ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2007, том 43, № 3, с. 121–126

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

ОБЩИЙ ВИД КРИТЕРИАЛЬНОГО ФУНКЦИОНАЛА В БЕЛЛМАНОВСКИХ МОДЕЛЯХ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ*

© 2007 г. В. З. Беленький

(Москва)

Приводится выражение, описывающее общий вид критериального функционала для класса динамических, однородных во времени рекурсивных моделей, названных *беллмановскими*. Из него следует, что при построении моделей развития экономики для этого класса нет других критериев, кроме терминального критерия, интегрального дисконтного критерия и максиминного критерия Роулса.

При построении оптимизационных моделей экономической динамики (ЭД) одной из ключевых проблем является выбор критерия оптимизации – критериального функционала Cr, – заданного на траекториях рассматриваемой экономической системы. В настоящей статье дается формула общего вида критериального функционала для класса моделей, которые я называю беллмановскими. В основе этой формулы лежит теорема об общем виде агрегирующей функции, определяющей критерий модели. Развернутое доказательство теоремы получено в работе (Беленький, Френкин, 2006), здесь приводится краткое его изложение.

1. БЕЛЛМАНОВСКАЯ МОДЕЛЬ. ТЕОРЕМА ОБ АГРЕГИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

В гомогенных моделях ЭД в дискретном времени с конечным плановым горизонтом T[1] критерий оптимизации траектории ζ можно представить в общем виде

$$Cr(\zeta) = \varphi(u_0, u_2, \ldots, u_{T-1}; \beta^T\Psi(x_T)) \longrightarrow \max_z, \tag{1}$$

где

$$u_t := \beta^t U(x_t, c_t) \quad t = 0, \ldots, T-1, \tag{2}$$

– *приведенные*, с коэффициентом дисконтирования β, *полезности потребления*, выражаемые функцией полезности U, аргументами которой являются фазовая координата $x \in R^n$ и управляемый параметр (вообще говоря, многомерный) $c \in R^n$, интерпретируемый обычно как вектор потребления; $\beta^T\Psi(x_T)$ – значение *терминального функционала* Ψ (также приведенное с коэффициентом β) в концевой точке фазовой траектории; φ – некоторая функция, синтезирующая из перечисленных аргументов итоговый критерий оптимизации; выбор именно этой *агрегирующей функции* определяет содержательный смысл критерия оптимальности. Таким образом, *критериальный паспорт* модели задается четверкой $\{\varphi, U, \beta, \Psi\}$.

Если ввести обозначение $\mathbf{u}^T := (u_0, \ldots, u_{T-1})$, то формально можно считать, что агрегирующая функция имеет два аргумента: векторный аргумент $\mathbf{u}^T$ и скалярный аргумент $\psi(x_T)$. При этом, если строится решение модели в широком смысле, то приходится рассматривать постановку задачи (1) с горизонтом различной длины T (как, например, в методе динамического программирования, DP-метод), поэтому агрегирующая функция φ должна быть определена так, что ее векторный аргумент имеет не фиксированную (T), а *переменную* длину $k = 1, 2, \ldots, (\mathbf{u}^k)$.

Критерий (1) называется беллмановским, если агрегирующая функция φ обладает следующими свойствами.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00775) и Российского гуманитарного научного фонда (проект 06-02-00082).

[1] Модель называется *гомогенной* (однородной во времени), если ее исходная информация – *информационный паспорт* – не зависит от календарного времени; решение такой модели зависит только от длины T планового горизонта, но не от его положения на временной оси.

Свойство φ1 (симметричность). Значение функции φ не меняется при перестановке компонент ее векторного аргумента $\mathbf{u}^k$.

Это свойство выражает принцип равноправия: все поколения, охваченные плановым горизонтом $\{t = 0, \ldots, T - 1)$ и представленные в критерии своими полезностями $U_t := U(x_t, c_t)$, после приведения этих полезностей с помощью дисконтирующего множителя по формуле (2) считаются равноправными (равносильными, эквивалентными и т.п.).

Формализуя свойство φ1, можно считать, что $\mathbf{u}^k$ – это не вектор, а множество из k чисел; таким образом, первый аргумент агрегирующей функции есть некоторое конечное множество чисел $\mathbf{u}$, а второй – скаляр (будем обозначать его v).

Свойство φ2 (рекурсивность). Для любого разбиения множества $\mathbf{u}$ на две непересекающиеся части имеет место равенство

$$\varphi(\mathbf{u}; v) = \varphi(\mathbf{u}_2; \varphi(\mathbf{u}_1; v)) \;\; \forall(\mathbf{u}_1 \cup \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}, \mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 = \varnothing). \tag{3}$$

Это свойство является *характеристическим* для беллмановских моделей. Именно в нем состоит принцип оптимальности Беллмана, согласно которому всякая оптимальная траектория может быть “разрезана” (в произвольной промежуточной точке) на две части, каждая из которых оптимальна на своем участке временной оси.

Полагая в (3) $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}$, $\mathbf{u}_2 := \varnothing$, получаем $\varphi(\mathbf{u}; v) = \varphi(\mathbf{u}; \varphi(\varnothing; v))$; это возможно только в двух случаях: либо $\varphi(\mathbf{u}, v)$ не зависит от v, либо

$$\varphi(\varnothing; v) = v \;\; \forall v. \tag{4}$$

В первом случае $\varphi(\mathbf{u}, v) = \varphi(\mathbf{u})$, и из (3) следует $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u}_2)\ \forall \mathbf{u} \supseteq \mathbf{u}_2$, откуда вытекает, что функция φ принимает одно и то же значение на любых множествах, т.е. $\varphi(\mathbf{u}) \equiv \mathrm{const}$; таким образом, этот вырожденный случай бессодержателен, и полагаем в дальнейшем, что имеет место формула (4).

Замечание 1. Формула (4) определяет значение агрегирующей функции в случае, когда множество $\mathbf{u}$ пусто, т.е. число его элементов равно нулю ($k = 0$); этому соответствует горизонт планирования $T = 0$. Содержательно такая задача не имеет смысла, но при формальном описании бывает удобно включить в рассмотрение и этот случай (в частности, это удобно при описании рекуррентной процедуры метода динамического программирования, см., например (Беленький, 2001, Лекция 6)).

Для $k \geq 1$ многократное применение формулы (3) показывает, что агрегирующая функция однозначно задается функцией двух скалярных аргументов $\Phi(u, v)$ – *производящей функцией*. Для одноэлементного ($k = 1$) множества $\mathbf{u} = \{u\}$ надо положить $\varphi(\mathbf{u}; v) := \Phi(u, v)$, а затем при $k \geq 1$ воспользоваться рекуррентной формулой

$$\varphi(\mathbf{u}^{k+1}; v) = \Phi(\mathbf{u}_k, \varphi(\mathbf{u}_k; v)), \quad \mathbf{u}_{k+1} = (u_0, \ldots, u_k), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Для того чтобы при этом выполнялось свойство симметрии, необходимо, чтобы производящая функция удовлетворяла соотношению

$$\Phi(u_1, \Phi(u_0, v)) = \Phi(u_0, \Phi(u_1, v)) \quad \forall(u_0, u_1, v); \tag{6}$$

но согласно (Беленький, Френкин, 2006), оказывается, что это условие является и достаточным.

Лемма 1. *При выполнении соотношения* (6) *агрегирующая функция* φ, *рекуррентно определяемая формулой* (5), *обладает* (*при любом фиксированном* $k \geq 2$) *свойством симметрии* φ1.

Итак, свойства φ1, φ2 эквивалентны соотношениям (4), (6). Помимо этого, в моделях ЭД экономическое содержание критерия (1) требует, чтобы производящая функция была “допустима”.

Определение. Функция $\Phi(x)$ называется *допустимой*, если областью ее определения является двумерный положительный ортант $x = (u, \ v)^2 \in R_+^2$ и выполняются условия:

1) $\Phi(x)$ монотонно возрастает[2] по $x \in R_+^2$ в смысле естественного (покоординатного) частичного порядка в R_+^2, причем $\Phi(0) = 0$, так что $\Phi(x) \geq 0\ \forall x \in R_+^2$;

2) функция Φ положительно однородна (первой степени):

$$\Phi(\lambda x) = \lambda\Phi(x) \;\; \forall(x \in R_+^2, \lambda \geq 0). \tag{7}$$

[2] Здесь и дальше монотонность (возрастание или убывание) функций понимается в нестрогом смысле (как неубывание и невозрастание).

Класс допустимых функций обозначается W.

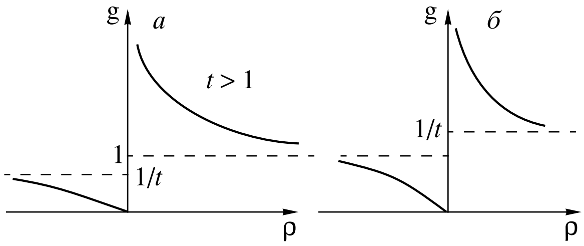
Положительно-однородную функцию можно представить в виде

$$\Phi(u, v) = vg(v/u) \quad g(t) := \Phi(1/t, 1) \quad t \geq 0; \quad (8)$$

при этом для $\Phi \in W$ функция $g(t)$ убывает, а функция

$$f(t) := tg(t) = \Phi(1, t), \quad t > 0, \quad (9)$$

возрастает по t.



Зависимость функции q от параметра p.

Если ввести переменные $y := v/u_0$, $z := v/u_1$, то соотношение (6) можно записать к виду

$$g(y)g(zg(y)) = g(z)g(yg(z)) \; \forall y, z > 0. \quad (10)$$

Итак, производящая функция, определяющая критериальный функционал беллмановской модели, должна удовлетворять функциональному уравнению (10) при указанных условиях монотонности.

Тривиальным решением уравнения (10) является функция $g(t) = \beta = \text{const}$; ей отвечает $\Phi(u, v) = \beta v$. Этой производящей функции отвечает, в соответствии с рекуррентной формулой (5), агрегирующая функция $\varphi(\mathbf{u}, v) = \beta^k v$, где k – число элементов множества $\mathbf{u}$ (отметим, что при $k = 0$ выполняется условие (4)); в этом случае (1) представляет собой *терминальный критерий*

$$Cr(\zeta) = \beta^T \Psi(x_T) \longrightarrow \max, \quad (11)$$

характерный для моделей, замкнутых по потреблению (см. (Никайдо, 1972, § 14; Беленький, Арушанян, 1993)). Ниже будем искать нетривиальные решения.

Обозначим множество нетривиальных решений функционального уравнения (10) через $\mathcal{G}$; более точно, $\mathcal{G}$ – это класс непрерывных функций $g(t)$ (по умолчанию – нетривиальных), определенных на полуоси $t > 0$ и удовлетворяющих условиям:

1) $g(t)$ строго положительна и убывает по t;

2) функция $f(t) := tg(t)$ возрастает по t;

3) выполняется соотношение (10).

Теорема 1 (Беленький, Френкин, 2006). *Класс $\mathcal{G}$ исчерпывается двупараметрическим семейством функций вида*

$$g(t) = [1 + (a/t)^\rho]^{1/\rho}, \quad t > 0, \quad (12)$$

с параметрами $a \geq 0$, $\rho \neq 0$.

Краткое доказательство теоремы дано в Приложении.

2. ОБЩИЙ ВИД КРИТЕРИАЛЬНОГО ФУНКЦИОНАЛА

Общий вид критериального функционала (1) беллмановской модели непосредственно вытекает из теоремы 1. Но прежде чем формулировать этот результат, отметим некоторые свойства соответствующих производящих функций.

2.1. Свойства CES-функций. Функции (12) отвечает производящая функция

$$\Phi(u, v) = [(au)^\rho + v^\rho]^{1/\rho}, \quad (u, v) \in R_+^2, \quad a \geq 0, \quad \rho \neq 0, \quad (13)$$

относящаяся к классу так называемых CES-функций, т.е. функций с постоянной эластичностью замещения (Constant Elasticity Substitution) (см. (Клейнер, 1986)). Выбором масштабных единиц факторов можно привести параметр a к единичному значению, и тогда соответствующая функция

$$g_\rho(t) = [1 + (1/t)^\rho]^{1/\rho}, \quad t > 0, \quad (14)$$

содержит единственный существенный параметр ρ.

На рисунке схематически показана зависимость функции (14) от параметра ρ при некотором фиксированном значении аргумента t. Отметим следующие свойства этой функции:

1) при $\rho > 0$ $g_\rho(t) > 1 \; \forall t$;

2) при $\rho < 0$ $g_\rho(t) < 1$ $\forall t$;

3) в каждой из областей $\{\rho > 0\}$, $\{\rho < 0\}$ функция $g_\rho(t)$, убывает по параметру ρ, претерпевая разрыв в точке $\rho = 0$.

Примечание. Если в двухфакторной положительно однородной CES-функции общего вида

$$F_\rho(u, v) = (\alpha u^\rho + \beta v^\rho)^{1/\rho}, \quad u, v > 0,$$

параметры $\alpha, \beta > 0$ удовлетворяют условию $\alpha + \beta = 1$, то разрыва функции

$$g_\rho(t) := F_\rho(1/t, 1) = (\beta + \alpha t^{-\rho})^{1/\rho} \tag{15}$$

в точке $\rho = 0$ нет, а существует предел

$$g_0(t) := \lim_{\rho \to 0} g_\rho(t) = t^{-\alpha}, \quad t > 0.$$

Однако функция (15) не принадлежит семейству (12), так как $\beta \neq 1$ ($\beta < 1$), и поэтому (функция Кобба–Дугласа) не может служить производящей функцией беллмановской модели.

Кроме указанных свойств следует отметить, что существуют фланговые (при $|\rho| \longrightarrow \infty$) пределы (они показаны на рисунке); этим пределам отвечают производящие функции

$$\Phi(u, v) = \min_{\rho \to -\infty} (u, v), \quad \Phi(u, v) = \max_{\rho \to +\infty} (u, v). \tag{16}$$

2.2. Общий вид критерия оптимальности. В соответствии с рекуррентной формулой (5), агрегирующая функция, отвечающая производящей функции (13), имеет вид

$$\varphi(\mathbf{u}^k, v) = \left[\sum_{t=0}^{k-1} (\alpha u_t)^\rho + v^\rho\right]^{1/\rho}, \tag{17}$$

и согласно (1), (2)

$$Cr(\zeta) = \left\{\sum_{t=0}^{T-1} (\beta^\rho)^t [\alpha U(x_t, c_t)]^\rho + (\beta^\rho)^T \Psi^\rho(x_T)\right\}^{1/\rho}. \tag{18}$$

В силу теоремы 1, *формула (18) дает общий вид критериального функционала в беллмановских моделях ЭД.*

В реальной практике моделирования критерий вида (18) используется, в основном, при положительных значениях ρ. При таких ρ содержательно допустима монотонная замена переменных, поэтому сделав переобозначения:

$$\beta := \beta^\rho, \quad U := (\alpha U)^\rho, \quad \Psi := \Psi^\rho, \quad Cr' := Cr^\rho,$$

получим из (18) формулу

$$Cr(\zeta) = \sum_{t=0}^{T-1} \beta^t U(x_t, c_t) + \beta^T \Psi(x_T). \tag{19}$$

Это – стандартный дисконтный критерий, именно он наиболее часто используется при построении моделей развития экономики как на макро-, так и на микроуровне. В последние годы все больше внимание привлекает максиминный критерий (критерий Роулса)

$$Cr(\zeta) = \min[\min_{t \in [0, T-1]} \mathbf{u}_t, \beta^T \Psi(x_T)], \tag{20}$$

отвечающий производящей функции (16) при $\rho \longrightarrow -\infty$. Третьим возможным критерием является терминальный критерий (11), получающийся из (18) при вырожденном значении параметра $a = 0$. Таким образом, других критериев, кроме трех названных, в белмановских моделях нет.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Перейдем к логарифмическим координатам, положим $s := \ln t$, $L(s) = \ln g(e^s) \sim g(t) = e^{L(\ln t)}$, $s \in R$, $t > 0$, тогда $f(t) = tg(t) = e^{M(\ln t)}$, $M(s) := L(s) + s$. В этих координатах семейству функций (12) отвечает семейство

$$L(s) = \frac{1}{\rho}\ln(1 + e^{-\rho(s-\tau)}), \quad \rho \neq 0, \quad \tau := \ln a \in R. \tag{21}$$

Введя обозначения $\xi := \ln y$, $\eta := \ln z$ и логарифмируя уравнение (10), получим функциональное уравнение в логарифмах:

$$L(\xi) + L(\eta + L(\xi)) = L(\eta) + L(\xi + L(\eta)), \quad \xi, \eta \in R. \tag{22}$$

Множество его нетривиальных решений – это класс $\mathscr{L}$ непрерывных функций $L(s)$, определенных на всей прямой R и удовлетворяющих условиям:

1) функция $L(s)$ убывает по s;

2) функция $M(s) := L(s) + s$ возрастает по s;

3) выполняется соотношение (22).

Три вспомогательные леммы. Приводимые ниже леммы доказаны в (Беленький, Френкин, 2006).

Лемма 1. *Функция L нигде не обращается в нуль, т.е. либо строго положительна, либо строго отрицательна на всей оси R.*

В силу этой леммы класс $\mathscr{L}$ разбивается на два подкласса $\mathscr{L}^+$ и $\mathscr{L}^-$, в которых функции L положительны и отрицательны, соответственно.

Лемма 2. *Если* $L \in \mathscr{L}$, *то функции*:

$$а)\ L_\rho(s) := L(ps)/p, \quad p \neq 0; \tag{23'}$$

$$б)\ L_c(s) := L(s + c), \quad c \in R, \tag{23''}$$

также принадлежат классу $\mathscr{L}$.

Формулы (23') и (23'') задают группу автоморфизмов на классе $\mathscr{L}$. Среди них надо выделить особо автоморфизм (23') при $p = -1$, которому отвечает инверсия, взаимно преобразующая подклассы $\mathscr{L}^+$, $\mathscr{L}^-$ друг в друга. В каждом из этих подклассов автоморфизмы (23') при $p > 0$ и (23'') – это стандартные преобразования координатных осей: растяжение масштаба и перенос начала отсчета.

Лемма 3. *Если функция L принадлежит подклассу* $\mathscr{L}^+$, *то она выпукла вниз на всей прямой R и монотонно убывает от* $+\infty$ *до* 0.

Ключевая лемма и окончательная формула. Запишем функциональное уравнение (10) в виде

$$[L(\eta + L(\xi)) - L(\eta)]/L(\xi) = L(\xi + L(\eta))/L(\xi) - 1; \tag{24}$$

при фиксированном η, устремляя $\xi \longrightarrow \infty$, имеем (в силу леммы 3) $L(\xi) \longrightarrow 0$; поэтому переходя в (24) к пределу, получаем

$$L'(\eta) = -[1 - A(L(\eta))], \quad A(h) := \lim_{\xi \to \infty}(L(\xi + h)/L(\xi)) \tag{25}$$

(предел в (24) слева существует, так как выпуклая функция дифференцируема почти всюду, поэтому существует и предел справа).

Введенная здесь функция $A(h)$ в принципе может быть определена для всех $h \in R$, но так как $L \in \mathscr{L}^+$, то нас интересуют только положительные значения $h = L(\eta) > 0$; при этих значениях $A(h) \in$ $\in (0,1)$, поскольку функция L убывает.

Лемма 4 (ключевая). *Функция A – это экспонента*

$$A(h) = e^{-\rho h}, \quad h > 0 \tag{26}$$

с некоторым показателем $\rho \geq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольных $x, y > 0$ имеем

$$A(x + y) = \lim_{\xi \to \infty}(L(\xi + x + y)/L(\xi)) = \lim_{\xi \to \infty}(L(\xi + x)/L(\xi))\lim_{\xi \to \infty}(L(\xi + x + y)/L(\xi + x)),$$

каждый из пределов справа существует, и получаем

$$A(x+y) = A(x)A(y) \quad \forall x, y > 0. \tag{27}$$

Это означает, что функция A удовлетворяет простейшему функциональному уравнению (27), известному в общей теории как экспоненциальное уравнение Коши (Ацел, Домбр, 2003, с. 34); самое простое его исследование имеется в (Дынкин, Юшкевич, 1967, с. 226), где показано, что ограниченным при положительных значениях аргументов (и отличным от тождественного нуля) решением является экспонента вида (26). ■

На основании леммы 4, используя аргумент s вместо η, из формулы (25) имеем

$$L'(s) = \frac{dL}{ds} = -(1-\mathrm{e}^{-\rho L}), \quad s \in R.$$

Решая это дифференциальное уравнение с разделяющимися аргументами, находим

$$-\int^{L} \frac{dx}{1-e^{-\rho x}} + \tau = s, \quad \tau = \text{const};$$

неопределенный интеграл в левой части берется явно, тогда получаем

$$-\frac{1}{\rho}\ln(\mathrm{e}^{\rho L}-1) + \tau = s \sim L = L(s) = \frac{1}{\rho}\ln[1+\mathrm{e}^{-\rho(s-\tau)}],$$

что в точности совпадает с (21). Требуемая формула получена, тем самым теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРАЫ

Беленький В.З., Френкин Б.Р. (2006): Решение функционального уравнения для симметричной рекурсивной функции. В сб. “*Анализ и моделирование экономических процессов*”. Вып. № 3. М.: ЦЭМИ РАН.

Беленький В.З. (2001): Оптимальное управление: принцип максимума и динамическое программирование. М.: ЦЭМИ РАН–РЭШ.

Никайдо Х. (1972): Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир.

Беленький В.З., Арушанян И.И. (1993): Модель перехода к новой технологии при нормативном росте потребления // *Экономика и мат. методы.* Т. 29. Вып. 4.

Клейнер Г.Б. (1986): Производственные функции. М.: Фин. и стат.

Ацел Я., Домбр Ж. (2003): Функциональные уравнения с несколькими переменными. М.: Физматлит.

Поступила в редакцию
09.10.2006 г.

General Form of Criterion in Bellmanic Economic Dynamic Models

V. Z. Belenky

Provides the general expression describing a criterion for a class dynamic time homogeneous recursive models (called Bellmanic models). To construct the models of economic development for this class there is no other criterion besides three well known ones: 1) terminal criterion, 2) integral discount criterion, 3) maximin criterion by Rawls.