ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2007, том 43, № 3, с. 102–120

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТРАНСФЕРТОВ

© 2007 г. И. Б. Колмаков

(Москва)

Разработаны методы решения оптимизационных задач распределения трансфертов, позволяющие получать аналитические решения для двух классов критериев. Варианты оценок состояния объекта сопровождаются графической интерпретацией расчетов. Для одного из критериев, в качестве примера, доказан характер оптимальности решения. Предложена система синтеза критериев для заданных целей распределения. Разработаны методики расчета оптимальных величин распределяемого ресурса для вектора оптимальной доли остаточной неудовлетворенности (“нуждаемости”) на базе различных критериев, включая критерий социально справедливого распределения ресурсов.

1. ПРОБЛЕМЫ МЕЖБЮДЖЕТНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Трансферты – основной механизм поддержки регионов из федерального бюджета. Они составляют более 70% всей суммы поддержки. *Сохранение территориальной целостности России во многом зависит от эффективности и адекватности методики распределения трансфертов* (Максимова, 2000).

Нет ни одной страны мира, которая была бы удовлетворена своей системой распределения финансовой помощи регионам. Объясняется это, как минимум, тремя причинами. Во-первых, сама задача достаточно сложна методически. Финансовая помощь должна попадать именно тем регионам, которые в ней действительно нуждаются, и она не должна подрывать стимулы для проведения на местах самостоятельной рациональной и ответственной налогово-бюджетной политики. Это означает, что необходимы объективные методы оценки различий в расходных потребностях и доходном потенциале. Во-вторых, процесс распределения финансовой помощи по определению конфликтен, требует выработки политических компромиссов между властями разных уровней и регионами с разной бюджетной обеспеченностью. В-третьих, отсутствуют методы, модели и системы доказательно справедливого распределения ограниченных ресурсов. Все эти обстоятельства обусловливают предельную прозрачность распределения финансовой помощи регионам.

В конце 1993–1994 гг. была проведена радикальная реформа межбюджетных отношений. Впервые в российской практике были установлены единые (за исключением Татарстана, Башкортостана и Якутии) нормативы отчислений от федеральных налогов в бюджеты субъектов федерации, создан Фонд финансовой поддержки регионов (ФФПР), средства которого (трансферты) стали распределяться на основе единой для всех формализованной методики.

В июле 1998 г . правительством была одобрена, а затем в течение двух лет практически полностью реализована Концепция реформирования межбюджетных отношений на 1999–2001 гг. Ее основная задача – поэтапный переход к принципиально новой методике распределения ФФПР, основанной на общепризнанных принципах бюджетного выравнивания: прозрачная, единая для всех формула, четкий критерий “нуждаемости”, оценка объективно обусловленных различий в расходных потребностях и налоговом потенциале регионов.

В основе распределения трансфертов лежит единственный параметр: уровень приведенных доходов в расчете на душу населения, или, что то же самое, реальная бюджетная обеспеченность регионов. Под доходами понимаются не фактические, а потенциальные налоговые ресурсы, которые может генерировать территория при сложившихся уровне и структуре ее валового регионального продукта (ВРП). “Приведенными” налоговые ресурсы становятся после деления их сначала на численность населения региона, а затем на так называемый индекс бюджетных расходов, характеризующий, во сколько раз больше (меньше) среднего по России уровня обходится в данном регионе производство одного и того же объема бюджетных услуг (с учетом районных коэффициентов к заработной плате, уровня цен, транспортной доступности, структуры населения и других объективных факторов) (Максимова, 2000).

Технические аспекты этой достаточно прозрачной методики детально рассматривала рабочая группа Минфина, в которую входят руководители финансовых органов субъектов федерации, а политические – трехсторонней рабочей группой по совершенствованию межбюджетных отношений, в которой представлены правительство, Государственная дума и Совет Федерации. Именно эта группа открыто и гласно принимала решения о выборе окончательного варианта распределения трансфертов.

Стратегическая цель распределения трансфертов – повышение возможностей регионов финансировать закрепленные за ними социально значимые расходы – должна достигаться в любом случае. Но связанные с ней ограничения могут быть реализованы двумя способами (Максимова, 2000).

Первый способ распределения трансфертов – по принципу пропорционального выравнивания – состоит в том, что наряду с очевидным выравниванием бюджетной обеспеченности (регионы с меньшими приведенными доходами всегда получают больше трансфертов) он создает стимулы собирать больше собственных налогов: перемещаясь вверх по оси дотрансфертных доходов, регион одновременно двигается вверх и по оси послетрансфертных доходов. Однако при этом низкообеспеченные регионы рискуют даже после получения трансфертов остаться ниже черты бюджетного "прожиточного минимума".

Альтернативный принцип состоит в том, чтобы повысить бюджетную обеспеченность наиболее нуждающихся регионов до одного и того же минимально гарантированного уровня (последний определяется только размером ФФПР). В этом случае для дотационных регионов вероятность превысить бюджетный "прожиточный минимум" больше, но зато нет никаких стимулов для саморазвития: все равно после распределения трансфертов их бюджетная обеспеченность окажется на одинаковом для всех уровне.

Первый вариант назван стимулирующим, второй – социальным. Каждый из них имеет свои преимущества и недостатки. В связи с этим вполне логичным представляется разделить ФФПР на две части, распределяемые между регионами по разным принципам. На 2000 г. соотношение между стимулирующей и социальной частями ФФПР трехсторонней рабочей группой было установлено в пропорции 80 на 20, что позволило сократить разрыв между наиболее и наименее обеспеченными регионами с 20–25 до 4 раз, повысив реальные доходы наименее развитых регионов как минимум до 68% от среднероссийского уровня (Максимова, 2000).

Точность расчетов предопределена доступной статистической базой. При распределении трансфертов используются официальные данные федеральных министерств и ведомств, главным образом Госкомстата России, которые сверяются с наиболее заинтересованными участниками процесса – финансовыми органами субъектов федерации. Ряд общих параметров расчета трансфертов задается извне, и они в равной степени относятся ко всем регионам.

В статье Н. Максимовой (Максимова, 2000) изложены экспертные методы распределения ресурсов (ЭМР). Представлена еще одна серия хорошо аргументированных экспертных методов распределения ресурсов, которые с точки зрения "здравого смысла" наилучшим образом решают проблему. Ни один из экспертных методов решения не позволяет решить задачу, например, социально справедливого распределения ресурсов. Отсутствие строгих математических доказательств для экспертных методов распределения оставляет открытым вопрос: являются ли на самом деле такие ЭМР оптимальными? Именно поэтому в настоящей статье предлагается система методов и моделей, позволяющая с экономической точки зрения математически точно решать задачи оптимального распределения ограниченных ресурсов для различных критериев, включая критерий социально справедливого распределения.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕСУРСОВ

2.1. Исходная информация и определение основных показателей. Задан объем ресурсов R, который необходимо распределить между регионами. Неизвестной величиной является вектор коэффициентов оставшегося после распределения ресурса дефицита (вектор коэффициентов оставшейся "нуждаемости" в терминологии Минфина). Все остальные параметры и показатели предполагаются заданными. Задача состоит в том, чтобы по известному ограничению на ресурсы и критерию, выраженному функцией коэффициентов остаточного дефицита, определить оптимальные значения выделяемых ресурсов и коэффициенты остаточного дефицита для каждого региона. Качество состояния объекта или проекта прогноза определяется вектором удаленности от уровня, заданного экспертными научными показателями (рациональными нормами). Такой уровень соответствует нулевой “нуждаемости”. (Во всех приводимых ниже формулах и обозначениях индекс 1 относится к показателям, определяющим состояние объекта на конец отчетного периода; индекс 2 – к показателям, определяющим вариант проекта прогноза на конец прогнозного периода; индекс n – к показателям, определяемым по рациональным нормам.)

Для построения принципа уравнения реально сохраняемого дефицита отчетного периода определяются:

– условная рациональная потребность отчетного периода (a_{1ni});

– условная фактическая обеспеченность на конец отчетного периода (d_{1i});

– реально сохраняемый дефицит отчетного периода (z_{1i});

– реально сохраняемая доля неудовлетворенности региона на конец отчетного периода (y_{1i}):

$$z_{1i}(y_{1i}) = a_{1ni} - d_{1i}(y_{1i}). \tag{1}$$

По состоянию налогового потенциала региона и нормативным данным вычисляются индивидуальные потребности в необходимых доходах. Прогноз дефицита региона i, соответствующий отклонению от рациональной потребности к началу прогнозного периода, принимает вид:

$$\tilde{z}_{2i} = a_{ni} - d_{2i}, \tag{2}$$

где a_{ni} – прогноз необходимой потребности дохода региона по рациональным нормам; d_{2i} – прогноз собственной обеспеченности региона доходом к началу прогнозного периода.

Реальная ситуация такова, что выделяемый ресурс R всегда меньше суммы дефицитов всех регионов к началу прогнозного периода, определяемых с учетом рациональных норм:

$$\sum_{i=1}^{I} \tilde{z}_{2i} > R. \tag{3}$$

Поэтому даже после выделения ресурса дефицит сохранится и в прогнозном периоде, следовательно, сохранится и остаточная неудовлетворенность. В рассматриваемых уравнениях вектор коэффициентов доли неудовлетворенности $Y(y_1, \ldots, y_I)$ выступает как переменная величина, оптимальное значение которой соответствует оптимальному распределению ресурса и оптимально сохраняющейся доле неудовлетворенности $Y_{\text{опт}}(y_{1\text{опт}}, \ldots, y_{I\text{опт}})$. Условию (3) удовлетворяет множество распределений. Результаты распределения зависят от того, каким целям и каким критериям должно отвечать распределение. На практике при интуитивных критериях используются различные экспертные методы распределения (ЭМР). Согласительные протоколы между правительством и регионами и многосторонние комиссии с участием законодателей являются своего рода инструментами ЭМР.

Применение экономико-математических методов (ЭММ) формализует процесс распределения и позволяет по заданному критерию для достижения определенных целей выполнять распределение ограниченных ресурсов и обеспечивать наилучшее качество варианта прогноза распределения ресурсов, удовлетворяющее поставленным целям, или решать обратную задачу – оценить критерий, которому соответствует распределение, если оно было задано экспертно.

Запись уравнения дефицита для выбранной оптимизируемой величины $Y(y_1, \ldots, y_I)$, заданных параметров варианта проекта прогноза через величины начального $\tilde{z}_{2i}$ и остаточного дефицитов $z_{2i}(y_{2i})$ позволяет установить взаимосвязи параметров варианта проекта прогноза и получить графическую интерпретацию экономического состояния объекта.

2.2. Графическая интерпретация экономического состояния объекта. Взаимосвязи показателей, характеризующих экономическое состояние региона, лучше всего прослеживаются на графиках. Воспроизведем уравнение дефицита региона i на конец отчетного периода $z_{1i}(y_{1i}) = a_{1ni} - d_{1i}(y_{1i})$.

Если это уравнение изобразить в виде линии, то при таком изображении теряется основная оптимизируемая координата – доля неудовлетворенности. Поэтому изображение экономического состояния объекта на конец отчетного периода производится в плоскости прямоугольной системы координат. В качестве второй координаты вводится относительная обеспеченность (рис. 1). Рассмотрим две оси: ось абсцисс X – материальное обеспечение (потребность, удовлетворенность, дефицит, ресурсы), $X \in (-\infty, \infty)$; ось ординат Y – относительная обеспеченность (доля обеспеченности, доля неудовлетворенности), $Y \in [0, 1]$. Ось Y проводится через точку соединения дефицита и обеспеченности. Влево от начала координат по оси X откладывается отрезок, равный сохранившемуся дефициту региона к концу отчетного периода. На расстоянии, равном единице

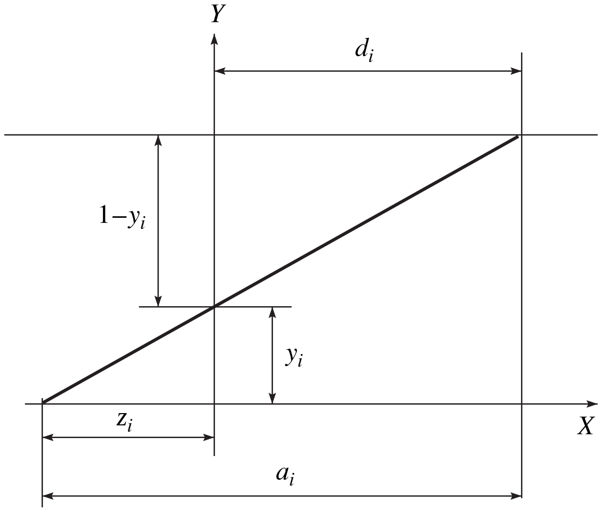

Рис. 1. Графическая оценка состояния объекта (региона i) на конец отчетного периода в прямоугольной системе координат.

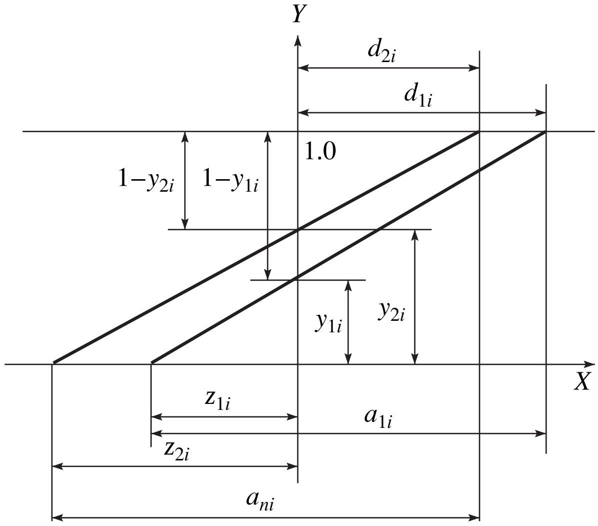

Рис. 2. Совмещенные графические оценки состояния объекта в прямоугольной системе координат на конец отчетного и начало прогнозного периодов.

от начала координат по оси Y, вправо от этой оси откладывается отрезок, равный обеспеченности $d_{1i}(y_{1i})$. Если соединить крайние точки отрезков $\tilde{z}_{1i}$ и d_{1i}, то эта прямая пересечет ось Y в точке, которая разделит единичный отрезок оси Y на две части. Из графика четко следуют определения основных показателей состояния объекта (региона i) к концу отчетного периода: a_{1i} – потребность; $1 - y_{1i}$ – доля обеспеченности; $d_{1i} = (1 - y_{1i})a_{1i}$ – фактическая обеспеченность; $z_{1i} = y_{1i}a_{1i}$ – сохранившийся дефицит; y_{1i} – сохранившаяся доля неудовлетворенности.

Эти же соотношения справедливы не только для показателей каждого региона в отдельности, но и для сводных показателей по России в целом: обобщенной потребности A_1, обобщенной фактической обеспеченности D_1 и реально сохраняемого обобщенного дефицита $\tilde{Z}_1$. Эти показатели получаются суммированием соответствующих частных показателей:

$$A_1 = \sum_{i=1}^{I} a_{1i}; \quad D_1 = \sum_{i=1}^{I} d_{i1}; \quad \tilde{Z}_1 = \sum_{i=1}^{I} \tilde{z}_{1i}.$$

Средняя доля неудовлетворенности к концу отчетного периода по России в целом составляет: $y_{1\text{сред}} = \tilde{Z}_1 / A_1$.

При переходе к прогнозным оценкам состояния объекта необходимо учесть неизбежность изменений: обеспеченности, дефицита, потребностей по рациональным нормам из-за изменений демографической обстановки, изменений макроэкономических показателей (ВРП, инфляция, доходы населения, покупательная способность и др.) и т.д. Один из возможных вариантов этих изменений отражен на рис. 2.

Если региону не выделять никаких ресурсов ($R = 0$), то из графика следует, что регион i в прогнозном периоде будет иметь: a_{ni} – прогноз оценки нормативной потребности; d_{2i} – прогноз реально достижимой собственной обеспеченности; $\tilde{z}_{2i}$ – образовавшийся дефицит $\tilde{z}_{2i} = a_{ni} - d_{2i}$; y_{2i} – долю неудовлетворенности, соответствующую параметрам варианта проекта прогноза (при условии $R = 0$); $1 - y_{2i}$ – долю собственной обеспеченности. Поэтому можно рассматривать основное уравнение дефицита на начало прогнозного периода как функцию доли неудовлетворенности y_{2i}:

$$\tilde{z}_{2i} = z_{2i}(y_{2i}) = a_{ni} - d_{2i}(y_{2i}). \tag{4}$$

На графиках совмещение данных отчетного и прогнозного периодов производится в момент времени, который условно является окончанием отчетного и началом прогнозного периодов. Графически определение экономических характеристик состояния региона после выделения оптимальных ресурсов $r_{2i\text{опт}}$ иллюстрируется следующим образом. Пусть на прогнозный период произойдет выделение оптимального ресурса для региона i:

$$r_{2i\text{опт}}(y_{2i\text{опт}}) = \tilde{z}_{2i} - a_{ni}y_{2i\text{опт}}. \tag{5}$$

Зависимость между выделенным оптимальным ресурсом $r_{2i}(y_{2i\text{опт}})$ для региона i и оптимальной долей неудовлетворенности – линейная. На графике процедура выделения оптимальных ресурсов отразится переносом начала координат по оси X влево на $r_{2i\text{опт}}$. Величина обеспеченности $d_{2i\text{опт}}$ возрастет на величину выделенного ресурса и станет равной $d_{2i\text{опт}}(y_{2i\text{опт}}) = d_{2i} + r_{2i\text{опт}}(y_{2i\text{опт}})$.

Построим основное уравнение, используя для определения оптимально сохраняемого дефицита $z_{2i}(y_{2i\text{опт}})$ значения оптимальной доли неудовлетворенности варианта проекта прогноза региона после выделения оптимального ресурса $r_{2i\text{опт}}$. Величина остаточного реально сохраняемого дефицита на конец прогнозного периода снизится на величину оптимального выделенного ресурса и станет равной:

$$z_{2i\text{опт}}(y_{2i\text{опт}}) = \tilde{z}_{2i} - r_{2i\text{опт}}(y_{2i\text{опт}}) = a_{ni}y_{2i\text{опт}}. \tag{6}$$

Основное уравнение остаточного оптимального дефицита (6) является линейной функцией $y_{2i\text{опт}}$ – оптимальной доли остаточной неудовлетворенности региона i. В результате изменения обеспеченности и дефицита оптимальная доля неудовлетворенности варианта проекта прогноза региона после выделения оптимального ресурса снизится до величины $y_{2i\text{опт}} = z_{2i\text{опт}}(y_{2i\text{опт}})/a_{ni}$.

Началу прогнозной работы предшествует контурная оценка сводных показателей. Это означает, что должны быть известны сводные показатели: обобщенной потребности A_{2n}, обобщенной собственной обеспеченности D_2 и реального обобщенного дефицита $\tilde{Z}_2$. Эти показатели получаются суммированием соответствующих частных показателей всех регионов:

$$A_{2n} = \sum_{i=1}^{I} a_{2ni}; \quad D_2 = \sum_{i=1}^{I} d_{2i}; \quad \tilde{Z}_2 = \sum_{i=1}^{I} \tilde{z}_{2i}.$$

Тогда доля неудовлетворенности в целом для РФ к началу прогнозного периода достигнет величины $Y_2 = \tilde{Z}_2/A_{2n}$.

Пусть на прогнозный период произойдет выделение ресурса для всех регионов R. На графике эта процедура отразится переносом начала координат по оси X влево на величину ресурса R. Величина обеспеченности D_2 возрастет на величину выделенного ресурса и станет равной $D_{2R} = D_2 + R$; величина остаточного реально сохраняемого дефицита на конец прогнозного периода снизится на величину выделенного ресурса $Z_{2R} = \tilde{Z}_2 - R$. В результате изменения обеспеченности и дефицита средняя доля остаточной неудовлетворенности варианта проекта прогноза после выделения ресурса снизится до величины $Y_{2R} = Z_{2R}/A_{2n}$, а доля удовлетворенности возрастет до $1 - Y_{2R} = D_{2R}/A_{2n}$. Снижение доли остаточной неудовлетворенности после выделения ресурса R произойдет на ΔY_{2R}: $\Delta Y_{2R} = R/A_{2n}$.

Основное уравнение остаточного дефицита после выделения ресурса R является линейной функцией средней доли остаточной неудовлетворенности Y_{2R}:

$$Z_{2R} = A_{2n}Y_{2R}. \tag{7}$$

Зависимость между выделенным ресурсом для всех регионов страны R и долей неудовлетворенности Y_{2R} с использованием обозначения для начального значения дефицита $\tilde{Z}_2$ также линейная и имеет вид

$$R = \tilde{Z}_2 - A_{2n}Y_{2R}. \tag{8}$$

Графическая оценка сводных экономических характеристик в прямоугольной системе координат после выделения ресурсов в прогнозном периоде в точности соответствует рис. 3, если заменить обозначения индивидуальных характеристик объекта на обозначения сводных характеристик.

2.3. Постановка задачи оптимального распределения ресурсов. Ресурс R распределяется для достижения конкретных целей и в силу этого требования процесс распределения должен удовлетворять критериям, отражающим эти цели. Задача состоит в том, чтобы по известному ограничению на ресурсы (4) и критерию распределения этого ресурса рассчитать оптимальные остаточные доли неудовлетворенности каждого потребителя и соответствующие этим долям распределения ресурсов.

При распределении трансфертов, когда благополучие десятков миллионов людей зависит от принимаемых решений, необходима доказательность распределительных решений. Анализ предшествующих попыток получить с помощью ЭММ оптимальные доказательно справедливые распределительные решения показывает, что все они закончились неудачно. Задача ставилась так, что в ходе ее решения получались вырожденные (бесполезные) решения. Известные публикации сводятся к обсуждению ЭМР (Планирование, 1982). Ни постановка оптимизационной задачи, ни методы ее решения не являются проблемными. Проблемой оказалась математическая формулировка критериев, которые позволяли бы применить арсенал имеющихся математических методов и получить доказательно справедливые распределительные решения. В ходе исследований найдены два вида критериев, которые позволяют в рамках формальной постановки задачи получать аналитические решения. Каждый вид критерия характеризуется параметрами, имеющими вполне определенный экономический смысл. Формальная постановка задачи, ее решение и доказательство характера оптимальности (минимум или максимум целевой функции) рассмотрены ниже.

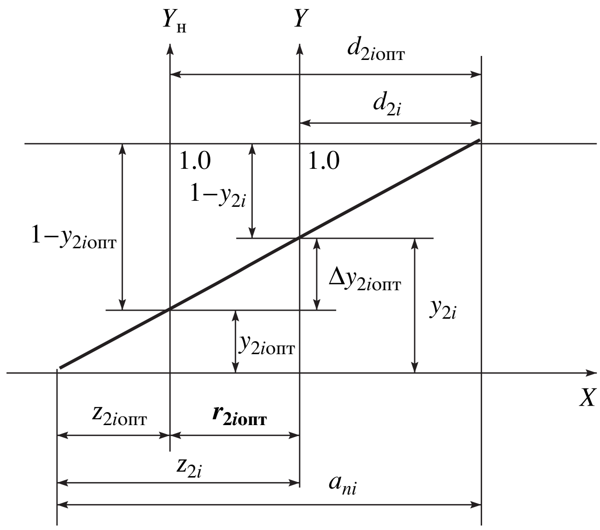

Рис. 3. Графическая оценка экономического состояния региона в прямоугольной системе координат до и после выделения ресурсов в прогнозном периоде.

3. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОПТИМАЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ

Как правило, ресурс R распределяется для снижения уровня дефицита и повышения доли удовлетворенности до рациональных норм. Но условия, в которых осуществляется этот процесс, делают это распределение многоцелевым (траектории движения к поставленным целям разных регионов слишком отличаются друг от друга). Поэтому проводится предварительная локализация целей. В локальной постановке результат процесса распределения должен удовлетворять поставленной цели, выраженной в форме соответствующего математического критерия. В рассматриваемой модели вектор доли сохраняемого (остаточного) дефицита $Y(y_1, \ldots, y_I)$ может выступать как переменная величина, оптимальное значение некоторых простейших функций этой величины соответствует оптимальному выделению ресурса. В действительности, как показали исследования (Колмаков, 1988а, 1988б,1989; Колмаков, Карманов, 1990), в качестве такой величины может выступать не только вектор доли сохраняемого (остаточного) дефицита $Y(y_1, \ldots, y_I)$, но и вектор $Q(q_1, \ldots, q_I)$, где каждая компонента q_i вычисляется через вектор y_i следующим образом:

$$q_i = a_i/d_i = 1/(1-y_i), \quad q_i \in [1, \propto). \tag{9}$$

Экономический смысл величины q_i определяется как отношение потребности к обеспеченности или, что то же самое, q_i есть величина, обратная доле обеспеченности. Из формулы (9) следует, что величина y_i в свою очередь может быть выражена как функция q_i:

$$y_i = \tilde{z}_i/a_i = (q_i-1)/q_i = 1-1/q_i, \quad y_i \in [0, 1]. \tag{10}$$

В процессе исследований установлено, что существуют решения, выраженные в терминах переменной q_i (решения первого класса), и оптимальные решения, выраженные в терминах переменной y_i (решения второго класса), т.е. обнаружено, как минимум, два класса решений.

3.1. Решение общего вида, выраженное в терминах переменной y_i. Перепишем основное уравнение дефицита региона (5) с упрощением обозначений (опустим индексы 2 и n):

$$r_i(y_i) = \tilde{z}_i - a_{ni}y_i. \tag{11}$$

По прогнозу экономического состояния регионов и нормативным данным определяются индивидуальные $\tilde{z}_i$ и суммарные $\sum_{i=1}^{I}\tilde{z}_i$ дефициты в трансфертах. Основное ограничение состоит в том, что величина выделенного для всех регионов (и доступного к распределению) ресурса R всегда меньше реальных сумм дефицита:

$$\sum_{i=1}^{I} r_i(y_i) = R \le \sum_{i=1}^{I}\tilde{z}_i \quad \forall i, i \subset [1, I]. \tag{12}$$

Формальная постановка задачи сводится к следующему: найти оптимум (минимум или максимум) целевой функции $L(Y)$:

$$L(Y) = L(y_1, \ldots, y_I) = L2(Y, S_{2i}(l)) \tag{13}$$

при ограничении (12):

$$F(Y) = R - \sum_{i=1}^{I} r_i(y_i) = R - \left(\sum_{i=1}^{I}\tilde{z}_i - \sum_{i=1}^{I} a_i y_i\right) = RX + \sum_{i=1}^{I} a_i y_i = 0, \tag{14}$$

где $RZ = R - \sum_{i=1}^{I}\tilde{z}_i$ и $RZ < 0$.

Отметим, что ограничение (14) в такой постановке задачи единственно и линейно относительно переменной Y.

Метод решения такой задачи известен – это метод множителей Лагранжа (Ланкастер, 1972; Таха, 1985; Саати, 1973; Колмаков, 1988; и др.). Основной особенностью настоящей задачи, как показали результаты исследования (Колмаков, 1988а, 1988б, 1989), являются цели, для достижения которых и производится распределение ресурсов и запись математических критериев, соответствующих этим целям. Чтобы исследовать влияние видов и параметров критериев на результаты решения, воспроизведем основную схему решения задачи и пример доказательства оптимальности решения для одного из критериев. Следуя известной схеме решения (Ланкастер, 1972), введем дополнительный параметр λ и составим функцию Лагранжа $H(\lambda, Y)$:

$$H(\lambda, Y) = L(Y) - \lambda F(Y). \tag{15}$$

Чтобы решить эту задачу, необходимо найти такие $Y_{\text{опт}} = (y_1^*, \ldots, y_I^*)$ и $\lambda_{\text{опт}}^*$, которые удовлетворяли бы условиям ортогональности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H(\lambda, y_i)}{\partial y_i} = 0 \quad \forall i \subset [1, I], \\ \dfrac{\partial H(\lambda, Y)}{\partial \lambda} = -F(Y) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Условия (16) порождают систему из $I + 1$ уравнений, первые I уравнений которой получаются из (15) и имеют одинаковый вид:

$$\frac{\partial H(\lambda, y_i)}{\partial y_i} = \frac{\partial L(y_i)}{\partial y_i} - \lambda\frac{\partial F(y_i)}{\partial y_i} = 0 \quad \forall i, i \subset [1, I]. \tag{17}$$

Из (14) определяем, что:

$$\frac{\partial F(y_i)}{\partial y_i} = a_i \quad \forall i, i \subset [1, I]. \tag{18}$$

И тогда решение системы общего вида (16) сводится к решению системы $I + 1$ уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(y_i)}{\partial y_i} = \lambda a_i \quad \forall i, i \subset [1, I], \\ F(Y) = RZ + \displaystyle\sum_{i=1}^{I} a_i y_i = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Анализ уравнений системы (19) показывает, что решение в аналитическом виде можно получить только в тех случаях, если “удачно” подобрать вид критерия. Так как решение проблемы распределения трансфертов сводится к поиску формализованных методов, которым соответствуют аналитические решения, то возникает последовательность обратных задач:

– определить такие классы критериев, которые дают аналитические решения системы (19);

– для этих классов критериев отыскать параметры, которые имеют экономический смысл;

– для классов критериев с аналитическими решениями системы и параметрами, имеющими экономический смысл, исследовать характер распределений.

Заметим, что $H(\lambda, Y)$ не имеет максимума или минимума по λ, так как для оптимального $Y^*_{\text{опт}}$ имеем $H(\lambda, Y^*_{\text{опт}}) = L(Y^*_{\text{опт}})$, и, следовательно, $H(\lambda, Y^*_{\text{опт}})$ не зависит от λ. Этот факт позволяет выбирать такие λ, которые дают решение в аналитическом виде. Решение оптимизационной нелинейной задачи в простейшем аналитическом виде существует только тогда, когда дополнительную переменную λ удается представить в виде сомножителя в правой части соотношения (19). Такая возможность возникает, например, при выполнении условий для $L2(Y, S_{2i}(l))$:

$$\lambda = y_i^m a_i^{-1} S_{2i}(l) \quad \forall y_i, y_i \subset (0, 1). \tag{20}$$

Критерий $L2(Y, S_{2i}(l))$ при $m = -2$ восстанавливается в результате интегрирования из первого выражения системы (19) с учетом замены λ на (20) и приобретает вид:

$$L2(Y, S_{2i}(l)) = \sum_{i=1}^{I} S_{2i}(l) \frac{1-y_i}{y_i}. \tag{21}$$

Экономически смысл критерия $(1-y_i)/y_i$ соответствует отношению обеспеченности d_{2i} к дефициту $\tilde{z}_{2i}$: $(1-y_i)/y_i = d_{2i}/\tilde{z}_{2i} = (a_{ni} - \tilde{z}_{2i})/\tilde{z}_{2i}$.

Система уравнений (19), с учетом критерия (21), имеет аналитические решения. Получаем, что этому критерию соответствуют:

– оптимальные доли неудовлетворенности:

$$y_{i\text{опт}}(R, S_{2i}(l)) = -a_i^{-1} K_{2i}(l)\left(R - \sum_{1}^{I} \tilde{z}_i\right), \tag{22}$$

– оптимальные распределения ресурса:

$$r_{i\text{опт}}(R, S_{2i}(l), y_{i\text{опт}}) = \tilde{z}_i + K_{2i}(l)\left(R - \sum_{1}^{I} \tilde{z}_i\right), \tag{23}$$

где коэффициент $K_{2i}(l)$ для критерия класса $L2(Y, S_{2i}(l))$ определяется следующим образом:

$$K_{2i}(l) = K_{2i}(l) = \frac{(a_i S_{2i}(l))^{0.5}}{\sum_{1}^{I} (a_i S_{2i}(l))^{0.5}}. \tag{24}$$

Значения коэффициента критерия $S_{2i}(l)$ и влияние параметра l на характер распределения исследованы в разд. 4.

3.2. Доказательство характера оптимальности критериев. Условия первого порядка для определения стационарности точек функции Лагранжа связаны с условиями, необходимыми для того, чтобы функция критерия $L(Y)$ имела максимум или минимум в точке $Y^*_{\text{опт}}$. Эти условия определяют критические точки $H(\lambda, Y)$. Однако они и не указывают будет ли критическая точка максимумом или минимумом $L(Y)$. Условия первого порядка необходимы, а в совокупности условия первого и второго порядка необходимы и достаточны, но сами по себе условия второго порядка не являются достаточными условиями оптимальности (Ланкастер, 1972; Таха, 1985).

Условия второго порядка для задач на условный оптимум аналогичны во многих отношениях соответствующим результатам для задач на безусловный оптимум, хотя путь к ним несколько труднее. Условия второго порядка на безусловный экстремум получаются при разложении функции в ряд Тейлора в точке оптимума и изучении условий, при которых в разложении член второго порядка всегда положителен в случае минимума или отрицателен в случае максимума. Соответствующие утверждения, основанные на свойствах квадратичных форм, обычно выражаются в терминах матриц Гессе – матриц из частных производных второго порядка и их главных миноров.

Функции $H(\lambda, Y)$ и $L(Y)$ достигают максимума или минимума при одних и тех же значениях Y. Но исследовать $H(\lambda, Y)$ просто на безусловный оптимум и использовать обычные методы нельзя по двум причинам. Во-первых, как было отмечено выше, функция $H(\lambda, Y)$ не имеет максимума или минимума по λ, так как для оптимального $Y^*_{\text{опт}}$ имеем $H(\lambda, Y^*_{\text{опт}}) = L(Y^*_{\text{опт}})$, и, следовательно, $H(\lambda, Y^*_{\text{опт}})$ не зависит от λ. Во-вторых, здесь не все изменения Y допустимы, как в случае задачи на безусловный оптимум. Поэтому следует анализировать условия второго порядка для $H(\lambda^*, Y^*_{\text{опт}})$, рассматривая $H(\lambda, Y)$ только как функцию Y, и предполагать, что Y удовлетворяет заданным ограничениям.

Разложим $H(\lambda, Y)$ в точке (λ^*, Y^*) в ряд Тейлора. Член второго порядка имеет вид:

$$H''_{dy} = \frac{1}{2!}\sum_{j=1}^{I}\sum_{k=1}^{I}\frac{\partial^2 H(\lambda, Y)}{\partial y_j \partial y_k} dy_j dy_k. \tag{25}$$

Точка (λ^*, Y^*) дает минимум (максимум), если $H''_{dy}(\lambda, Y) > 0$ (<0), для всех dy, удовлетворяющих ограничениям. Ограничения, заданные в дифференциальной форме, линейны. Следовательно, надо найти условия, при которых квадратичная форма положительна (отрицательна) для переменных, удовлетворяющих системе линейных ограничений. Такие задачи подробно рассмотрены в работах (Ланкастер, 1972; Таха, 1985; Колмаков, 1988).

Обозначим через $\bar{H}''$ – симметрическую матрицу порядка $I \times I$, элементы которой равны:

$$\left[\frac{\partial^2 H(\lambda^*, Y^*)}{\partial y_j \partial y_k}\right] = \left[\frac{\partial^2 L(Y)}{\partial y_j \partial y_k} - \lambda^* \sum_{j=1}^{I}\frac{\partial^2 F(Y)}{\partial y_j \partial y_k}\right]. \tag{26}$$

Через F' обозначим матрицу порядка $m \times I$, составленную из производных по y функций ограничений $F'(y) = \partial F(y_j)/\partial y_j$. В нашем случае $m = 1$ и тогда $F'(y)$ – матрица-строка.

Построим окаймленную матрицу $\bar{H}$:

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & F' \\ F'^T & \bar{H}'' \end{pmatrix}, \tag{27}$$

где F'^T – транспонированная матрица; F' – матрица порядка $I \times m$ ($I \times 1$); $\mathbf{0}$ – нулевая матрица имеет порядок $m \times m$ (в нашем случае 1×1). Тогда условия второго порядка принимают вид:

$$dy^t H'' dy > 0 \quad \text{при} \quad F'dy = 0 \text{ (минимум)}; \tag{28}$$

$$dy^t H'' dy < 0 \quad \text{при} \quad F'dy = 0 \text{ (максимум)}. \tag{29}$$

Полученные результаты применим для исследования уравнений (17).

Матрица $\bar{H}$ содержит множители Лагранжа, которые могут быть исключены при использовании условий первого порядка. Тогда $\bar{H}$ будет зависеть только от первых и вторых частных производных целевой функции и функций ограничений. Условия второго порядка полностью определяются свойствами целевой функции и функций ограничений.

Если задача содержит одно ограничение и функция ограничений линейна, то структура матрицы $\bar{H}$ и исключение λ значительно упрощаются. В нашем случае имеется только одно ограничение (14) и функция ограничений $F(Y)$ линейная. Тогда $F'_j = a_j$ и $F''_j = 0$. Из условий первого порядка (14) имеем $L'_j = \lambda F'_j$, и можно заменить F_j на $\lambda^{-1}L_j$. Из условий второго порядка (26) получим $\overline{H}'' = \overline{L}''$.

Целевая функция $L(Y)$ при $S_{2i}(l) = a_i^{-1}$ примет вид:

$$L(Y) = \left(\sum_{i=1}^{I}\frac{1}{a_i y_i} - \sum_{i=1}^{I}\frac{1}{a_i}\right). \tag{30}$$

Матрицы $\overline{H}$ и $\overline{L}$ можно записать:

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \lambda^{-1}\overline{L}'_j \\ \lambda^{-1}\overline{L}'^T_j & \overline{H}'' \end{pmatrix}; \quad \overline{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \overline{L}'_j \\ \overline{L}'^T_j & \overline{H}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \overline{L}'_j \\ \overline{L}'^T_j & \overline{L}'' \end{pmatrix}.$$

Матрица $\overline{H}$ отличается от матрицы $\overline{L}$ – окаймленной матрицы Гессе функции L – только множителем λ^{-1} первой строки и первого столбца. Из свойств определителя следует, что $\det\overline{H} = (\lambda^{-1})^2\det\overline{L}$. Такое соотношение справедливо и для соответствующих главных миноров матриц $\overline{H}$ и $\overline{L}$. Следовательно, знаки определителей и главных миноров матриц $\overline{H}$ и $\overline{L}$ одинаковы. Поэтому условия второго порядка выражаются в терминах знаков матрицы $\overline{L}$. Найдем эти знаки. Для этого предварительно вычислим L'_j и L''_j:

$$L'_j = -\frac{1}{a_j y_j^2}\ \forall j, j \subset [1, I]; \quad \begin{cases} L''_{jk} = \dfrac{2}{a_j y_j^3}, & j = 1, \ldots, I; \quad k = j; \\ L''_{jk} = 0, & k \neq j. \end{cases}$$

С учетом этих предварительных вычислений матрица $\overline{L}$ принимает вид:

$$\overline{L} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{a_1 y_1^2} & \ldots & -\dfrac{1}{a_1 y_1^2} \\ -\dfrac{1}{a_1 y_1^2} & \dfrac{2}{a_1 y_1^3} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\dfrac{1}{a_1 y_1^2} & 0 & \ldots & \dfrac{2}{a_1 y_1^3} \end{pmatrix}.$$

Для вычисления определителя матрицы $\overline{L}$ и главных ее миноров преобразуем матрицу к виду:

$$\overline{L} = 2^{I-1}\prod_{i=1}^{I}\frac{1}{a_i y_i^3}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \overline{y_a} \\ \bar{y} & \mathbf{E} \end{pmatrix} = 2^{I-1}\prod_{i=1}^{I}\frac{1}{a_i y_i^3}\overline{\overline{L}}, \tag{31}$$

где $\overline{y_a}$ – строка элементов $a_i^{-1}y_i^{-2}$ размерностью $1 \times I$; $\bar{y}$ – столбец элементов y_i размерностью $I \times 1$; $\mathbf{E}$ – единичная матрица $(I \times I)$.

При $a_i > 0$ и $y_i > 0$ множитель $\prod_{i=1}^{I}\dfrac{1}{a_i y_i^3} > 0$ и, следовательно, $\mathrm{Sign}(\det\overline{L}) = \mathrm{Sign}(\det\overline{\overline{L}})$.

Определитель матрицы $\overline{\overline{L}}$ легко вычислить:

$$\det\overline{\overline{L}} = (-1)^3 y_1 M_{y1} + \ldots + (-1)^{n+2} y_n M_{yn}, \tag{32}$$

где $M_{yi} = (1-)^{j+1}\dfrac{1}{a_j y_j^2}\mathbf{E} = \dfrac{(-1)^{j+1}}{a_j y_j^2}$, т.е. все главные миноры имеют чередующиеся знаки и

$$\det\bar{\bar{L}} = -\sum_{i=1}^{I}\frac{1}{a_i y_i}. \tag{33}$$

Правило уточнения оптимальности нелинейной задачи Лагранжа для случая, в котором только одно ограничение и при этом функция ограничений линейная, формулируется так: "… в классической задаче на условный оптимум, для того чтобы критическая точка представляла локальный максимум (минимум), достаточно, чтобы члены последовательности, состоящей из определения окаймленной матрицы Гессе, нелинейной функции и его главных миноров, убывающих порядков вплоть до второго, имели чередующиеся знаки (одинаковые знаки)" (Ланкастер, 1972, с. 66).

Таким образом, доказано, что в случае (13)–(15), когда выполняются условия первого (17)–(19) и второго порядков (29)–(33) для целевой функции $L(Y)$ (30), то в критической точке достигается максимум:

$$L(Y) = \max_{\{y_i\}}\sum_{a_i}^{1}\left(\frac{1-y_i}{y_i}\right). \tag{34}$$

3.3. Решение общего вида для критериев первого класса. Для критериев первого класса оптимизационная задача в терминах вектора переменной $Q(q_1, \ldots, q_I)$ решается аналогичным образом. Воспроизведем решение общего вида, выраженное в терминах переменной q_i, для чего перепишем основное уравнение дефицита региона (5):

$$r_i(q_i) = \tilde{z}_i - a_i(1 - q_i^{-1}), \tag{35}$$

что в свою очередь дает возможность представить ограничение оптимизационной задачи в терминах вектора переменной $Q(q_1, \ldots, q_I)$:

$$F(Q) = \sum_{i=1}^{I} z_i(q_i) = R - \left(\sum_{i=1}^{I}\tilde{z}_i - \sum_{i=1}^{I} a_i(1 - q_i^{-1})\right) = RZ + \sum_{i=1}^{I} a_i(1 - q_j^{-1}) = 0. \tag{36}$$

Формальная постановка задачи сводится к следующему: найти оптимум (минимум или максимум) целевой функции $L(Q)$:

$$L(Q) = L(q_1, \ldots, q_I) = L1(q, S_{1i}(l)) \tag{37}$$

при ограничении (36).

Далее, следуя общей методике, вводится дополнительный параметр λ и составляется функция Лагранжа $H(\lambda, Q)$:

$$H(\lambda, Q) = L(Q) - \lambda F(Q). \tag{38}$$

Как и в случае поиска решений для критериев второго класса, анализ уравнений системы показывает, что решение оптимизационной нелинейной задачи в простейшем аналитическом виде существует только тогда, когда дополнительную переменную λ удается представить в виде сомножителя в правой части соотношения при выполнении условий для $L1(Q, S_{1i}(l))$:

$$\lambda = q_i^n a_i^{-1} S_{1i}(l) \quad \forall q_i, q_i \subset (1, \propto). \tag{39}$$

Критерий $L1(Q, S_{1i}(l))$ при $n = 2$ восстанавливается в результате интегрирования с учетом замены λ на (39) и приобретает вид:

$$L1(Q, S_{1i}(l)) = \sum_{1}^{I} S_{1i}(l)(q_i - 1). \tag{40}$$

Экономически смысл выражения $(q_i - 1) = y_i/(1 - y_i)$ соответствует отношению дефицита $\tilde{z}_{2i}$ и обеспеченности d_{2i}: $y_i/(1 - y_i) = \tilde{z}_{2i}/d_{2i} = \tilde{z}_{2i}/(a_{ni} - \tilde{z}_{2i})$. Этому критерию соответствуют оптимальные значения $q^{-1}_{i\text{опт}}(R, S_{1i}(l))$:

$$q^{-1}_{i\text{опт}}(R, S_{1i}(l)) = K_{1i}(l)RZA/a_i \tag{41}$$

и оптимальные распределения ресурса $r_{i\text{опт}}(R, S_{1i}(l), q_{i\text{опт}})$:

$$r_{i\text{опт}}(R, S_{1i}(l), q_{i\text{опт}}) = \tilde{z}_i - a_i + K_{1i}(l)RZA = \tilde{z}_i + K_{1i}(l)RZ + K_{1i}(l)\sum_1^I a_i - a_i, \tag{42}$$

где коэффициент $K_{1i}(l)$ для критерия класса $L1(Q, S_{1i}(l))$ определяется следующим образом:

$$K_{1i}(l) = \frac{(a_i S_{1i}(l))^{0.5}}{\sum\limits_{i=1}^{I}(a_i S_{1i}(l))^{0.5}}. \tag{43}$$

Характер оптимальности критериев первого класса уточняется теми же методическими приемами, что и для критериев второго класса.

Анализируя результаты решения оптимизационных задач для двух классов критериев (19) и (38), можно записать решение в общем виде:

$$r_{i\text{опт}}(R, S_i(l)) = \tilde{z}_i + K_i(l)RZ + \chi\left(K_i(l)\sum_{i=1}^{I} a_i - a_i\right), \tag{44}$$

где $\chi = 1$ для критерия первого класса $L1(q, S_{1j}(l))$ и $\chi = 0$ для критерия второго класса $L2(y, S_{2j}(l))$.

Обобщенный оператор решения нелинейной оптимизационной задачи (44) устанавливает однозначную зависимость между коэффициентами критерия $S_i(l)$ и коэффициентами распределения $K_i(l)$:

$$K_i(l) = (a_i S_i(l))^{0.5} / \sum_{i=1}^{I}(a_i S_i(l))^{0.5}. \tag{45}$$

В предлагаемых методах решения оказалось возможным, задавая параметры критериев, синтезировать распределения с заранее заданными свойствами.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ КРИТЕРИЕВ НА ХАРАКТЕР РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

4.1. Структуры и параметры критериев. Особое место среди экспертных прогнозных показателей занимают критерии, для которых удается отыскать аналитические решения задачи Лагранжа. Критерии различаются по классам и типам. Для критериев каждого класса и типа существует набор параметров. Поэтому оказалось целесообразным произвести минимальную классификацию критериев, исследовать поведение распределений ресурсов для некоторых из них и выбрать практически значимые параметры критериев. В ходе исследований при выборе λ выполнялись два предположения для вектора Q и вектора Y, соответственно.

Если при отыскании вектора Q предположить выполнение условия (39), то удается получить аналитические решения задачи Лагранжа. Подставляя λ из (39) в уравнение для производной общего члена суммы критериев $L1(n, q_i, l)$, восстановим виды общего члена суммы критериев $L1(n, q_i, l)$ для параметров n:

$$n = 0: \frac{\partial L1(q_i)}{\partial q_i} = q_i^{-2} S_{1i}(l) L1(0, q_i, l) = S_{1i}(l)\int_1^{q_i} q^{-2}dq = S_{1i}(l)(1 - q_i^{-1}); \tag{46}$$

$$n = 1: \frac{\partial L1(q_i)}{\partial q_i} = q_i^{-1} S_{1i}(l) L1(1, q_i, l) = S_{1i}(l) \ln q_i; \tag{47}$$

$$n = 2: \frac{\partial L1(q_i)}{\partial q_i} = q_i^{0} S_{1i}(l) L1(2, q_i, l) = S_{1i}(l)(q_i - 1). \tag{48}$$

Можно отыскивать вид общего члена суммы критериев $L1(n, q_i, l)$ и для других n, но для анализа тенденций поведения решения данных этого ряда уже достаточно, а практическая ценность решений при других n менее значима.

Точно также оказалось возможным найти аналитические решения для вектора Y (решения второго класса). Если при отыскании вектора Y предположить выполнение условия (20), то, по аналогии с решениями первого класса, находим спектр критериев (а затем и решений) второго класса. Подставляя λ из (20) в уравнение для производной общего члена суммы критериев $L2(m, y_i, l)$ – первое уравнение системы (19), воспроизведем виды общего члена суммы критериев $L2(m, y_i, l)$ для параметров m:

$$m = 0: \frac{\partial L2(y_i)}{\partial y_i} = y_i^{0} S_{2i}(l) L2(0, y_i, l) = S_{2i}(l) \int_{y_i}^{1} dy = S_{2i}(l)(1 - y_i) = S_{2i}(l) q_i^{-1}; \tag{49}$$

$$m = -1: \frac{\partial L2(y_i)}{\partial y_i} = y_i^{-1} S_{2i}(l) L2(1, y_i, l) = -S_{2i}(l) \ln y_i = -S_{2i}(l) \ln(1 - q_i^{-1}); \tag{50}$$

$$m = -2: \frac{\partial L2(y_i)}{\partial y_i} = y_i^{-2} S_{2i}(l) L2(2, y_i, l) = -S_{2i}(l)(1 - y_i^{-1}) = S_{2i}(l) \ln(1 - q_i^{-1}). \tag{51}$$

Можно отыскивать вид общего члена суммы критериев $L2(m, q_i, l)$ и для других m, но для анализа тенденций поведения решения данных этого ряда уже достаточно.

Сравнивая критерии первого и второго класса, замечаем, что при $n = m = 0$ оптимальных решений для них не существует.

В качестве обобщенного показателя каждого критерия, характеризующего один из аспектов качества прогноза, как правило, выбирают либо среднее арифметическое, либо среднее геометрическое значение оптимизируемого показателя. Для моделей нелинейной оптимизации существуют типовые приемы перехода от среднего геометрического значения к его логарифму и, следовательно, к среднему арифметическому значению логарифма показателя. Для среднеарифметического значения логарифма показателя экономический смысл приобретает оценка относительной величины изменения показателя. Экономический смысл среднеарифметического показателя очевиден. Отсюда следует вывод, что критерии арифметического типа (А) сохраняют размерность оцениваемых величин, а критерии геометрического типа (Г) определяют решения для относительных оценок исследуемых величин. Сравнительные характеристики критериев приведены в табл. 1.

На практике рекомендуется применять распределения, соответствующие критерию второго класса $L2(m, Y, S_{2j}(l))$ с параметром $m = -2$. Критерии этого класса имеют вид:

$$L2(-2, Y, S_2(l)) = \max_{\{y_i\}} \sum_{i=1}^{I} \frac{1}{a_i} S_{2i}(l)(1 - y_i^{-1}).$$

4.2. Исследование влияния параметра критерия на характер распределения ресурсов. Величины y и q, входящие в определение коэффициентов критерия и параметра, безразмерные. Поэтому любые функции этих величин также безразмерны.

По условиям размерности основного уравнения Лагранжа размерность критерия L, деленного на параметр λ, должна быть такой же, как и размерность ограничения F: $[L/\lambda] = [L]$,

$$[\lambda^{-1}] = [F(Y)]. \tag{52}$$

Условие (52) показывает, как могут варьироваться размерности параметра λ и критерия L. Размерность ограничения $[F]$, как правило, выражается в денежных единицах. Тогда, если коэффициент $S(l)$ входит в качестве сомножителя в уравнение критерия, и в качестве сомножителя – в

Таблица 1*

Классы, типы и параметры критериев

классы критериев		критерии первого класса $S_{1j}(l) = \lambda q_i^{-n} a_i$		вырожденные случаи	критерии второго класса $S_{2j}(l) = \lambda y_i^{-m} a_i$	
Параметр критерия		$n = 2$	$n = 1$	$n = 0$, $m = 0$	$m = -1$	$m = -2$
Типы критериев		L1А	L1Г	L0	L2Г	L2А
Вид общего члена суммы критерия L	$L(\bullet)$	$(q_i - 1)$	$(\ln q_i)$	$(1 - q_i^{-1})$ $1 - y_i$	$\ln y_i$	$1 - y_i^{-1}$
Вид производной функции L	$\frac{\partial L(\bullet)}{\partial \bullet}$	(q_i^0)	(q_i^{-1})	(q_i^{-2}) y_i^0	y_i^{-1}	y_i^{-2}
Чувствительность распределения по ресурсу	$K(l)$	$\frac{(a_i S_{1i}(l))^{0.5}}{\sum_{i=1}^{I} (a_i S_{1i}(l))^{0.5}}$	I^{-1}	–	I^{-1}	$\frac{(a_i S_{2i}(l))^{0.5}}{\sum_{i=1}^{I} (a_i S_{2i}(l))^{0.5}}$
Коэффициент дополнительного члена	χ	1	1	–	0	0

* В скобках приведены формулы в терминах q.

уравнение параметра λ, то размерность коэффициента $S(l)$ может быть произвольной при соблюдении некоторых условий.

Рассмотрим выражение для размерности $[L/\lambda]$:

$$[L/\lambda] = [S][\text{o.e.}]^k[a_i]/[S] = [S][a_i]/[S] = [a_i] = [F].\text{[1]} \tag{53}$$

В таком случае размерность $[L/\lambda]$ в точности равна размерности ограничения $[F]$. Выражение (53) справедливо при соблюдении одного из следующих условий:

$$[L] = [S][a_i] \quad \text{и} \quad [\lambda] = [S]; \tag{54}$$

$$[L] = [S] \quad \text{и} \quad [\lambda] = [S]/[a_i]. \tag{55}$$

Соотношения (53)–(55) отражают наиболее реалистичные ситуации наборов размерностей для переменных величин решаемых задач Лагранжа.

Рассмотрим, как влияет параметр критерия l на характер распределения ресурса. Представим коэффициент критерия $S_i(l)$ в виде функции:

$$S_i(l) = a_i y_i^l = \tilde{z}_i y_i^{l-1} \quad \forall l, l \subset (\propto, \propto).$$

Параметр l придает критерию *смысл оптимизации относительно различных моментов доли неудовлетворенности* y_i. Величина y_i является долей неудовлетворенности, соответствующей параметрам варианта проекта прогноза региона i при условии $R = 0$: $y_i(a_{2ni}, d_{2i}) = \tilde{z}_{2i}/a_{2ni}$. Решая задачу в общем виде для параметра l, получаем, что числитель коэффициента оптимального распределения будет равен $K_i(l) = a_i y_i^{0.5l}$,

– оптимальная доля неудовлетворенности:

$$y_{i\text{опт}}(R, l, y_i) = -\frac{y_i^{0.5l}}{\sum_1^I a_i y_i^{0.5l}} RZ, \tag{56}$$

[1] [о.е.] – относительные единицы или безразмерная величина.

Таблица 2

l	–2	–1	0	1	2
$S_i(l)$	$a_i y_i^{-2}$	$a_i y_i^{-1}$	a_i	$a_i y_i = \tilde{z}_i$	$a_i y_i^2$
$K_i(l)$	$a_i^2 \tilde{z}_i^{-1}$	$a_i^{3/2} \tilde{z}_i^{-0.5}$	a_i	$(a_i \tilde{z}_I)^{0.5}$	$\tilde{z}_i$

– оптимальное распределение ресурса:

$$r_{i\text{опт}}(R, l, y_i) = \tilde{z}_I + \frac{a_i y_i^{0.5l}}{\sum_{i=1}^{I} a_i y_i^{0.5l}} RZ. \tag{57}$$

Присваивая значения l, можно синтезировать множество распределений. Каждое распределение – оптимальное для фиксированного параметра l. Значения коэффициентов критерия $S_i(l)$ и соответствующих коэффициентов оптимального распределения $K_i(l)$ для $l \subset [2–, 2]$ приведены в табл. 2.

Возникают естественные вопросы: как изменяется характер распределения с изменением параметра l? С какой точки зрения оценивать критерий? Какой параметр l соответствует социально справедливому распределению? Для ответа на поставленные вопросы исследован характер распределения в диапазоне с $l = [–2, 2]$:

$$l = -2\colon r_{i\text{опт}}(R, -2) = \tilde{z}_i + \frac{a_i^2 \tilde{z}_i^{-1}}{\sum_{i=1}^{I} a_i^2 \tilde{z}_i^{-1}} RZ; \tag{58}$$

$$l = -1\colon r_{i\text{опт}}(R, -1) = \tilde{z}_i + \frac{a_i^{1.5} \tilde{z}_i^{-0.5}}{\sum_{i=1}^{I} a_i^{1.5} \tilde{z}_i^{-0.5}} RZ; \tag{59}$$

$$l = 0\colon r_{i\text{опт}}(R, 0) = \tilde{z}_i + \frac{a_i}{\sum_{1}^{I} a_i} RZ; \tag{60}$$

$$l = 1\colon r_{i\text{опт}}(R, 1) = \tilde{z}_i + \frac{(a_i \tilde{z}_i)^{0.5}}{\sum_{1}^{I} (a_i \tilde{z}_i)^{0.5}} RZ; \tag{61}$$

$$l = 2\colon r_{i\text{опт}}(R, 2) = \tilde{z}_i + \frac{\tilde{z}_i}{\sum_{1}^{I} \tilde{z}_i} RZ. \tag{62}$$

Исследование влияния параметра критерия l на характер распределения ресурсов в зависимости от величины этого параметра представлено на рис. 4, 5. Соединим (для наглядности) точки, определяющие доли неудовлетворенности каждого условного региона для выбранного варианта параметров проекта прогноза. Оказывается, что применение критериев с параметрами $l = –2$ и $l = –1$ в распределении ресурсов изменяет тенденции распределения на противоположные. Поэтому такие распределения представляют больше теоретический, чем практический интерес. По критерию с параметром $l = 0$ всем регионам устанавливается ресурс, обеспечивающий рав-

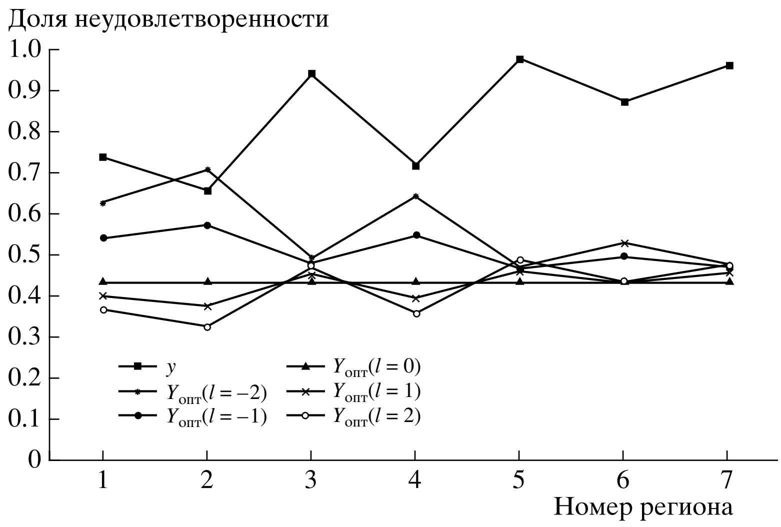

Рис. 4. Исследование влияния параметра критерия на характер распределения.

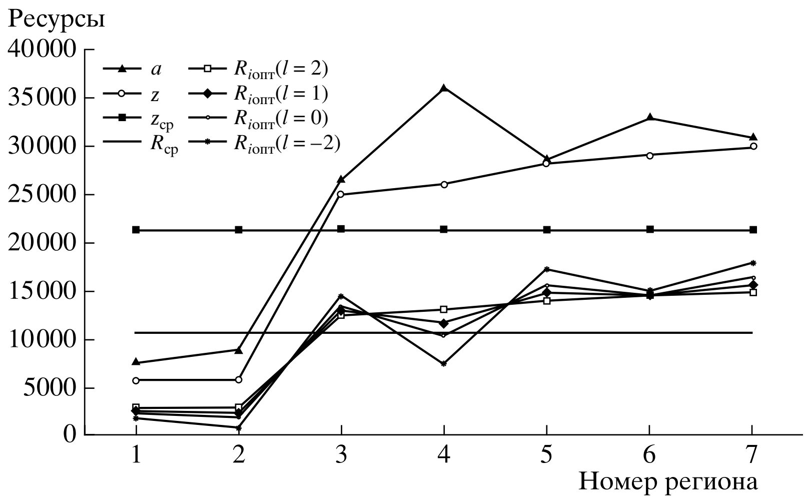

Рис. 5. Варианты оптимальных распределений ресурсов. Вариант для $l = 0$ является доказательно социально справедливым распределением.

ную долю остаточной неудовлетворенности, в точности равную средней доле остаточной неудовлетворенности, а именно $y_{i\text{опт}}(R, 0) = -RZ/\sum_{i=1}^{I} a_i = y_{\text{ср}}(R, 0) = y_{cp}(0, 0) - R/\sum_{i=1}^{I} a_i$.

Это самый главный вывод предлагаемого метода: доказательно справедливым при любом характере потребности a_i и дефицита $\tilde{z}_i$ является распределение с параметром $l = 0$ (см. (60)), устанавливающее всем потребителям равную долю остаточной обеспеченности.

Этот вывод позволяет пойти дальше и получить ответ на не менее важный вопрос: где и в каких пропорциях существует нарушение социальной справедливости? Для этого достаточно распределяемый ресурс положить равным нулю:

$$y_{i\text{опт}}(0, 0) = \sum_{i=1}^{I} \tilde{z}_i / \sum_{i=1}^{I} a_i = y_{\text{ср}}.$$

Получившееся распределение $r_{i\text{опт}}(0, 0) = \tilde{z}_i + y_{\text{ср}}a_i$ дает количественную оценку отклонений от уровня доказательно справедливого распределения.

Распределение по критерию $l = 1$ занимает промежуточное положение между распределениями при $l = 0$ и $l = 2$. Частные случаи оптимальных распределений при $l = 1$ исследованы в работах (Колмаков, 1988, 1989). По-видимому, критерий $l = 1$ должен использоваться в переходном периоде от $l = 2$ к $l = 0$. Хотя на практике раньше применялось распределение с параметром $l = 2$, так как оно обеспечивало долю ресурса, пропорциональную доле дефицита всем потребителям вне зависимости от доли дефицитов по отношению к общей потребности (Планирование, 1982). При распределении ресурсов по критерию $l = 2$ сохраняются сложившиеся диспропорции. Так как $\tilde{z}_i = y_i a_i$, то из уравнения (60) следует, что при $l = 2$ имеем $r_{i\text{опт}}(R, 2) = \tilde{z}_i / \sum_{i=1}^{I} \tilde{z}_i R$ и оно в точности равно экспертно предложенному ранее распределению (Планирование, 1982). Отдавая должное интуиции экспертов, предложивших это распределение, попытаемся понять, в каких случаях его можно считать справедливым.

Во-первых, когда отсутствует обеспеченность, т.е. $d_i = 0$. Тогда $\tilde{z}_i = a_i$, $y_i^0 = y_i = y_i^2 = 1$ и распределение при $l = 2$ вырождается в распределение при $l = 0$, так как $\tilde{z}_i / \sum_{i=1}^{I} \tilde{z}_i = a_i / \sum_{i=1}^{I} a_i$. Во-вторых, если возможны такие случаи поведения $\tilde{z}_i$ и a_i, что $\tilde{z}_i / \sum_{i=1}^{I} \tilde{z}_i = a_i / \sum_{i=1}^{I} a_i$ при $d_i \neq 0$. Например, в случаях, если все $\tilde{z}_i$ можно представить как $\tilde{z}_i = ca_i$, т.е. если дефицит всех регионов в точности пропорционален потребности. Во всех других случаях, когда характер распределения хотя бы в одной точке отличается от линейного, распределение с параметром $l = 2$ справедливым считать нельзя. К концу отчетного периода равную долю ресурса получат потребители с равной величиной дефицита, хотя доли этих дефицитов по отношению к общей потребности могут значительно различаться. Как это ни покажется парадоксальным, но, по-видимому, одним из решающих факторов практического применения этого несправедливого распределения оказалось условие, что всегда происходит положительное назначение ресурса, если все $\tilde{z}_i > 0$.

Другой фактор, незаслуженно оправдывавший практику распределения по этому критерию, состоял в том, что не возникала потребность в дополнительных ресурсах, необходимых для устранения диспропорций. Хотя именно стартовое и сохраняющееся неравенство должны были стать индикаторами несправедливости такого распределения.

Выполненные расчеты позволили установить, что, например, если хотя бы в одном из 7 регионов РФ нарушается условие синхронного возрастания $\tilde{z}_i$ и a_i, то путем голосования коллегиально можно утвердить распределение по $l = 2$, хотя более справедливым следует считать распределение с $l = 1$ и уж доказательно справедливым распределение с $l = 0$. Может быть, в этом одна из причин столь продолжительного и сложного процесса устранения разногласий между регионами и Минфином.

Для устранения сложившихся диспропорций при переходе к доказательно справедливому распределению могут потребоваться дополнительные ресурсы. Возникает принципиально новая задача: определить минимальный размер дополнительных ресурсов для того, чтобы установить равную долю удовлетворенности всем потребителям, т.е. восстановить социальную справедливость. Решается эта задача следующим образом. Выполняется предварительный расчет с любой величиной ресурса R. Из всех $r_{i\text{опт}}$ выбирается наименьшее:

$$r_{i\text{опт}}(R, l)_{\min} = \min(r_{i\text{опт}}(R, l))$$

и для него фиксируется i. Для этого $i = im$ находится минимальный ресурс R_m из решения уравнения $\tilde{z}_{im} + K_{im}(l)(R_m - \sum_{i=1}^{I} \tilde{z}_i) = 0$, т.е. $R_m = -\sum_{i=1}^{I} \tilde{z}_i + \tilde{z}_{im}/K_{im}(l)$. Или для $S_{im}(l) = a_{im} y_{im}^l R_m = -(\sum_{i=1}^{I} \tilde{z}_i - y_{i\,im}^{1-l/2} \sum_{i=1}^{I} a_i y_i^{l/2})$.

Так как для каждого варианта проекта прогноза величины сумм a_i и $\tilde{z}_i$ постоянны, то минимальная величина требуемого дополнительного ресурса определяется регионом с наименьшей долей неудовлетворенности, что полностью согласуется с экспертными представлениями. Тогда получаем для параметров критерия:

$$l = 0:\ R_m = -\left(\sum_{i=1}^{I}\tilde{z}_i - y_{im}\sum_{i=1}^{I}a_i\right);$$

$$l = 1:\ R_m = -\left(\sum_{i=1}^{I}\tilde{z}_i - y_{im}^{1/2}\sum_{i=1}^{I}a_i y_i^{0.5}\right);$$

$$l = 2:\ R_m = -\left(\sum_{i=1}^{I}\tilde{z}_i - y_{im}^{0}\sum_{i=1}^{I}a_i y_i\right) = 0.$$

Из последнего уравнения следует интереснейший вывод: для сохранения сложившихся диспропорций не требуется дополнительных ресурсов. По-видимому, и этот факт оказывался более удобным в практике распределения, чем поиск причин и ресурсов для выравнивания диспропорций.

Расчеты по критерию доказательной справедливости исходя из данных отчетного периода позволяют выявить не только регионы со сравнительно благополучным состоянием, но и регионы с неблагополучным состоянием, т.е. получить количественные характеристики существующих диспропорций. Расчет на основе параметров проекта прогноза выявляет диспропорции, сохраняющиеся в прогнозном периоде.

Производятся варианты расчетов оптимальных распределений ресурсов по регионам России для параметров критерия $l = 0, 1, 2$ и предварительно рассчитанной минимальной величины дополнительного ресурса $R_m = DR$. Для наглядности анализа все регионы упорядочиваются по возрастанию дефицита $z_i(i)$, строятся графики $z_i(i)$, $a_i(i)$ и проводится линия $z_{\text{ср}} = I^{-1}\sum_{i=1}^{I}\tilde{z}_i$.

Такой простейший прием позволяет разделить все регионы на две группы, дефицит у которых либо выше среднего уровня, либо ниже. Для заданного R на этом же графике проводится линия $R_{\text{ср}} = I^{-1}R$, соответствующая той величине ресурса, которая могла бы достаться каждому региону при равномерном распределении ресурса. Затем на этом же графике строятся варианты оптимальных распределений для различных параметров l критерия с тем, чтобы можно было (если необходимо) внести любые экспертные поправки, но сохранить выделяемый ресурс в “допустимом диапазоне распределения”.

Проведенные исследования позволяют предположить, что если доказательно справедливое распределение сделать гласным, открытым для всех его участников, то такой подход должен ускорить процесс согласований, повысить качество распределения и снизить остроту дискуссий по распределениям трансфертов (Максимова, 2000, с. 12–14; Делягин, 2000, с. 42–44), перенеся ее в сферу выбора критериев распределения. При появлении доказательных методов распределения экспертные методы теряют смысл.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Делягин М. (2000): Жестокая любовь Минфина // *Эксперт*. № 22.

Колмаков И.Б. (1988а): Модели оптимального распределения капитальных вложений на развитие сети учреждений сферы обслуживания (на примере здравоохранения). В сб.: “*Вопросы создания АСПР. Проблемы совершенствования планирования производства и реализации товаров народного потребления и платных услуг*”. М.: Госплан СССР, ГВЦ Госплана СССР. № 86.

Колмаков И.Б. (1988б): Модели оптимального распределения ресурсов на строительство общеобразовательных школ. В кн.: “*Интеграция автоматизированных систем управления*”. М.: Госплан РСФСР, ЦЭНИИ, НИИАСУ при Госплане РСФСР.

Колмаков И.Б. (1989): Модели анализа состояния и развития материальной базы отраслей социально-культурной сферы. В сб. научных трудов: “*Вопросы создания АСПР. Автоматизированный комплекс планирования социального развития*”. М.: Госплан СССР, ГВЦ Госплана СССР. Вып. 92.

Колмаков И.Б., Карманов О.А. (1990): Планирование развития материальной базы отраслей социально-культурных услуг (на примере детских дошкольных учреждений в РСФСР) // *Вестник Московского университета. Серия экономика*. № 3.

Ланкастер М. (1972): Математическая экономика. М.: Сов. радио.

Максимова Н. (2000): Никакого произвола. Реформа межбюджетных отношений глазами Минфина // *Эксперт*. № 32.

Планирование (1982): Планирование экономического и социального развития в РСФСР. М.: Сов. Россия.

Саати Т. (1973): Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы. М.: Мир.

Таха Х. (1985): Введение в исследование операций. Кн. 2. М.: Мир.

Поступила в редакцию
28.11.2005 г.

Methods of the Optimal Distribution of the Transfers

I. B. Kolmakov

New methods applied for solving the optimization problem to transfers distribution proposed. These methods are worked out to get analytical solution for two sets of criteria. Different approaches to estimate the region budget conditions are equipped with graphic illustrations. For illustrative purposes, the character of optimum decision is proved for one of the criteria. New system of criteria synthesis is described for the given criteria of distribution. The new methods for estimating the optimum distribution for optimized vector of residual demand based on various criteria, including social fair resources distribution are presented as well.