное масштабирование в межотраслевом моделировании. В сб. "*Инструментальные средства обработки и реализации моделей прогнозирования*". М.: Институт экономики и прогнозирования научно-технического прогресса (Институт народнохозяйственного прогнозирования) АН СССР.

Ершов Э.Б. (2002): Теория клювов и межотраслевое моделирование. Препринт WP2/2 002/0 3. Серия WP2. Количественный анализ в экономике. М.: Государственный университет – Высшая школа экономики.

Ершов Э.Б. (2007): Теория клювов и моделирование //*Экономика и мат. методы*. Т. 43. Вып. 1.

Ершов Э.Б., Рутковская Е.А. (1978): Взаимосвязи капитальных вложений и вводов основных фондов в динамической модели межотраслевого баланса // *Экономика и мат. методы*. Т. XI. Вып. 1.

Карлин С. (1964): Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир. (Karlin S. Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics. Pergamon Press, 1959).

Клоцвог Ф.Н., Новичков В.А. (1971). Применение динамической модели межотраслевого баланса для народнохозяйственных расчетов на длительную перспективу. В сб. "*Методология прогнозирования экономического развития СССР*". М.: Экономика.

Конюс А.А. (1961): Расширение системы уравнений межотраслевых связей для целей перспективного планирования. В сб. "*Применение математики в экономических исследованиях*". Т. 2. М.: Изд-во социально-экономической литературы.

Конюс А.А. (1964): Перспективное планирование при предположении равномерного роста капитальных вложений. В сб.: "*Планирование и экономико-математические методы. К 70-летию со дня рождения академика В.С. Немчинова*". М.: Наука.

Конюс А.А. (1965): Методы построения динамической модели межотраслевого баланса. В сб.: "*Методы планирования межотраслевых пропорций*". М.: Экономика.

Коссов В.В. (1973): Межотраслевые модели (теория и практика использования). М.: Экономика.

Коош Е. (1973): Опыт динамизации статического межотраслевого баланса. В сб. "*Межотраслевые исследования в Венгрии*". М.: Статистика.

Ланкастер К. (1972): Математическая экономика. М.: Сов. радио.

Ланге О. (1961): Производственно-техническая основа эффективности капитальных вложений. В сб. "*Применение математики в экономических исследованиях*". Т. 2. М.: Изд-во социально-экономической литературы.

Матлин И.С., Шулепникова Т.Ю. (1978): Алгоритм решения динамической межотраслевой модели с распределенными лагами // *Экономика и мат. методы*. Т. XIV. Вып. 5.

Нестеров Ю.Е. (1989): Эффективные методы в нелинейном программировании. М.: Радио и связь.

Рокафеллар Р.Т. (1973): Выпуклый анализ. М.: Мир. (**Rockafellar R.T.** Convex Analysis. Pergamon University Press, 1970).

Смехов Б.М., Уринсон Я.М. (1976): Методы оптимизации народнохозяйственного плана. М.: Экономика.

Смирнов А.Д. (1965): Динамическая межотраслевая модель и плановые расчеты // *Экономика и мат. методы*. Т. I. Вып. 3.

Уринсон Я.М. (1986): Совершенствование технологии народнохозяйственного планирования. М.: Экономика.

Шатилов Н.Ф. (1967): Моделирование расширенного воспроизводства. М.: Экономика.

Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. (1961): Об одном методе количественного анализа упрощенных экономических моделей. В сб. "*Применение математики в экономических исследованиях*". Т. 2. М.: Изд-во социально-экономической литературы.

Яременко Ю.В., Ершов Э.Б., Смышляев А.С. (1975): Модель межотраслевых взаимодействий // *Экономика и мат. методы.* Т. XI. Вып. 3.

Leontief W. (1936): Quantitative Input-output Relations in the Economic System of the United States // *Rev. of Econ. and Statist.* Vol. 18. № 3.

Leontief W. (1941): The Structure of American Economy 1919–1929. N.Y.: Oxford University Press.

Leontief W.W. (1970): Dynamic Inverse. In: "*Contributions to Input-Output Analysis*" (eds. A. Carter, A. Brody). Amsterdam: North – Holland.

Lahiri S. (1976): Input-output Analysis with Scale-dependent Coefficients // *Econometrica.* Vol. 44. № 5.

Lahiri S. (1977): Efficient Investment and Growth Consistency in the Input-output Frame: An Analytical Contribution // *Econometrica.* Vol. 45. № 8.

Lahiri S. (1983): Capacity Constraint, Alternative Technologies and Input-output Analysis // *European Econ. Rev.* Vol. 22.

Lahiri S., Pyatt G. (1980): On the Solution of Scale-dependent Input-output Models // *Econometrica.* Vol. 48.

Samuelson P.A. (1951): Abstract of theorem concerning substitability in one of Leontief models. In: "*Activity Analysis of Production and Allocation*". Cowles Commission № 13. N.-Y.: Wiley.

Sandberg I.W. (1973): A Nonlinear Input-output Model of a Multisectored Economy // *Econometrica.* Vol. 41. № 6.

Tsukui J. (1968). Application of a Turnpike Theorem to Planning for Efficient Accumulation: An Example for Japan // *Econometrica.* Vol. 36. № 1.

Поступила в редакцию
13.06.2006 г.

Interindustry Models and the Beaks' Theory

E. B. Yershov

It is shown that to balance and optimize, the static and dynamic interindustry models the sets of their admissible decisions in the accepted conditions contain the special decisions called the beaks. The author uses the definitions and affirmations from Yershov, 2002, 2007.