ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2007, том 43, № 2, с. 111–117

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

# ДВУХСТОРОННИЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМИ МОЩНОСТЯМИ

**© 2007 г. Б. И. Алибеков**

*(Махачкала)*

Рассматривается многоэкстремальная задача размещения с нелинейной функцией цели и линейными ограничениями. Выпуклая вверх исходная функция цели заменяется кусочно-линейной функцией, и исходная задача сводится к частично-целочисленной приближенной задаче. Для решения приближенной задачи предлагается двухсторонний итерационный метод определения плана, близкого к оптимальному плану. На каждой итерации решаются транспортные задачи и определяется локально-оптимальное решение исходной задачи. Используя полученное локально-оптимальное решение приближенной задачи, можно осуществить покоординатное двухстороннее сужение области допустимых решений исходной задачи. С помощью оптимального решения задачи размещения с ограниченными мощностями сужается область допустимых решений задачи размещения с ограничениями на мощности в вариантной постановке. Определяется план, принадлежавший новой области, полученной путем исключения из множества допустимых решений некоторых неоптимальных планов, доставляющий минимум целевой функции исходной задачи. Оценивается снизу значение целевой функции, соответствующее полученному решению. Приводятся описание алгоритма решения задачи размещения и анализ эффективности метода по экспериментальным расчетам.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается обобщенная задача размещения. В отличие от классической постановки многоэкстремальная задача размещения имеет ограничение сверху по мощностям перерабатывающих предприятий и нелинейные функции производственных затрат в непрерывной и вариантной форме. Допускается случай, когда функция $\varphi_j(y_j) = f_j(y_j)/y_j$ (где $f_j(y_j)$ – производственные функции, $y_j$ – мощности) не возрастает для всех $y_j > 0$. Часто в экономических задачах увеличение мощности производства приводит к уменьшению производственных издержек на единицу перерабатываемого сырья. В задачах с большими размерами приходится строить итерационный процесс, где на каждой итерации необходимо исследовать локальные задачи для определения локально-оптимального решения. При этом используются свойства функции $f_j(y_j)$. В классических задачах размещения допускается, что функции $f_j(y_j)$ имеют вид $f_j(y_j) = A_j\operatorname{sign}(y_j) + g_j(y_j)$, где $g_j(y_j)$ – строго вогнутые или линейные неотрицательные и возрастающие функции текущих производственных затрат, а $A_j$ – положительные фиксированные производственные затраты (капиталовложения). Для такого класса функций $f_j(y_j)$ функция $\varphi_j(y_j)$ не возрастает при $y_j > 0$. Следовательно, наше допущение не сужает, а расширяет класс решаемых задач.

## 2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМИ МОЩНОСТЯМИ

Экономико-математическая формулировка задачи размещения имеет вид (Алибеков, 1975): в некоторой области (республике, районе и т.д.) имеются $m$ пунктов производства сырья и $n$ пунктов его переработки. К пунктам переработки относятся действующие предприятия и предприятия, которые планируется строить или расширить. Зная объем производства сырья $a_i > 0$ в каждом пункте $i$, себестоимость транспортировки единицы сырья $c_{ij}$, функцию расхода $f_j(y_j)$ переработки сырья $y_j$ и максимально допустимую мощность $V_j$ предприятий, надо определить план $x = \|x_{ij}\|_{m\times n}$ распределения сырья между предприятиями так, чтобы суммарные затраты на транспортировку и переработку были минимальными, т.е. найти план $x = \|x_{ij}\|_{m\times n}$, минимизирующий функцию

$$z(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} f_j(y_j) \quad (1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \ldots, m; \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = y_j \le v_j, \quad j = 1, \ldots, n; \tag{3}$$

$$x_{ij} \ge 0; \quad i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Для решения задачи (1)–(4) автор предлагает двухсторонний итерационный метод определения плана, близкого к оптимальному. Аналогичный односторонний итерационный метод приводится в (Алибеков, 1975), общая схема метода изложена в (Алибеков, 2002), а формальное описание двухстороннего метода определения оптимального плана многоэкстремальной задачи типа размещения – в (Алибеков, 1979).

Обозначим через

$$H_x = \left\{x\colon \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i;\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le v_j;\ x_{ij} \ge 0;\ i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n\right\}$$

множество планов, удовлетворяющих соотношениям (2)–(4). Имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.** *Если* $H_x$ *непустое множество и* $y_r^{(1)} = \max\{y_r : y_r = \sum_{i=1}^{m} x_{ir}^*;\ T_1(x^*) = \min_{x \in H_x}\{T_1(x)\}\}$, $y_r^{(2)} = \max\{y_r : y_r = \sum_{i=1}^{m} x_{ir}^*;\ T_2(x^*) = \min_{x \in H_x}\{T_2(x)\}\}$, *где* $T_1(x) = \sum_{j=1,\, j \ne r}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij}^{(1)} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} c_{ir} x_{ir} + f_r(y_r)$, $T_2(x) = \sum_{j=1,\, j \ne r}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij}^{(2)} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} c_{ir} x_{ir} + f_r(y_r)$, $c_{ij}^{(1)} \ge c_{ij}^{(2)}$; $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, r-1, r+1, \ldots, n$, *то имеет место неравенство* $y_r^{(1)} = \sum_{i=1}^{m} x_{ir}^{(1)} \ge y_r^{(2)} = \sum_{i=1}^{m} x_{ir}^{(2)}$.

Мощность любого предприятия ограничена снизу некоторой величиной. Поэтому исследуем функцию $f_j(y_j)$, $j = 1, \ldots, n$, на интервале $0 < \delta \le y_j \le \beta = \max_j\{v_j\}$, полагая $f_j(y_j) = +\infty$ при $0 < y_j < \delta$ и $y_j > \beta$, $f_j(y_j) = 0$ при $y_j = 0$. Предположим, что функция $f_j(y_j)$ – кусочно-непрерывная, а $\varphi_j(y_j) = f_j(y_j)/y_j$ – не возрастающая для всех $y_j$ из интервала $\delta \le y_j \le \beta$. В интервале $\delta \le y_j \le \beta$ выберем $p$ точек так, чтобы $\delta = b_1 < \ldots < b_p < b_{p+1} = \beta + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – малое число. Функция $f_j(y_j)$ непрерывна на каждом отрезке $[b_k, b_{k+1}]$.

Обозначим $d_{jk} = (b_{k+1} - b_k)^{-1} \int_{b_k}^{b_{k+1}} \varphi_j(t)dt$, $d_{j1} = \varphi_j(\delta)$. Тогда (1)–(4) можно аппроксимировать следующей задачей: найти план $x = \|x_{ij}\|_{m \times n}$, минимизирующий функцию

$$\hat{z}(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(c_{ij} + \sum_{k=1}^{p} d_{jk}\lambda_{jk}\right) x_{ij} \tag{5}$$

при ограничениях (2)–(4) и условии, что $\lambda_{jk} = 1$, если $y_j \in [b_k, b_{k+1})$, в остальных случаях $\lambda_{jk} = 0$. На практике $f_j(y_j)$ задается не в аналитической форме, а в виде таблицы. Таким образом, построенная нами приближенная задача – это реальная экономическая задача, в которой производственные затраты на единицу перерабатываемого сырья заданы в табличном виде. К такой задаче применим метод динамического программирования, согласно которому для каждого $y_j$, для которого $\sum_{j=1}^{n} y_j = \sum_{i=1}^{m} a_i$, $0 \le y_j \le v_j$, решается соответствующая транспортная задача. Число транспортных задач будет очень велико, поэтому этот метод практически не пригоден. Ниже описан приближенный метод решения задачи (2)–(5), где число транспортных задач не превышает $n \times p$. Если бы заранее были известны оптимальные значения мощностей $y_j$, можно было бы заменить $f_j(y_j)$ соответствующими линейными аппроксимациями и, решив получившуюся транспортную задачу, получить точное решение (2)–(5).

Предлагается использовать следующий процесс. Пусть $\bar{y}_j$ – оптимальные значения мощностей $y_j$, $j = 1, \ldots, n$; $\bar{c}_{ij}$ – соответствующие им линеаризованные транспортные коэффициенты функции (5): $\bar{c}_{ij} = c_{ij} + d_{j\bar{\theta}_j}$, где $\bar{\theta}_j$ определяются условиями $b_{\bar{\theta}_j} \le \bar{y}_j \le b_{\bar{\theta}_{j+1}}$; $j = 1, \ldots, n$. Последовательно для $r = 1, \ldots, n$ вычисляются значения мощностей $y_r$ оценивающие $\bar{y}_r$ сверху и снизу. В этих целях для $j = 1, \ldots, n$; $j \ne r$ выбираем первую аппроксимацию функции $f_j(y_j)$, т.е. берем $\gamma = 1$ ($\gamma = 1, p - 1, 2, p - 2, \ldots, [p/2], p - [p/2]$, где $\gamma$ – номер аппроксимации, $[p/2]$ – целая часть числа $p/2$, тем самым мы строим функцию, где коэффициенты при неизвестных $x_{ij}$ фиксированы, а при $x_{ir}$ могут меняться), и минимизируем функцию

$$F_{\gamma r}(x) = \sum_{j=1,\, j\ne r}^{n} \sum_{i=1}^{m} (c_{ij} + d_{j\gamma}) x_{ij} + \left(\sum_{i=1}^{m}\left(c_{ir} + \sum_{k=1}^{p} d_{rk}\lambda_{rk}\right)\right) x_{ir} \tag{6}$$

на множестве

$$H_x = \left\{x : \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i;\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le v_j;\ x_{ij} \ge 0;\ i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n\right\}.$$

Затем выбираем ее последнюю аппроксимацию, т.е. $\gamma = p - 1$, и еще раз решаем задачу минимизации функции (6) (см. (Алибеков, 2002)) на множестве $H_x$. Решив пару задач, определяем планы $x(\gamma, r)$, $x(p - \gamma, r) \in H_x$, доставляющие минимум функции (6), $\gamma = 1, \ldots, [p/2]$. Очевидно, что имеет место неравенство $c_{ij} + d_{j1} \ge c_{ij} + d_{j\bar{\theta}_j} \ge c_{ij} + d_{jp-1}$, так как $\varphi_j(y_j) = f_j(y_j)/y_j$ – невозрастающая функция для всех $y_j$ из интервала $\delta \le y_j \le \beta$. Следовательно, из теоремы 1 следует неравенство

$$y_r(1, r) = \sum_{i=1}^{m} x_{ir}(1, r) \ge \bar{y}_r = \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{ir} \ge y_r(p-1, r) = \sum_{i=1}^{m} x_{ir}(p-1, r).$$

В (6) нелинейной является лишь составляющая с номером $r$. Минимум (6) на множестве $H_x$ можно получить за конечное число итераций, каждая из которых состоит в решении транспортной задачи. Сначала $j = r$ для $f_r(y_r)$ выбирается $\tau$-аппроксимация, где $\tau = min(\theta, p - 1)$, а $\theta$ определяется из условия $b_\theta \le v_r < b_{\theta+1}$. Пусть $y_j^{(1)}(\gamma)$, $j = 1, \ldots, n$, – значения мощностей, полученные в результате решения соответствующей транспортной задачи. При $\gamma = 1$ транспортные издержки находятся из формул:

$$c_{ij}^{(1)}(\gamma) = c_{ij}^{(1)}(1) = c_{ij} + d_{j1},\quad j \ne r;\quad c_{ij}^{(1)}(p-\gamma) = c_{ij}^{(1)}(p-1) = c_{ij} + d_{jp-1},\quad j \ne r,$$

$$c_{ij}^{(1)}(\gamma) = c_{ij} + d_{j\gamma},\quad c_{ij}^{(1)}(p-\gamma) = c_{ij} + d_{jp-\gamma},$$

$c_{ir}^{(1)} = c_{ir}^{(1)} = c_{ir} + d_{r\tau}$, $\tau = \min(\theta, p - 1)$, а $\theta$ определяется из условия $b_\theta \le v_r < b_{\theta+1}$. Оставив для всех $j \ne r$ прежнюю линейную аппроксимацию, для $j = r$ возьмем аппроксимацию с номером $\omega_r^{(1)}$ (номер интервала, которому принадлежит $y_r^{(1)}$). Решив соответствующую транспортную задачу, получим $y_j^{(2)}$, причем $y_r^{(1)} \ge y_r^{(2)}$. Теперь для $j = r$ возьмем аппроксимацию $\omega_r^{(2)}$, где $b_{\omega_r^{(2)}} \le y_r^{(2)} \le b_{\omega_r^{(2)}+1}$, и решим новую транспортную задачу и т.д. Процесс заканчивается, как только $y_r^{(s)}$ (где $s$ – номер итерации) и $y_r^{(s+1)}$ попадут в один и тот же интервал. В этом случае транспортные задачи двух последовательных итераций $s$ и $s + 1$ будут идентичны и их оптимальные решения совпадут. Таким образом, число итераций, необходимых для минимизации (6) на множестве $H_x$, не превосходит $p$.

При минимизации (6), используя теорему 1, можно сужать область $H_x$, вводя после решения очередной задачи и получения значения $y_r = y_r(\gamma, r)$, $y_r = y_r(p - \gamma, r)$, $r = 1, \ldots, n$ ограничения вида

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ir} \le y_r(\gamma, r),\quad \sum_{i=1}^{m} x_{ir} \ge y_r(p-\gamma, r),\quad \gamma = 1, \ldots, [p/2].$$

Таким образом, будут решаться задачи:

$$F_{\tau r}(x(\tau, r)) = \min_{H(r)} F_{\tau r}(x);\quad \tau = \gamma;\quad p - \gamma, \tag{7}$$

где $H(r) = \{x : x \in H_x, \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le y_j(\gamma, j), \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le y_j(p-\gamma, j), j = 1, \ldots, r+1\}$; $\gamma = 1, \ldots, [p/2]$; $y_r(\tau, r) = \sum_{i=1}^{m} x_{ir}(\tau, r)$; $\|x(\tau, r)\|_{m \times n}(\tau, r)$, $\tau = \gamma, p-\gamma$, – оптимальные планы задач (7).

Если бы были известны те $j$, для которых $\bar{\theta}_j(\bar{y}_j) = 1$ или $\bar{\theta}_j(\bar{y}_j) = p - 1$ (номер интервала, которому принадлежит оптимальное значение $\bar{y}_j$), то, увеличив номер аппроксимации $\gamma$ или уменьшив $p - \gamma$ на единицу для остальных $j$ и применив снова описанный выше процесс, мы получили бы более точную оценку снизу и сверху для оптимальных значений мощностей $y_j$. Увеличивая $\gamma$ на единицу для $j$, у которых $\gamma < \bar{\theta}_j < p - \gamma$, можно было бы за конечное число циклов получить оптимальные значения $\bar{y}_j$ и решить задачу (2)–(5). При этом для каждого $r$, $r = 1, \ldots, n$, надо решить не более $p$ задач вида (7), так как при увеличении значения $\gamma$ для $f_r(y_r)$ в качестве исходной аппроксимации следует брать $\omega_r$ (номер интервала, которому принадлежит $y_r$, полученный на предыдущем цикле).

Невозможность проверки условий $\bar{\theta}_j = \gamma$ или $\bar{\theta}_j = p - \gamma$ требует для реализации такой схемы решения большого числа транспортных задач. Ниже будет описан приближенный метод, где достаточно хороший план получается в результате процесса, требующего решения не более $n \times p$ транспортных задач. Эффективность этого метода была подтверждена результатами вычислительного эксперимента (разд. 3). В этом методе значения $\gamma$ увеличиваются на единицу для всех $j$ таких, что $b_{\gamma+1} \le y_j(\gamma, j)$ или $b_{p-\gamma} > y_j(p - \gamma, j)$. Поскольку $\bar{y}_j \le y_j(\gamma, j)$ или $\bar{y}_j \le y_j(p - \gamma, j)$, то для $f_j(y_j)$ надо оставить аппроксимации с номерами $\gamma$ и $p - \gamma$. Для увеличения точности в метод включен процесс локального улучшения плана.

Пусть $x(\tau, r)$ – оптимальный опорный план задачи (7), где $\tau = \gamma, p - \gamma$. Рассмотрим транспортный многогранник

$$H_{x(\tau, r)} = \left\{x : \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i; \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = y_j(\tau, r);\ x_{ij} \ge 0;\ i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n\right\}, \quad \tau = \gamma, \quad p - \gamma.$$

Вычислим значения целевой функции (5) в некоторых опорных планах $H_{x(\tau, r)}$, смежных с $x(\tau, r)$. Если среди них найдется такой, где значение (6) меньше, чем $\hat{z}(x(\tau, r))$, то фиксируем этот план и рассмотрим опорные планы, смежные с ним, и т.д. При каждом переходе в новый опорный план целевая функция (5) строго убывает, так что такой процесс окончится через конечное число шагов. План, получаемый в процессе локального улучшения, обозначим $x^*(\tau, r)$, где $\tau = \gamma, p - \gamma$. Из всех смежных опорных планов проверяется лишь незначительная часть.

Пусть $I_j^{(\tau)} = \{i : x_{ij}(\tau, j) > 0\}$, $j = 1, \ldots, n$. В плане $x(\tau, r)$ могут иметься нулевые ($x$ – невыбранные, т.е. небазисные) элементы множества $I_j^{(\tau)}$, $j = 1, \ldots, n$; $j \ne r$. Увеличение одного из таких элементов с соответствующим изменением по цепочке $x(\kappa, r)$ выбранных элементов определяет смежный опорный план с номером $k$, рассматриваемый в процессе локального улучшения. Заметим, что $\dot{y}_r(\kappa, r) \equiv \sum_{i=1}^{m} \dot{x}_{ir}(\kappa, r) = y_r(\gamma, r)$, так как $\dot{x}(\kappa, r) \in H_{x(\tau, r)}$. Следовательно, $\dot{y}_r(\gamma + 1, r) \le \dot{y}_r(\gamma, r) = y_r(\gamma, r)$.

Имеют место следующие утверждения: для предприятия $r$, если $y_r(\gamma, r) = 0$, то из ограничения $\sum_{i=1}^{m} x_{ir} = y_r \le y_r(\gamma, r)$ следует $y_r(\gamma^1, r) = 0$ для всех $\gamma^1 > \gamma$; а если $y_r(p - \gamma, r) > 0$, то из ограничения $\sum_{i=1}^{m} x_{ir} = y_r \ge y_r(p - \gamma, r)$ следует $y_r(p - \gamma^1, r) > 0$ для всех $\gamma^1 > \gamma$. Следовательно, если для некоторого предприятия $r$ получилась нулевая максимальная мощность, т.е. $y_r(\gamma, r) = 0$, то мощность для него остается нулевой и в последующих циклах. А если же для некоторого предприятия $r$ получилась положительная минимальная мощность, т.е. $y_r(p - \gamma, r) > 0$, то мощность для него остается положительной и в последующих циклах.

Дадим теперь формальное описание процесса. Пусть $s = (\tau - 1)n + r$, где $\tau = \gamma, p - \gamma$ (т.е. $\tau$ принимает значения $\gamma$ и $p - \gamma$). Положим $I_r^{(0)} = \{1, \ldots, m\}$, $r = 1, \ldots, n$ и $H(1) = H_x$. Пусть план $x^{(l)}(\tau, r) \in H(s)$ минимизирует функцию

$$F'_{\gamma r}(x) = \sum_{j=1, j \ne r}^{n} \sum_{i=1}^{m} (c_{ij} + d_{j\theta_j(\tau)}) x_{ij} + \sum_{i \in I_r} (c_{ir} + d_{rk(\tau)}) x_{ir}, \tag{8}$$

где $k(r)$ определяется условиями $b_{k(r)} \le y_r \le b_{k(r)+1}$, $y_r \equiv y_r(l-1)$, и $k$ меняется с изменением $\tau$, а $\theta_j(\tau) = \tau$, если $\sum_{i=1}^{m} \dot{x}_{ij}(\tau-1, j) \ge b_\tau$, или $\theta_j(\tau)$ определяется из условия $b_{\theta_j(\tau)} \le \sum_{i=1}^{m} \dot{x}_{ij}(\tau-1, j) < b_{\theta_j(\tau)+1}$. План $x(\tau, r) = \|x_{ij}(\tau, r)\|$ минимизирует (6) на $H(s)$. План $\dot{x}(\tau, r) \in H(s)$ доставляет локальный минимум функции (5) в окрестности $x(\tau, r)$. План $x(\tau, r)$ строится по следующему алгоритму.

Алгоритм А1.

1. При $l = 0$ полагаем $y_r^{(l)} = \dot{y}_r(\tau-1, r) = \sum_{i=1}^{m} \dot{x}_{ir}(\tau-1, r)$ и находим $k(l)$ из условия $b_{k(l)} \le y_r(l) < b_{k(l)+1}$. При $\tau = \gamma = 1$ $(\tau = p - \gamma = p - 1)$ $\dot{y}_r(0, r))$ и $\dot{y}_r(p, r)$ не определены, в этом случае $k(l)$ берется из условия $b_{k(l)} \le \nu_r < b_{k(l)+1}$.

2. Строим опорный план $\|x_{ij}^{(l)}\|_{m \times n}$, минимизирующий функционал (6) на $H(s)$. Определим $k_r(l)$ из условия $b_{k_r(l)} \le y_r^{(l)} < b_{k_r(l)+1}$. Если выполняется одно из условий $k_r(l) = k_r(l-1)$, $y_r(l) = \sum_{i=1}^{m} x_{ir}^{(l)} = 0$ или $y_r(l) = \sum_{i=1}^{m} x_{ir}^{(l)} = y_r(\gamma - 1)$, $\tau = \gamma(y_r(l) = \sum_{i=1}^{m} x_{ir}^{(l)} = y_r(p - \gamma + 1)$, $\tau = p - \gamma)$, то план $x(\tau, r) \equiv x^{(l)}$ оптимизирует (6) на $H(s)$ и алгоритм А1 завершен. В противном случае увеличиваем $l$ на единицу и повторяем пункт 2.

Приближенное решение задачи (2)–(5) находим по следующему алгоритму.

Алгоритм А2.

1. При $s = 1$ положим $H(1) = H_x$.

2. С помощью алгоритма А1 строим планы $x(\gamma, r)$, $x(p - \gamma, r)$, а затем локально-оптимальные планы $\dot{x}(\gamma, r)$, $\dot{x}(p - \gamma, r)$.

3. Определим $H(s+1) = \{x\colon x \in H(s);\ \dot{y}_r(p-\gamma, r) \le \sum_{i=1}^{m} x_{ir} \le \dot{y}_r(\gamma, r)\}$, где $\gamma$, $r$ однозначно находятся из условия $s = (\gamma - 1)n + r$.

4. Если выполняется одно из условий:

а) $\sum_{j=1}^{n} y_j(\gamma, j) = \sum_{i=1}^{m} a_i$; б) $b_\gamma \ge \max\limits_{j}\{y_j(\gamma, j)\}$; в) $\sum_{j=1}^{n} y_j(p-\gamma, j) = \sum_{i=1}^{m} a_i$;

г) $b_{p-\gamma} \le \min\limits_{j}\{y_j(p-\gamma, j)$; д) $\sum_{j=1}^{n} y_j(p-\gamma, j) \ge \sum_{j=1}^{n} y_j(\gamma, j)$,

то в качестве приближенного решения (2)–(5) выбирается наилучший из полученных ранее локально-оптимальных планов. В противном случае увеличиваем $s$ на 1 и переходим к пункту 2.

Чтобы оценить погрешность метода, разобьем многогранник $H_x$ на $pn$ частей: $H_{kr} = \{X : X \in H_x$, $b' - b_{k+1} \le \sum_{i=1}^{m} x_{ir} = y_r \alpha\, b' - b_k\}$, где $b' = \sum_{i=1}^{m} a_i$. Тогда $F_{kr}[X(k, r)] \le \min\limits_{H_{kr}}\{F_{kr}(X)\}$, $\hat{z}\,[X^*(k, r] \le \hat{z}\,[X(k, r)]$, для всех $k$ и $r$, где $X(k, r)$, $X^*(k, r)$ – планы, определяемые по алгоритму $A$ на итерации $s = (k-1)n + r$.

Чтобы повысить точность метода, необходимо увеличить число разбиений отрезка [0, $b$?] так, чтобы $\max(b_{k+1} - b_k)$ стал как можно меньше. При этом может увеличиться число решаемых транспортных задач.

Если функции $\varphi_j(y_j)$, $y_j > 0$, монотонно не возрастают, то имеют место следующие теоремы (Алибеков, 1975).

**Теорема 2.** *Если* $X^1, X^2 \in H_{kr}$, $F_{kr}(X^1) = \min\limits_{H_{kr}}\{F_{kr}(X)\}$, $\hat{Z}(X^2) = \min\limits_{H_{kr}}\{\hat{Z}(X)\}$, *то* $\hat{Z}(X^1) - \hat{Z}(X^2) \le \le b_k \max\limits_{j}\{d_{j[(k+1)/2]} - d_{jk}\}$.

**Теорема 3.** *Если* $X^0$ *допустимый план задачи* (1)–(4), *полученный с помощью алгоритма А, то имеет место неравенство* $\hat{Z}(X^0) - \min\limits_{H_x}\{\hat{Z}(X)\} \le (b'/n)\max\limits_{j}\{d_{j[(\gamma+1)/2]} - d_{j\gamma}\}$, *где* $\gamma$ *определяется из условия* $b_{\gamma-1} \le b'/n < b_\gamma$.

Зная точность аппроксимации и используя теорему 3, можно оценить погрешность метода (Алибеков, 1975).

При решении контрольной задачи (1)–(2) при $n = m = 12$, $f_j(y_j) = 100y_j^{0.7651} + 0.25y_j^{0.7607}$ на компьютере за 5–10 сек. получен тот же результат, как за 1.5 мин на “Минск-22” в (Алибеков, 1975). Этот метод применялся при решении задач размещения, задач унификации и других многоэкстремальных задач типа размещения. Анализы некоторых результатов приведены в (Алибеков, 1975, 1979, 2002; Белов, Минкин, Алибеков, 1983; Алибеков, Жуков, 1990).

## 3. ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ С ДИСКРЕТНЫМИ МОЩНОСТЯМИ

Обозначим $\Omega_x = \{x\colon \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i;\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \in M_j;\ x_{ij} \geq 0;\ i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n\}$, где $M_j = \{b_j^{(0)}, \ldots, b_j^{(k_j)}\}$, тогда задача (1)–(4) примет вид: найти план $x \in \Omega_x$, доставляющий минимум функции (1), т.е.

$$z(x^{**}) = \min_{x \in \Omega_x}(z(x)). \tag{9}$$

Введем множество $H_x = \{x\colon \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i;\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq v_j = b_j^{(k_j)};\ x_{ij} \geq 0,\ i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n\}$, где $b_j^{(k_j)} = \max_{1 \leq k \leq k_j}\{b_j^{(k)}\}$, и рассмотрим задачу: найти план $x \in H_x$, доставляющий минимум функции $z(x)$, т.е.

$$z(x^{*}) = \min_{x \in H_x}(z(x)). \tag{10}$$

Множество допустимых значений задачи (10) включает множество допустимых значений задачи (9) (т.е. $\Omega_x \subseteq H_x$), следовательно, имеет место неравенство

$$z(x^{*}) = \min_{x \in H_x}(z(x)) \leq z(x^{**}) = \min_{x \in \Omega_x}(z(x)). \tag{11}$$

Зная решение задачи (10), можно оценить минимум функции $z(x)$ снизу на множестве $\Omega_x$. Задачу (10) можно аппроксимировать задачей

$$\hat{z}(\dot{x}) = \min_{x \in H_x}(\hat{z}(x)), \tag{12}$$

а задачу (9) –

$$\hat{z}(\ddot{x}) = \min_{x \in \Omega_x}(\hat{z}(x)). \tag{13}$$

Также имеет место неравенство

$$\hat{z}(\dot{x}) = \min_{x \in H_x}(\hat{z}(x)) \leq \hat{z}(\ddot{x}) = \min_{x \in \Omega_x}(\hat{z}(x)). \tag{14}$$

К задаче (13) можно было бы применить метод динамического программирования, перебирая значения $y_j \in M_j$ из различных интервалов так, чтобы выполнялись условия $\sum_{j=1}^{n} y_j = \sum_{i=1}^{m} a_i = b$, $y_j \in M_j = \{b_j^{(0)}, \ldots, b_j^{(k_j)}\}$, и решая соответствующие транспортные задачи. Число транспортных задач будет очень велико, поэтому на практике этот метод почти не применяется. Приближенное оптимальное решение $\ddot{x} \in \Omega_x$ задачи (9) ищется в окрестности приближенного оптимального решения $\dot{x} \in H_x$ задачи (10). Предлагается следующий процесс.

Пусть $\dot{y} = \{\dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n\}$, где $\dot{y}_j = \sum_{i=1}^{m} \dot{x}_{ij}$ оптимальные значения мощностей $y_j$, $j = 1, \ldots, n$, задачи (12), определяемые по алгоритму А. Определим множество

$\Theta_x = \{x\colon \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i;\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = y_j \in \{r_j^{(0)}, r_j^{(1)}\},\ x_{ij} \geq 0;\ i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n\}$, где $r_j^{(0)} = b_j^{(j_0)}$, $r_j^{(1)} = b_j^{(j_0+1)}$, а $b_j^{(j_0)}$ и $b_j^{(j_0+1)}$ определяются из условия $b_j^{(j_0)} \leq \dot{y}_j < b_j^{(j_9+1)}$ (если $j_0 = k_j$, то $r_j^{(0)} = b_j^{(k_j-1)}$, $r_j^{(1)} = b_j^{(k_j)}$), $j = 1, \ldots, n$.

При этих обозначениях задачу (13) можно заменить приближенной задачей: найти план $\overset{\times}{x} \in \Theta_x$, доставляющий минимум функции (11), т.е.

$$\hat{z}(\overset{\times}{x}) = \min_{x \in \Theta_x}(\hat{z}(x)). \tag{15}$$

На множестве $\Theta_x$ существуют всего $2^n$ возможных вариантов $y = \{y_1, \ldots, y_n\}$, так как $y_j = r_j^{(0)}$ или $y_j = r_j^{(1)}$. Так как допустимый план $y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ удовлетворяет условию $\sum_{j=1}^{n} y_j = \sum_{i=1}^{m} a_i = b$, поэтому число допустимых вариантов $y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ гораздо меньше, чем $2^n$. Из множества допустимых вариантов $\Theta_x$ целесообразно выбирать только те значения, которые доставляют наименьшее значение функции $R(\dot{y}, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\dot{y}_j - y_j)^2}$ или функции (5), решив задачу (2)–(5). Если множество $\Theta_x$ пусто, то расширяем его специальным способом: если $\dot{x}$ – оптимальное решение задачи (9), $\overset{\times}{x}$ – оптимальное решение задачи (12), а $\ddot{x}$ – оптимальное решение задачи (13), то имеет место неравенство $\hat{z}(\dot{x}) \le \hat{z}(\ddot{x}) \le \hat{z}(\overset{\times}{x})$ (это следует из условий: $\dot{x} \in H_x$, $\ddot{x} \in \Omega_x$, $\overset{\times}{x} \in \Omega_x$, $\Theta_x \subseteq \Omega_x \in H_x$).

Используя неравенство $\hat{z}(\dot{x}) \le \hat{z}(\ddot{x}) \le \hat{z}(\overset{\times}{x})$, можно оценить точность полученного решения. При решении контрольной задачи (см. (Алибеков, 1975; Хачатуров, 1967)) со следующими значениями исходных данных: $n = m = 12$, $a = \{a_1, \dots, a_m\} = \{12; 16; 57; 26; 17; 38; 28; 22; 194; 18; 42; 30\}$, $f_j(y_j) = 100y_j^{0.7651} + 0.25y_j^{0.7607}$, $M_j = \{0; 10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 100\}$, $j = 1, \dots, n$, на современных ПК за 3 сек., получен тот же результат, как за 1.5 мин. на "Минск-22" в (Алибеков, 1975). Результатом работы алгоритма являются следующие планы: $\dot{y} = \{\dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n\} = \{0; 0; 57; 26; 100; 80; 28; 0; 100; 29; 80; 0\}$, $\overset{\times}{y} = \{\overset{\times}{y}_1, \dots, \overset{\times}{y}_n\} = \{0; 0; 60; 30; 100; 80; 30; 0; 100; 20; 80; 0\}$, $\hat{z}(\dot{x}) = \min_{x \in H_x}(\hat{z}(x)) = 18842$, $\hat{z}(\overset{\times}{x}) = \min_{x \in \Theta_x}(\hat{z}(x)) = 18932$, $R(\dot{y}, \overset{\times}{y}) = 10.5$, $(\hat{z}(\overset{\times}{x}) - \hat{z}(\dot{x}))/\hat{z}(\dot{x}) = (1893.2 - 18842)/18842 = 90/118842 \approx$ $\approx 0.0048 \approx 0.48\%$.

Эксперимент, проведенный автором на современных компьютерах, показал высокую эффективность предложенного метода. Используя этот метод, можно решать задачи размещения, задачи унификации и другие многоэкстремальные задачи типа размещения. В основном все полученные результаты были оптимальными или близкими к оптимальным.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

**Алибеков Б.И.** (1975): О задаче на размещение с ограниченными мощностями // *Экономика и мат. методы*. Т. XI. Вып. 3.

**Алибеков Б.И.** (1979): Двухсторонний итерационный процесс определения приближенного оптимального решения многоэкстремальной задачи типа размещения. В "*Автоматизация проектирования систем управления железных дорог*". Межвузовский тематический сборник. Вып. 154. Ростов-на-Дону: РИИЖТ.

**Алибеков Б.И.** (2002): Двухсторонний итерационный процесс определения приближенного оптимального решения задачи размещения. Материалы третьей региональной научно-практической конференции. Махачкала: Дагестанский государственный университет.

**Алибеков Б.И., Жуков В.П.** (1990): Система моделей транспортного комплекса региона // *Транспорт. Наука, техника, управление*. № 5.

**Белов Д.К., Минкин В.Б., Алибеков Б.И.** (1983): Оптимизация транспортно-экономических связей перевозок грузов в регионе на примере сахарной свеклы. В сб.: "*Известия Северо-Кавказского научного центра высшей школы*". Сер. "*Технические науки*". № 3.

**Хачатуров В.Р.** (1967): Алгоритм и программа решения задачи размещения предприятий с неограниченными объемами производства // *Экономика и мат. методы*. Т. III. Вып. 2.

Поступила в редакцию
15.12.2004 г.

# Two-Side Iterative Process of Definition of the Approximate Optimum Decision of a Task of Allocation with the Limited Capacities

**B. I. Alibekov**

The multiextreme task of allocation with nonlinear function of the purpose and linear restrictions is considered. Convex upwards initial function of the purpose is replaced with piece-linear function, and the initial task is reduced to a partially integer-approached task. For the decision, the author offers a two-side iterative method of definition of the plan close to the optimum. On each iteration, the transport tasks are solved, and the local optimum decision of an initial task is defined. Using the received locally optimum decision of the approached task is carried out until coordinate two sides narrowing of area of the acceptable decisions of an initial task. Using the received optimum decisions of a task of allocation with the limited capacities, the area of the acceptable decisions of a task of allocation with restrictions on capacity in alternative production is narrowed. The plan belonging to new area giving a minimum of criterion function of an initial task is defined. The value of the criterion functions appropriate to the received decision is estimated from below. The description of algorithm of the decision of a task of allocation and analysis of efficiency of a method on experimental accounts is resulted.