ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2010, том 46, № 2, с. 78–88

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ПОЛИНОМНЫХ ТРЕНДОВ С САМООПРЕДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПОКАЗАТЕЛЯМИ И КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2010 г. В.А. Антонов

(Екатеринбург)

Изложена суть нового численного метода оптимизации – метода приближений параболической вершины (МППВ), предназначенного для нахождения экстремума заданной функции. На основе данного метода создана методология решения уравнений множественной регрессии случайно распределенных значений экономических и других величин, представленных в виде полиномов степенных, показательных и других функций, в которых показатели степени, основания и коэффициенты не назначаются априори, а самоопределяются расчетом в области рациональных чисел. Предложена классификация трендов и систематизация методических приемов их получения. Приведены практические примеры численных расчетов и построения указанных трендов компьютерной программой для ЭВМ.

Ключевые слова: приближение параболической вершины, множественная регрессия.

1. ВВЕДЕНИЕ

Для решения экономических задач оптимизации, сводящихся к нахождению экстремума некоторой сложной заданной функции, часто применяют приближенные численные методы. Среди них представляет интерес метод аппроксимации заданной функции в области ее экстремума более простой в аналитическом смысле функцией. В статье излагается численный метод нахождения экстремума заданной функции с применением параболической аппроксимирующей функции, имеющей единственный максимум или минимум (условная вершина). Аппроксимация проводится с применением последовательно повторяющихся и сходящихся расчетных процедур. Поэтому методу присвоено название “метод приближений параболической вершины” (МППВ). Метод используется для решения уравнений множественной регрессии, сводящихся к линейному виду относительно оцениваемых коэффициентов. На основе частного приложения МППВ в сфере экономических и других прогнозных задач рассмотрена методология построения серии трендов случайно распределенных значений зависимой величины, представленных в виде полиномов степенных, показательных и других функций, где показатели степени и коэффициенты не назначаются априори, а самоопределяются в ходе расчета трендов.

2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ МППВ

Допустим, что в пространстве аргументов ξ, число которых равно m, задана многомерная функция $U(\xi)$: $U(\xi) \equiv U(\xi_1, \ldots, \xi_m)$, которая однозначно определена в ограниченной области, имеет единственный экстремум, обладает свойствами гладкости и непрерывности. Задача состоит в отыскании совокупности значений аргументов, соответствующих экстремуму. Согласно МППВ искомая совокупность аргументов находится путем последовательных приближений экстремальной области (вершины) также гладкой и непрерывной аппроксимирующей функции к области экстремума заданной функции.

Суть МППВ состоит в следующем. В каждом последовательном k-приближении экстремальную область заданной функции $U(\xi)$ аппроксимируют m-мерной параболической функцией $P_k(\xi)$ вида

$$P_k = C_k + \sum_{j=1}^{m}(C_{j1k}\xi_j + C_{j2k}\xi_j^2),$$

где C_k, C_{j1k}, C_{j2k} – коэффициенты. Аппроксимацию проводят по t опорным точкам ($t = 2m + 1$), принадлежащим заданной функции, для которых при поиске максимума или минимума функции выполняются соответствующие неравенства коэффициентов $C_{j2k} < 0$ или $C_{j2k} > 0$. Далее, определяя по формуле $\xi_{1Bk} = -C_{j1k}/2C_{j2k}$ совокупность аргументов $\xi_{1Bk}, \ldots, \xi_{mBk}$, соответствующих вершине параболической функции, и значения функции $U(\xi_{Bk})$, получают новую опорную точку. В $(k + 1)$-приближении заменяют одну из опорных точек с наименьшим значением U в случае поиска максимума заданной функции или с наибольшим значением U в случае поиска ее минимума на новую опорную точку. После замены опорной точки проверяют выполнение отмеченных неравенств коэффициентов параболической функции. В случае невыполнения $C_{j2k} < 0$ или $C_{j2k} > 0$ опорные точки с наименьшим значением функции U перемещают в направлении ее увеличения или, соответственно, с наибольшим значением функции U перемещают в направлении ее уменьшения до восстановления требуемых неравенств.

Рассчитываемое экстремальное значение параболической функции при условиях $C_{j2k} < 0$ всегда будет не меньше наибольшего значения (а при условиях $C_{j2k} > 0$ не больше наименьшего значения) функции U в опорных точках. Поскольку в каждой итерации “крайняя” опорная точка с наименьшим значением функции U (при поиске $U_{\max}$) или с наибольшим значением функции U (при поиске $U_{\min}$) заменяется расчетной вершинной точкой параболической функции, то с увеличением числа итераций значения функции U в опорных точках дискретно возрастают или, соответственно, убывают. На стадии приближений $k > t$ все опорные точки становятся расчетными. При дальнейшем росте номера приближения область опорных точек уменьшается, они концентрируются и качество аппроксимации области экстремума функции U вершиной параболической функции улучшается. Совокупность аргументов $\xi_{1Bk}, \ldots, \xi_{mBk}$, рассчитанных по вершине параболической функции, все меньше отличается от совокупности искомых аргументов, соответствующих экстремуму функции $U(\xi)$, т.е. опорные точки устремляются к предельному значению – экстремуму функции U.

Достаточность приближений оценивается сравнением сколь угодно малой допустимой, т.е. заданной, простой средней относительной погрешности δ определения аргументов экстремума функции $U(\xi)$ с ее частным значением δ_{jk}, рассчитанным в текущем приближении для каждого аргумента по формуле

$$\delta_{jk} = \sum_{f=1}^{t} \left| \xi_{j(k+1)} - \xi_{jkf} \right| \Big/ \left(t \left| \xi_{j(k+1)} \right| \right),$$

где ξ_{jkf} – значение аргумента j опорной точки f в приближении k; $\xi_{j(k+1)}$ – значение аргумента j новой опорной точки, рассчитанной для приближения $k + 1$. Здесь принимаем, что совокупность аргументов, рассчитанных для приближения $k + 1$, наиболее вероятная. Приближения с номером k считаются достаточными, если для каждого аргумента выполняется неравенство $\delta_{jk} \le \delta$.

Если заданная функция $U(\xi)$ имеет не один, а несколько экстремумов, то для определения каждого экстремума на область опорных точек накладывается дополнительное ограничение. Ограничение вводится по их положению в областях функциональной зависимости, примыкающих к искомому экстремуму. Такое ограничение обеспечивает локализацию вершины аппроксимирующей параболической функции в обозначенных ограниченных интервалах изменения аргументов. При определении глобального экстремума такие интервалы могут быть весьма широкими, что упрощает применение МППВ. В наиболее простых случаях аппроксимирующая параболическая функция имеет геометрическое толкование. Например, в случае $m = 1$ ($t = 3$) это обычная парабола, а при $m = 2$ ($t = 5$) – эллиптический параболоид.

Эффективность МППВ носит не теоретический, а эвристический характер в том смысле, что приведен набор упорядоченных, конкретизированных и целенаправленных правил и приемов, выполнение которых обеспечивает достижение цели оптимизации.

3. МЕТОДОЛОГИЯ ПОСТРОЕНИЯ ПОЛИНОМНЫХ ТРЕНДОВ С САМООПРЕДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

Одним из важных приложений МППВ является решение уравнений множественной регрессии случайной зависимой величины Y. На их основе часто выявляют экономические и другие природные закономерности. Подобные уравнения сводятся к стохастической зависимости вида

$$Y_i = A_1 Z_{1i} + \ldots + A_m Z_{mi} + B + \varepsilon_i \,,$$

где Z_{ji} – частное i-значение непрерывной монотонно изменяющейся некоторой функции от детерминированного аргумента j ($j = 1, \ldots, m$); Y_i – заданное случайное значение зависимой величины ($i = 1, \ldots, n$); n – число случайных значений Y_i ($n > m$); ε_i – случайное отклонение зависимой величины от линии регрессии, т.е. от ее тренда. Функция Z может быть степенной, показательной или иной другой и зависит от входящих в нее параметров ξ. Поскольку чаще всего значения ξ, соответствующие искомым закономерностям, заранее неизвестны, то в применяемых схемах регрессии их выбирают искусственно. Например, в степенной функции параметром является показатель степени μ ($\xi = \mu$), который задают числами натурального ряда, и получают полиномы, содержащие члены: линейный, квадратный, кубический и т.д. Однако природные закономерности редко совпадают с такими трендами. Даже при достижении высокого коэффициента их детерминации полученная регрессия из-за необоснованного выбора параметров ξ обладает в широких интервалах интерполяции и особенно в интервалах экстраполяции весьма низкой достоверностью. Для решения этой проблемы необходимо, чтобы параметры ξ не назначались априори искусственным подбором, а объективно рассчитывались в области рациональных чисел (дробных, положительных, отрицательных) с учетом характерных признаков выборки заданных значений зависимой и независимой величин.

Таким образом, ставится задача – построить и определить конкретный вид трендов, представленных полиномами, состоящими из функций, в которых содержащиеся в них параметры ξ (коэффициенты, показатели, основания) заранее неизвестны. В связи с этим рассмотрим соответствующую методологию построения полиномных трендов функционально-факторного вида с самоопределяющимися показателями и коэффициентами, включая руководящий принцип их математической формализации, систематизацию таких трендов и методических приемов их расчетов, компьютерные программы практической реализации трендов.

Основные положения методологии состоят в следующем. Трендовый полином формируется с учетом аддитивного и мультипликативного взаимодействия объективно существующих факторов влияния природных процессов на искомую регрессионную закономерность. Факторы выражаются математическими функциями Z, представленными в общем виде. При аддитивном (т.е. независимом) влиянии факторов наличие интервалов тренда, где его значения изменяются монотонно (возрастают или убывают), отображается в математической формуле трендового полинома суммой соответствующих функциональных членов Z (в степенных полиномах – $Z = AX^{\mu}$, в показательных – $Z = Aa^{\beta x}$, где X – детерминированный аргумент, a – основание степени ($\xi = a$), β – коэффициент ($\xi = \beta$)).

При мультипликативном взаимодействии сочетание двух интервалов противоположной монотонности тренда в области экстремума (например, его возрастания и убывания) отображается в формуле трендового полинома произведением соответствующих разных функций $Z_1 Z_2$. Формула тренда имеет вид

$$Y = B + \sum_i \sum_j A_{ij} Z_{ij} + \sum_i \sum_v A_{iv} (Z_1 Z_2)_{iv} \,,$$

где i – порядковый номер аргумента; j – номер интервала монотонности тренда вдоль аргумента i, учтенного аддитивно; ν – номер экстремума тренда, учтенного мультипликативно; B – постоянная составляющая; A_{ij}, $A_{i\nu}$ – коэффициенты.

Построенные по данному принципу тренды называются полиномными с самоопределяющимися показателями и коэффициентами (тренды СПК). Классифицируем их, разделяя на виды (по признакам примененных функций Z) и типы (по признакам взаимодействия факторных функций, количества аргументов и функциональных членов). Например, в случае степенных функций имеем полиномные степенные тренды с самоопределяющимися показателями степени (тренды ПС СПС). В типе тренда указывается состояние взаимодействия факторных функций, перечни аргументов и самоопределяющихся параметров. Состояние взаимодействия факторных функций выражается следующими индексами: A – аддитивное, M – мультипликативное. Параметры помещают в скобках после каждого относящегося к ним аргумента.

Приведем примеры некоторых типов трендов. Допустим, у тренда только один аргумент. Если тренд не имеет экстремума и учтен только один фактор в виде степенной функции, то тип тренда $A - X(\mu)$; если экстремумов один или два и аддитивно учтено взаимодействие трех факторов, выраженных соответствующими степенными функциями, то тип тренда $A - X(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$. Если аргументов два и вдоль одного из них учтен фактор степенной функции, а вдоль второго аргумента (при имеющемся экстремуме или перегибе) аддитивно учтены два аналогичных фактора, то тип тренда $A - X_1(\mu_{11})X_2(\mu_{21}, \mu_{22})$. Наиболее простые и часто используемые тренды СПК приведены в таблице.

Типы и соответствующие формулы полиномных трендов СПК

m	Число экстремумов по направлению X_i	Тип тренда	Формула тренда	Параметры ξ и методика их определения
Полиномные степенные тренды с самоопределяющимися показателями степени (тренды ПС СПС), $X > 0$				
1	0	$A - X(\mu)$	$Ax^{\mu} + B$	μ, М3Т-1
1	0; 1	$A - X(\mu_1, \mu_2)$	$A_1 x^{\mu_1} + A_2 x^{\mu_2} + B$	μ_1, μ_2, М3Т-2
1	1; 2	$A - X(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$	$A_1 x^{\mu_1} + A_2 x^{\mu_2} + A_3 x^{\mu_3} + B$	μ_1, μ_2, μ_3, М3Т-3
2	0	$M - X_1(\mu_{м1})X_2(\mu_{м2})$	$Ax_1^{\mu_{м1}} x_2^{\mu_{м2}} + B$	$\mu_{м1}, \mu_{м2}$, ЛМ5Т-1
2	0; 0	$A - X_1(\mu_{11})X_2(\mu_{21})$	$A_{11}x_1^{\mu_{11}} + A_{21}x_2^{\mu_{21}} + B$	μ_{11}, μ_{21}, М5Т-1
2	0; 1	$AM - X_1(\mu_{11}, \mu_{м1})X_2(\mu_{21}, \mu_{м2})$	$A_{11}x_1^{\mu_{11}} + A_{21}x_2^{\mu_{21}} + Ax_1^{\mu_{м1}}x_2^{\mu_{м2}} + B$	$\mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{м1}, \mu_{м2},$ М5Т-1, ЛМ5Т-1
2	0; 1	$A - X_1(\mu_{11})X_2(\mu_{21}, \mu_{22})$	$A_{11}x_1^{\mu_{11}} + A_{21}x_2^{\mu_{21}} + A_{22}x_2^{\mu_{22}} + B$	$\mu_{11}, \mu_{21}, \mu_{22}$, М5Т-1, М3Т-1
2	1; 1	$A - X_1(\mu_{11}, \mu_{12})X_2(\mu_{21}, \mu_{22})$	$A_{11}x_1^{\mu_{11}} + A_{12}x_1^{\mu_{12}} + A_{21}x_2^{\mu_{21}} +$ $+ A_{22}x_2^{\mu_{22}} + B$	$\mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{21}, \mu_{22}$, М5Т-2
3	0; 0; 0	$A - X_1(\mu_{11})X_2(\mu_{21})X_3(\mu_{31})$	$A_{11}x_1^{\mu_{11}} + A_{21}x_2^{\mu_{21}} + A_{31}x_3^{\mu_{31}} + B$	$\mu_{11}, \mu_{21}, \mu_{31}$, М7Т-1
3	0; 0; 1	$A - X_1(\mu_{11})X_2(\mu_{21})X_3(\mu_{31}, \mu_{32})$	$A_{11}x_1^{\mu_{11}} + A_{21}x_2^{\mu_{21}} +$ $+ A_{31}x_3^{\mu_{31}} + A_{32}x_3^{\mu_{32}} + B$	$\mu_{11}, \mu_{21}, \mu_{31}, \mu_{32}$, М7Т-1, М3Т-1
3	0; 1; 1	$A - X_1(\mu_{11})X_2(\mu_{21}, \mu_{22})$ $X_3(\mu_{31}, \mu_{32})$	$A_{11}x_1^{\mu_{11}} + A_{21}x_2^{\mu_{21}} + A_{22}x_2^{\mu_{22}} +$ $+ A_{31}x_3^{\mu_{31}} + A_{32}x_3^{\mu_{32}} + B$	$\mu_{11}, \mu_{21}, \mu_{22}, \mu_{31}, \mu_{32}$, М7Т-1, М5Т-1
3	1; 1; 1	$A - X_1(\mu_{11}, \mu_{12})X_2(\mu_{21}, \mu_{22})$ $X_3(\mu_{31}\ \mu_{32})$	$A_{11}x_1^{\mu_{11}} + A_{12}x_1^{\mu_{12}} + A_{21}x_2^{\mu_{21}} + A_{22}x_2^{\mu_{22}} +$ $+ A_{31}x_3^{\mu_{31}} + A_{32}x_3^{\mu_{32}} + B$	$\mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{21}, \mu_{22}, \mu_{31}, \mu_{32}$, М7Т-2
Полиномные показательные тренды с самоопределяющимися коэффициентами в показателях степени (тренды ПП СК)				
1	0	$A - X(\beta)$	$Aa^{\beta X} + B$	β, М3Т-1
1	0; 1	$A - X(\beta_1, \beta_2)$	$A_1 a^{\beta_1 X} + A_2 a^{\beta_2 X} + B$	β_1, β_2, М3Т-2
Полиномный показательный и линейный степенной тренды с самоопределяющимся коэффициентом в показателе степени (тренд ППЛС СК), $X > 0$				
1	0; 1	$A - X(\beta, \mu = 1)$	$A_1 a^{\beta X} + A_2 x + B$	β, М3Т-1

Окончание таблицы

m	Число экстре-мумов по на-правле-нию X_i	Тип тренда	Формула тренда	Параметры ξ и методика их определения
Полиномный нормально распределенный тренд с самоопределяющимися коэффициентами (тренд ПНР СК), $\sigma > 0$				
1	1	$M - X(\bar{x},\ \sigma)$	$A_1 \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-(x-\bar{x})^2/(2\sigma^2)} + B$	$\bar{x}$, σ, ЛМЗТ-2
Полиномный показательный тренд и нормально распределенный с самоопределяющимися коэффициентами (тренд ППНР СК), $\sigma > 0$				
1	1	$AM - X(\beta,\ \bar{x},\ \sigma)$	$A_1 \mathrm{e}^{\beta x} + A_2 \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-(x-\bar{x})^2/(2\sigma^2)} + B$	β, $\bar{x}$, σ, ЛМЗТ-3
Полиномный асимметричного распределения тренд с самоопределяющимися основанием и показателем степени (тренд ПАР СП), $X > 0$, $a > 1$, $\mu > 0$				
1	1	$M - X(a, \mu)$	$A\,(xa^{-x})^{\mu} + B$	a, μ, ЛМЗТ-2
1	1	$M - X(a, \mu, x > x_0)$	$A[(x - x_0)\,a^{x_0 - x}]^{\mu} + B$	a, μ, x_0, ЛМЗТ-3
1	1	$M - X(a, \mu, x < x_0)$	$A[(x_0 - x)\,a^{x_0 - x}]^{\mu} + B$	a, μ, x_0, ЛМЗТ-3

При фиксированных значениях параметров ξ_j коэффициенты тренда оцениваются МНК, где сумма квадратов $Q = \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$ имеет единственный экстремум в виде минимума (Демиденко, 1981, с. 8, 20). Построение тренда всегда сопровождается оценкой коэффициента его детерминации R^2 по формуле

$$R^2 = 1 - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n} (Y_i - Y_T)^2 \right).$$

Поэтому в качестве целевой функции в МППВ примем зависимость $R^2(\xi)$. Допуская в случае аддитивного взаимодействия однородных функций Z изменение ξ_j и учитывая оценку коэффициентов тренда МНК, приходим к тому, что функция $R^2(\xi)$ обладает свойствами гладкости и непрерывности.

При однократном использовании в полиноме j-аргумента она имеет в пространстве ξ единственный максимум. Когда в полиноме имеется более одного функционального члена с одним и тем же аргументом j, то из-за перестановок значений ξ в отмеченных членах зависимость $R^2(\xi)$ содержит $(\eta + 1)!$ одинаковых по значениям максимумов, где η – максимальное количество экстремумов тренда, выбранное из числа имеющихся экстремумов вдоль каждого аргумента. В случае дополнительного или отдельного учета мультипликативно взаимодействующих функций Z_1 и Z_2 зависимость $R^2(\xi)$ также обладает свойствами гладкости и непрерывности, но может иметь в пространстве ξ даже при однократном учете j-аргумента более одного максимума. Их число увеличивается с ростом номера ν мультипликативно учтенного экстремума. Однако если в членах полинома с j-аргументом, учтенных по факторам влияния более одного раза, придать параметрам ξ фиксированные значения, то выделяется ортогональное сечение зависимости $R^2(\xi)$, в пределах которого полученная функция R^2 при аддитивном взаимодействии членов полинома имеет единственный максимум. В случае их мультипликативного взаимодействия число максимумов становится минимальным. В таких сечениях МППВ применим при аддитивном взаимодействии в условиях широкой сходимости, а в случае мультипликативного взаимодействия – соответственно в условиях локализованной сходимости.

Оптимальные показатели ξ определяются МНК и МППВ непосредственно в случае однократного учета аргумента j или путем последовательных s-приближений, каждое из которых содержит цикл последовательно проводимых кратных приближений, осуществляемых в ортогональных сечениях. Для выделения очередного сечения параметрам, не задействованным в нем, придают фиксированные значения, полученные для них в предыдущих сечениях. При чередовании сечений в s-приближении и увеличении номера s показатели ξ сходятся к искомым значениям. Коэффициент $R^2_{\max}$, увеличиваясь через дискретные интервалы, постепенно приближается к какой-либо одной (из числа существующих) точке максимума функции $R^2(\xi)$. Приближение, после которого знак разности $R^2_{\max(s+1)} - R^2_{\max(s)}$ изменяется с плюса на минус, принимается достаточным. Чем меньше погрешность δ, заданная в сечениях, тем точнее в s-приближениях рассчитываются искомые параметры ξ. Таким образом, в результате совместного применения МНК и МППВ определяется совокупность оптимальных параметров $\xi_1, \ldots, \xi_m$, при которой коэффициент детерминации тренда R^2 наибольший из всех возможных, оцениваемых МНК.

Выбор и последовательность чередования ортогональных сечений могут быть разными, и методика определения оптимальных параметров ξ в отдельных трендах становится многовариантной. С учетом соображений минимизации и компактности вычислительных операций предлагается преимущественно выбирать методики, содержащие в выделенных сечениях параболическую аппроксимацию с наибольшим числом аргументов, следовательно, и с наибольшим числом опорных точек.

Применяемые в сечениях базовые методики систематизируем следующим образом. Для их сокращенного обозначения введем аббревиатуру Л*МtТ*-*k*, где Л – локализованная; М – методика; *t* – число опорных точек; Т – точки; *k* – кратность применения базовой методики (по числу ортогональных сечений) в одном s-приближении. Обозначения методик, по которым рассчитываются тренды, представлены в таблице. Например, тренд ПС СПС типа $A - X(\mu_1, \mu_2)$ рассчитывается по методике М3Т-2, содержащей в каждом s-приближении двукратно применяемую (в раздельных сечениях) одномерную методику с параболической аппроксимацией по трем опорным точкам, а тренд типа $A - X_1(\mu_{11})X_2(\mu_{21}, \mu_{22})$ рассчитывается по методике М5Т-1, М3Т-1, состоящей в s-приближении из двух базовых методик сечения, среди которых последовательно в одном сечении берется двумерная параболическая аппроксимация по пяти опорным точкам, а в другом сечении – одномерная аппроксимации по трем опорным точкам. В случае регрессии трендом ППНР СК $AM - X(\beta, \bar{x}, \sigma)$ используется методика ЛМ3Т-3, включающая стадию предварительной локализации областей аппроксимации и последующие s-приближения. Каждое приближение состоит из трех сечений, в которых последовательно проводятся расчеты по базовой методике с тремя опорными точками.

Отметим некоторые методические аспекты. Для обеспечения обусловленности матриц, по которым рассчитываются коэффициенты тренда и R^2, модули фиксированных параметров, задающих сечение, и параметров опорных точек внутри сечения не должны совпадать. Процесс последовательных приближений внутри каждого сечения разделяется на начальную стадию локализации области максимума функции R^2 (заданной в данном сечении) и последующую стадию сходимости с ней вершины параболической функции. При наличии в тренде мультипликативно взаимодействующих функций начальной стадии предшествует этап оценки области параметров ξ, внутри которой находится искомый максимум коэффициента детерминации. В случаях нарушения условия $C_{j2k} < 0$, иногда возникающего в начальной стадии при расположении части опорных точек в вогнутой области функции R^2, опорные точки с наименьшим значением коэффициента R^2 передвигают в область повышенных его значений до тех пор, пока не устранится отмеченное нарушение. После замены всех заданных в нулевом приближении опорных точек на расчетные с ростом номера приближения опорные точки локализуются вокруг максимума функции R^2 и сходятся к точке $R^2_{\max}$.

Приведем краткое описание начальной стадии базовых методик М3Т и М5Т в случае построения трендов ПС СПС. В М3Т для построения параболы выбирают три опорные точки. В нулевом приближении показатель степени первой точки μ_1 задают малым отрицательным

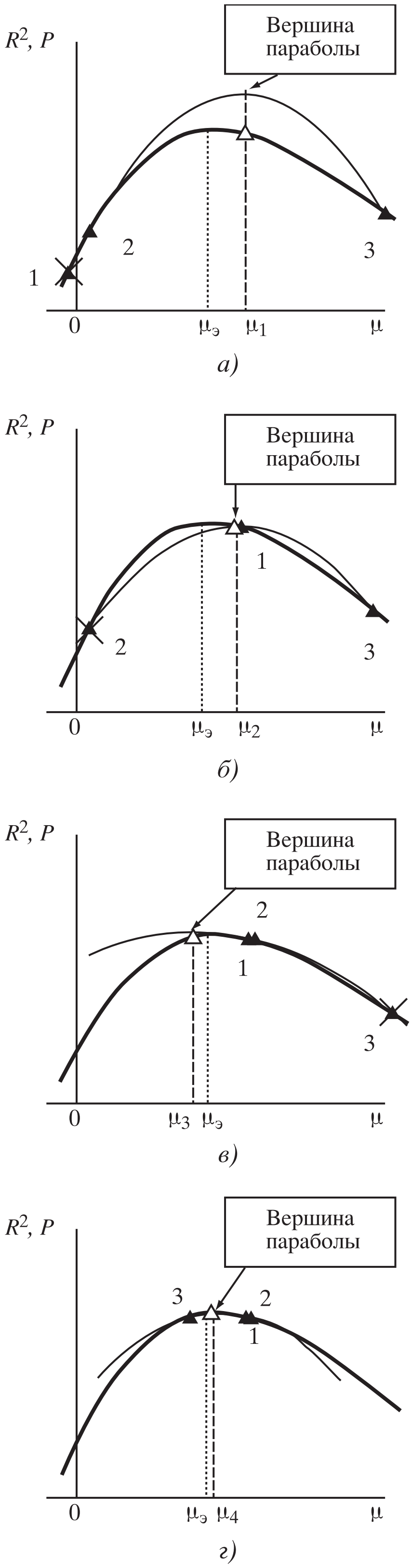

Рис. 1. Перемещение опорных точек в начальной стадии методики сечения М3Т при построении тренда ПС СПС: ———— – функция $R^2(\mu)$; ——— – парабла $P(\mu)$; ▲ – опорные точки, по которым строится парабола; △ – новая опорная точка, рассчитанная по вершине параболы; ✖ – выбывающая опорная точка предыдущего приближения с наименьшим коэффициентом детерминации

числом; показатель степени второй точки μ_2 – малым положительным числом; показатель степени третьей точки μ_3 – в случае $R_2^2 > R_1^2$ на интервале уменьшения R^2, а в случае $R_2^2 < R_1^2$ на интервале увеличения R^2 таким положительным или отрицательным числом, при котором положение вершины параболы находится в промежутке между наименьшим и наибольшим заданным показателем степени. Образование и перемещение опорных точек на начальных стадиях М3Т в случае $R_2^2 > R_1^2$ показаны на рис. 1. На рис. 1*а–в* образование расчетной опорной точки проводится по итогам нулевого, первого и второго приближений, а на рис. 1*г* отображено формирование следующей опорной точки в условиях локализации параболической вершины. По мере роста номера приближения новая опорная точка располагается на графике R^2 все ближе к точке максимума с искомым показателем степени $\mu_э$.

В М5Т для построения эллиптического параболоида выбирают пять опорных точек. По наибольшему значению R^2 из трех точек, заданных около нуля в разных квадрантах системы координат (μ_{11}, μ_{21}), определяют квадрант, содержащий точку максимума R^2. Оставшиеся две опорные точки располагают в этом квадранте по тем же соображениям в отношении каждого показателя степени, которые приведены в М3Т. На рис. 2 изображен процесс концентрации опорных точек и последовательное перемещение их к точке $R^2_{\max}$ начиная с нулевого по четвертое приближение для случая, когда максимум R^2 расположен в первом квадранте.

Построение трендов на основе МППВ по исполнению и количеству численных расчетов намного проще, чем при использовании известных многомерных методов прямого поиска, градиентных или второго порядка, например итерационных методов Ньютона–Гаусса или Левенберга–Марквардта, в которых задача оптимизации решается с помощью сложных матричных расчетов и коррекцией направления поиска в каждой из многочисленных итераций. Для сравнения отметим, что в большинстве практических случаев применения МППВ при определении показателей степени или коэффициентов по методике сечения М3Т или М5Т для достижения заданной погрешности расчетов требуется не больше 10 или 13 итераций, соответственно. В Институте горного дела УрО РАН разработана программа для ЭВМ, включающая пакет ПС СПС (Антонов, 2009) и производящая на основе МППВ автоматическое построение на компьютере серии двумерных трендов СПК, приведенных в таблице. В программе предусмотрены функции автоматического и ручного ввода исходных данных, выбора типа тренда, расчета коэффициентов, оснований и показателей степени, а также отображения математических формул трендов, построение их графиков, сопряжения с

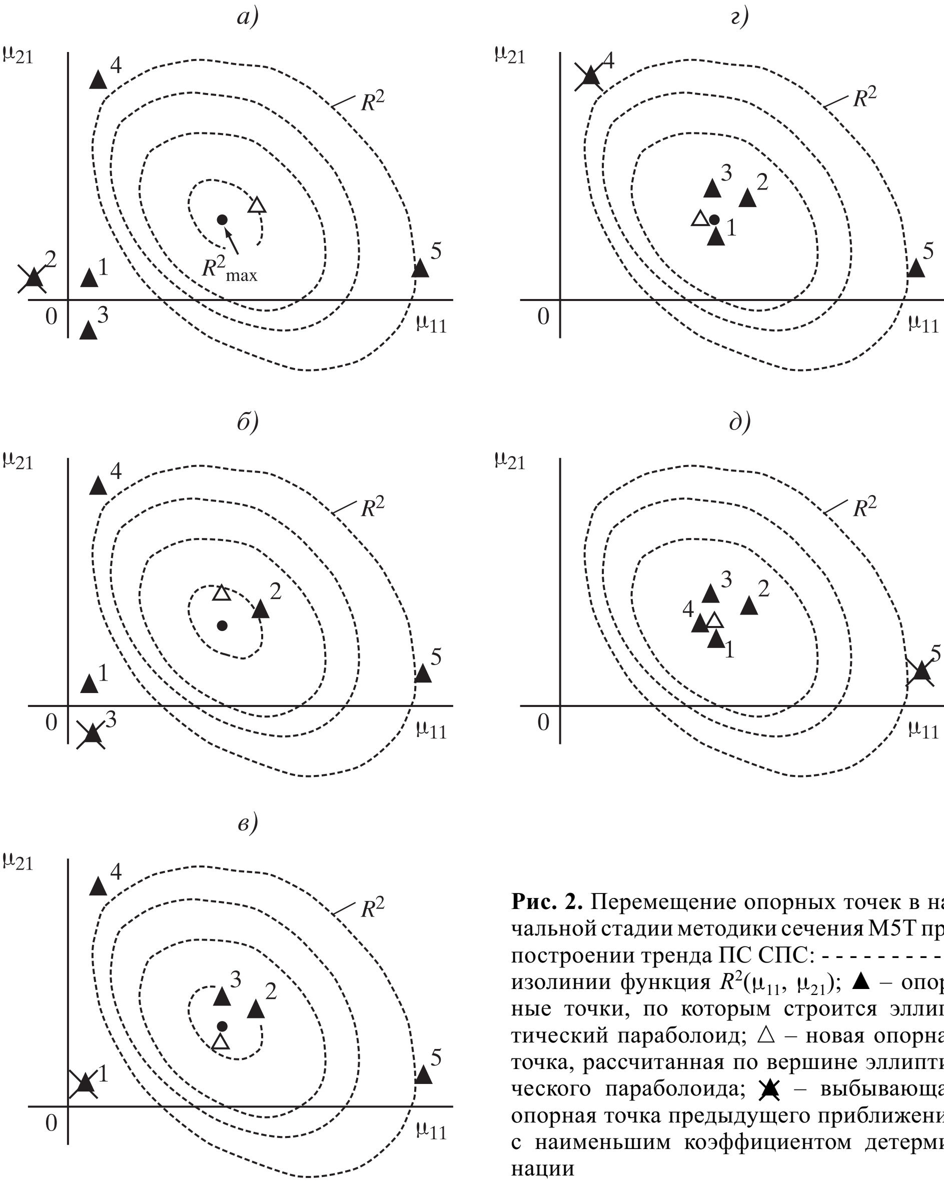

Рис. 2. Перемещение опорных точек в начальной стадии методики сечения M5T при построении тренда ПС СПС: - - - - - - - - - – изолинии функция $R^2(\mu_{11}, \mu_{21})$; ▲ – опорные точки, по которым строится эллиптический параболоид; △ – новая опорная точка, рассчитанная по вершине эллиптического параболоида; ✖ – выбывающая опорная точка предыдущего приближения с наименьшим коэффициентом детерминации

внешними электронными носителями и программными пакетами, например Microsoft Office Excel, по автоматическому вводу данных и выходу формул и графиков тренда. Продолжительность расчетов и построения программой тренда в подавляющем большинстве случаев не превышает одну секунду.

Достоверность выявленных закономерностей и их распространения в широких интервалах интерполяции и экстраполяции трендами СПК значительно выше по сравнению с трендами, где в базовых функциях показатели, основания и коэффициенты априори заданы. Тем не менее тип тренда может быть выбран однозначно лишь по заранее известным особенностям и свойствам искомой трендовой зависимости. Часто таких сведений нет, но имеются данные об относительной погрешности заданных значений зависимой величины, т.е. тех средств или методов, с применением которых получены (косвенно рассчитаны или непосредственно измерены) ее исходные значения. Тогда программой определяется тип ориентированного на указанную погрешность тренда. По введенной погрешности δ_{yi} рассчитывается коэффициент заданной детерминации $R_з^2$:

$$R_з^2 = 1 - \left(\sum_{i=1}^{i=n} (\delta_{yi} Y_i)^2\right) \Bigg/ \sum_{i=1}^{i=n} (Y_i - \overline{Y})^2$$

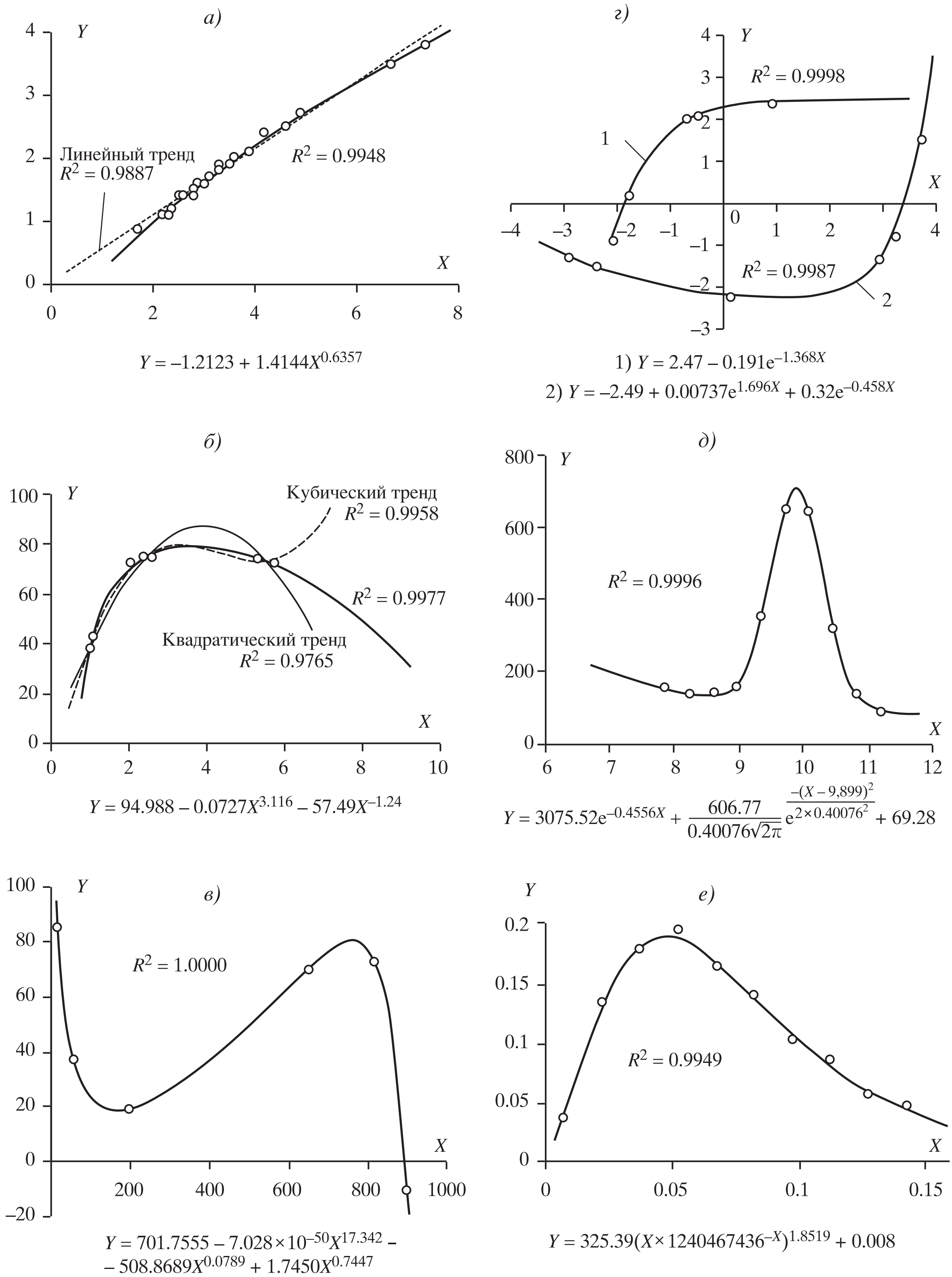

Рис. 3. Примеры построения двумерных трендов СПК

и программой выбирается как наиболее достоверный такой тип тренда, при котором абсолютная разность между коэффициентами R_3^2 и R^2 минимальная.

Эффективность применения двумерных трендов СПК проиллюстрирована на рис. 3, где приведены математические выражения и графики, полученные в некоторых практических примерах. Точки исходных данных, по которым построены тренды, обведены окружностями. Математические выражения трендов расположены под графиками. На рис. 3*а–в* построены тренды ПС СПС, в которых факторы влияния на искомую закономерность выражены степенными функциями. На рис. 3*а* по мере увеличения в заданных точках значений X_i значения Y_i также увеличиваются. Поэтому учтен один фактор и проведен тренд типа $A - X(\mu)$, в котором рассчитан показатель степени $\mu = 0.6357$. Тренд оказался криволинейным. Его достоверность ($R^2 = 0.9948$) больше, чем у традиционно проводимого в таких случаях линейного тренда. На рис. 3*б* дискретное распределение заданных значений Y_i имеет явный максимум. Применить известные полиномные степенные квадратичный и кубический тренды с целью прогноза величины Y в область, где аргумент X изменяется от 6 до 10, невозможно, так как в прогнозируемой области эти тренды расходятся по противоположным направлениям. Квадратичный тренд существенно занижает, а кубический, наоборот, резко завышает прогноз величины Y. Поэтому с учетом двух факторов влияния построен тренд типа $A - X(\mu_1, \mu_2)$, где рассчитано $\mu_1 = 3.116$, $\mu_2 = -1.24$. Данный тренд дает более устойчивый и достоверный прогноз без резких отклонений в сторону существенного занижения или завышения. На рис. 3*в* показано, как по нескольким заданным точкам, принадлежавшим неизвестной полиномной степенной функции $Y(X)$ с тремя факторами влияния, трендом типа $A - X(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, где $\mu_1 = 17.342$, $\mu_2 = 0.0789$, $\mu_3 = 0.7447$, достаточно точно ($R^2 = 1.0000$) установлено ее математическое выражение. На рис. 3*г* отображены два тренда вида ПП СК (см. таблицу), в которых факторы влияния на искомую закономерность выражены показательными функциями. В качестве основания показательных функций, в частности, принято число e (a = e). В случае 1 учтен один фактор и проведен тренд типа $A - X(\beta)$, в котором рассчитан коэффициент $\beta = -1.368$. По его формуле определено значение асимптоты 2.47, к которой стремится линия тренда при неограниченном увеличении аргумента X. В случае 2 в заданном распределении значений Y_i имеется минимум. Поэтому учтены два фактора и проведен тренд типа $A - X(\beta_1, \beta_2)$, в котором также рассчитаны коэффициенты при показателях степени $\beta_1 = 1.696$, $\beta_2 = -0.458$. На рис. 3*д* по экспериментальным точкам спектрального распределения зависимой величины Y проведено уравнение регрессии ППНР СК типа $AM - X(\beta, \bar{x}, \sigma)$. Предполагается, что данный тренд обусловлен влиянием фонового фактора (в виде показательной функции) и аддитивно взаимодействующего с ним фактора рассеяния спектральной линии, выраженного функцией нормального распределения. По математическому выражению полученного тренда установлено положение спектральной линии $\bar{x} = 9.899$ на оси абсцисс. Среднее

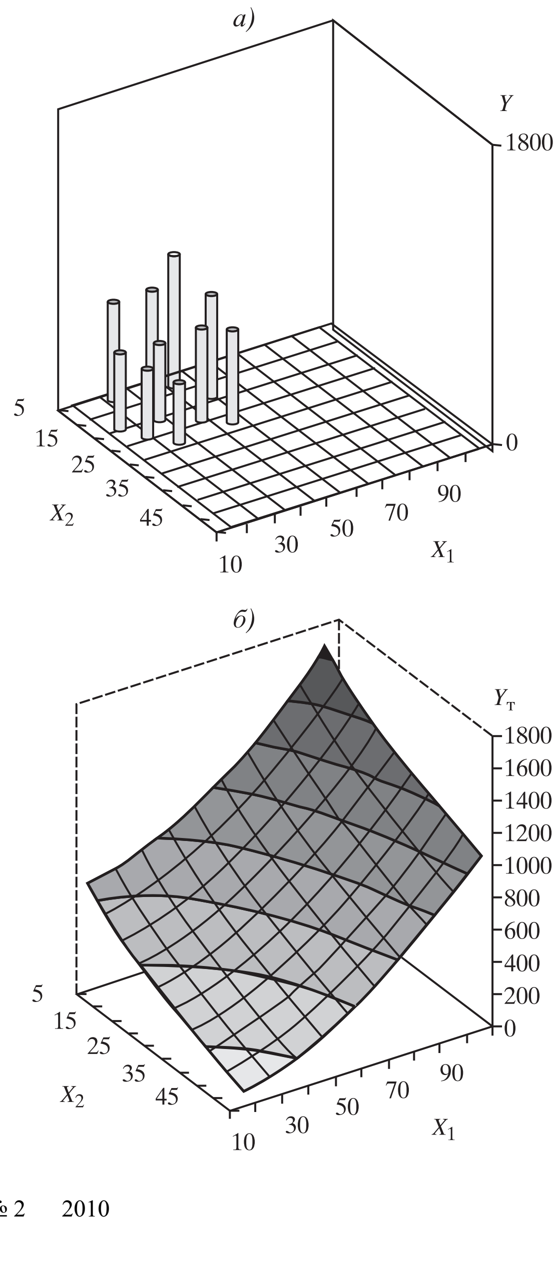

Рис. 4. Пример построения трехмерного полиномного степенного тренда ПС СПС типа $A - X_1(\mu_{11})X_2(\mu_{21})$, $Y_T = 0.219X_1^{1.83} - 104.11X_2^{0.52} + 883.26$, $\delta = 10^{-4}$, $R^2 = 0.9707$: *а* – распределение исходных данных; *б* – поверхность тренда

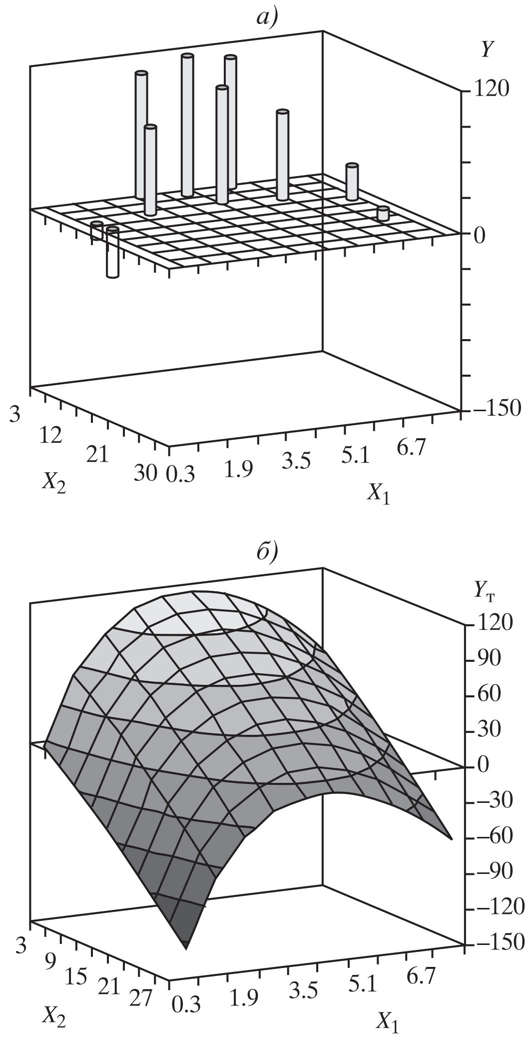

Рис. 5. Пример построения трехмерного полиномного степенного тренда ПС СПС типа $A - X_1(\mu_{11}, \mu_{12})X_2(\mu_{21})$, $Y_T = 119.1X_1^{0.62} - 12.18X_1^{1.58} + 2.11X_2^{1.21} - 50.3$, $\delta = 10^{-4}$, $R^2 = 0.9987$: *а* – распределение исходных данных; *б* – поверхность тренда

квадратичное отклонение аргумента при ее рассеянии составляет $\sigma = 0.40076$. На рис. 3*е* изображено дискретное распределение величины Y, составленное по результатам экспериментов. Распределение обладает правосторонней асимметрией. Поэтому с учетом мультипликативно взаимодействующих факторов, представленных в виде степенной и показательной функций, проведен тренд ПАР СП типа $M - X(a, \mu)$, в котором рассчитаны основание $a = 1240467436$ и показатель степени $\mu = 1.8519$.

На рис. 4, 5 представлены трехмерные тренды ПС СПС. Распределения заданных случайных значений зависимой величины показаны на рис. 4*а*, 5*а*, поверхности трендов соответствующих типов $A - X_1(\mu_{11})X_2(\mu_{21})$ и $A - X_1(\mu_{11}, \mu_{12})X_2(\mu_{21})$ – на рис. 4*б*, 5*б*. В тренде $X_1(\mu_{11})X_2(\mu_{21})$ определены показатели степени $\mu_{11} = 1.83$, $\mu_{21} = 0.52$. Его поверхность с целью прогноза экстраполирована на внешнюю область, по площади в 4 раза больше той, которую занимали исходные данные. В области экстраполяции поверхность тренда изменяется плавно и монотонно в соответствии с закономерностью, заданной исходными данными. Такая же ситуация и в тренде $A - X_1(\mu_{11}, \mu_{12})X_2(\mu_{21})$, где $\mu_{11} = 0.62$, $\mu_{12} = 1.58$, $\mu_{21} = 1.21$, с той лишь разницей, что в исходных данных случайные значения зависимой величины имеют разный алгебраический знак и поверхность тренда значительно сложнее из-за наличия экстремума в направлении аргумента X_1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Антонов В.А. (2009): Полиномные степенные тренды с самоопределяющимися показателями степени (тренды ПС СПС): программа для ЭВМ, РФ; регистрационный номер 2009611347. Екатеринбург: ИГД УрО РАН.

Демиденко Е.З. (1981): Линейная и нелинейная регрессии. М.: Финансы и статистика.

Поступила в редакцию
25.11.2008 г.

About One Method of Optimization and Its Application in Construction Polynoms of Trends with Self-Defined Parameters

V.A. Antonov

The essence of a new numerical method of optimization – method approach parabolic top (MAPT), intended for finding the extremum of the set of functions. On the basis of the given method the methodology of the decision of the equations of plural regress casually distributed values of the economic and other rates presented in a kind of polynoms sedate, indicative and other functions in which exponents, the bases and factors are not appointed a priori, and self-defined calculation in the field of rational numbers is created. Classification of trends and ordering of methodical receptions of their reception is offered. Practical examples of numerical calculations and construction of the specified trends by the computer program presented.

Key words: method approach parabolic top (MAPT).