МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

МЕТОД РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОГРАНИЧЕННОГО РЕСУРСА МЕЖДУ РАЗЛИЧНЫМИ ГРУППАМИ НА ОСНОВАНИИ ИХ ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ*

© 2010 г. Ю.В. Короткова

(Москва)

Исследуются проблемы распределения ограниченного блага между группами в условиях максимизации общего благосостояния, основанного на функциях полезности в группах. Методы распределения заданного ресурса опираются на роулсеанский и утилитаристский критерии общественного благосостояния. Методики могут быть применены на практике для распределения субсидии между группами с фиксированным начальным доходом.

Ключевые слова: распределение, ограниченное благо, общее благосостояние, функция полезности, группа, субсидии, фиксированный доход.

Целью работы является анализ различных вариантов распределения субсидий между группами с фиксированным начальным доходом и предложение таких форм, которые позволяют увеличить конкретный показатель общественного благосостояния.[1]

Описание переменных. Рассмотрим n однородных групп, $i = 1, ..., n$. Обозначим через $x_1, ..., x_n$ – начальное распределение благ в группах. Каждая группа характеризуется своей функцией полезности $u_i(x)$. Полагаем, что $x_i \geq 0\ \forall i$; S – ограниченная сумма субсидии, направленная на повышение общественного благосостояния. Под благом, ресурсом будем понимать его денежный эквивалент (деньги). В качестве функции полезности возьмем, например, эмпирическую функцию полезности от труда l и его оплаты x: $u(l, x) = \ln(x + d) + a^{-1}\ln(T - l)$, где d – внешний доход группы; a – коэффициент, характеризующий трудолюбие; T – квалификация работника, талант.

В рамках данной задачи ограничимся зависимостью функции полезности только от дохода, т.е. $u(x)$, хотя это сужает возможность применения результатов, но значительно упрощает расчеты и, кроме того, подобное ограничение указывает, что субсидия будет распределяться только между группами, которые не могут улучшить свое материальное положение за счет собственного труда.

В (Гаврилец, 1983) показано, что функция полезности от дохода может быть представлена в виде $u(x) = \alpha\ln(x) + \beta$ при условии, что эквивалентные по полезности приращения составляют в пределе один и тот же процент от исходной суммы. По данным ВЦИОМ в обществе определились устойчивые группы бедных семей, у которых практически нет шансов вырваться из бедности. Это состояние можно обозначить как застойную бедность, углубление бедности. Согласно этим данным только 10% бедняков теоретически могут повысить свой доход за счет повышения своей трудовой активности (Кара-Мурза, 2005).

Действительно, среди рассматриваемых нами групп – инвалиды, пенсионеры – мало кто может значительно повысить свой социальный уровень за счет повышения трудовой активности. Аналогичная ситуация возникает и для работников бюджетной сферы. Отметим, что эти группы чаще всего нуждаются в улучшении материального положения.

Постановка задачи. Необходимо распределить ограниченную сумму благ S между группами с начальным распределением доходов $x_1, ..., x_n$, в каком-то смысле наилучшим образом. То есть надо найти такое распределение этой суммы между группами, чтобы выбранный критерий общественного благосостояния максимально увеличился.

---

* Автор выражает благодарность Ю.Н. Гаврильцу за помощь в подготовке данной работы.

Обозначим искомое разбиение суммы S между группами как $\Delta_1, ..., \Delta_n$, при этом $\sum \Delta_i = S$ и $\Delta_i \geq 0 \; \forall i$. Необходимо найти такое разбиение $S = (\Delta_1, ..., \Delta_n)$, чтобы достигался максимум выбранного критерия благосостояния для групп с доходами $x_1 + \Delta_1, ..., x_n + \Delta_n$. Существуют различные подходы к определению критерия общественного благосостояния.

Утилитаристский критерий общественного благосостояния. Этот принцип определения общественного благосостояния представляет собой "сумму полезностей", "сумму счастья" всех членов общества. Согласно этому критерию справедливым будет такое распределение доходов, при котором достигается максимум общественного благосостояния, представляющего сумму индивидуальных полезностей всех членов общества. Математически это можно выразить в виде:

$$U(x) = \sum_i k_i u_i(x_i), \tag{1}$$

где $u_i(x)$ – монотонно возрастающая выпуклая функция полезности в группе i; k_i – некоторые коэффициенты приведения всех полезностей. Если $u_i(x) = u_j(x) \; \forall x$ и в качестве k_i участвуют доли людей с доходом x_i, то критерий $U(x)$ будет представлять собой "сумму счастья". В общем же случае k_i имеет смысл неких коэффициентов "социальной значимости" групп. Очевидно, что можно зафиксировать k_i и выразить все остальные коэффициенты через k_i: из условия $\Delta U = 0$ следует, что $k_i \Delta u_i = k_j \Delta u_j$, откуда

$$k_j = k_i \Delta u_i / \Delta u_j. \tag{2}$$

Данный подход предполагает возможность межгруппового сравнения индивидуальных функций полезностей. Кроме того, согласно утилитаристскому подходу функции индивидуальной полезности можно рассматривать одинаковыми или различными для всех членов общества. В последнем случае подразумевается, что люди с одинаковым начальным распределением могут по-разному реагировать на одинаковую сумму добавки.

Таким образом, согласно утилитаристскому подходу общество может считать справедливым как равное, так и неравное распределение доходов в зависимости от представлений о характере индивидуальных функций полезностей разных членов общества. Нетрудно заметить, что в случае, когда все люди одинаково реагируют на добавление им денежной единицы, т.е. при $k_i = k_j$, или в случае, когда k_i – доли людей с доходом x_i, то справедливым будет его уравнительное распределение.

Постановка задачи выглядит следующим образом:

$$U(x) = \sum_i k_i u_i(x_i + \Delta_i) \to \max, \quad \sum_i \Delta_i = S, \quad \Delta_i \geq 0 \quad \forall i. \tag{3}$$

Упорядочим группы согласно принципу: $i \leq i+1 \Leftrightarrow k_i u_i'(x_i) \geq k_{i+1} u_{i+1}'(x_{i+1})$. Можно доказать справедливость следующей теоремы.

Теорема 1.

1. Оптимальное распределение $\Delta = (\Delta_1, ..., \Delta_n)$ *имеет вид* $(\Delta_1, ..., \Delta_m, 0, ..., 0), m \leq n$, *где* $\sum_i \Delta_i = S$ *и* $\Delta_i > 0, i = 1, ..., m$, *причем:*

$$\begin{aligned} &k_i u_i'(x_i + \Delta_i) = k_j u_j'(x_j + \Delta_j) \; \forall i, j \leq m, \\ &k_i u_i'(x_i + \Delta_i) > k_k u_k'(x_k), \; i = 1, ..., m, \forall k > m. \end{aligned} \tag{4}$$

2. Всякое разбиение $\Delta_1, ..., \Delta_n$ *суммы S, при котором вся сумма распределена между первыми m группами так, что в этих группах предельная полезность блага стала одинаковой, а предельная полезность блага в остальных группах не превышает этого значения (т.е. выполнено (4)), оптимально.*

Доказательство.

1. Решим задачу оптимизации (3). Для этого запишем функцию Лагранжа:

$$L(\lambda, \Delta_1, ..., \Delta_n) = \sum_i k_i u_i(x_i + \Delta_i) + \lambda(S - \sum_i \Delta_i),$$

где λ – множитель Лагранжа. Пусть $\Delta_1, ..., \Delta_n$ – оптимальное распределение. Тогда выполняется соотношение Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta_i} = k_i u_i'(x_i + \Delta_i) - \lambda \le 0,$$

причем в точках $\Delta_i > 0$ выполнено равенство $k_i u_i'(x_i + \Delta_i) = \lambda$.

Так как $\sum \Delta_i = S > 0,$ то существуют $\Delta_i > 0$, для которых предельные полезности блага в группах после распределения равны $k_i u_i'(x_i + \Delta_i) = \lambda$. Для $\Delta_j = 0$ предельные полезности блага могут быть $k_j u_j'(x_j) < \lambda$. Для выпуклых функций условие Лагранжа является необходимым и достаточным для существования седловой точки, а седловая точка – достаточное условие для существования экстремума.

2. Покажем, что решение, найденное в пункте 1 теоремы, оптимально. Рассмотрим группы, упорядоченные по предельной полезности дохода в точке начального распределения:

$$k_1 u_1'(x_1) \ge ... \ge k_n u_n'(x_n).$$

Пусть имеется набор $\Delta_1, ..., \Delta_n$, такой, что

$$k_1 u_1'(x_1 + \Delta_1) = ... = k_m u_m'(x_m + \Delta_m) \ge k_{m+1} u_{m+1}'(x_{m+1}) \ge ... \ge k_n u_n'(x_n),$$

т.е.

$$\Delta_i > 0,\ i = 1, ..., m,\quad \Delta_i = 0, j = m+1, ..., n;\ \sum \Delta_i = S,$$

и данное распределение не оптимально. А также существует другое распределение, при котором значение показателя общественного благосостояния больше. Это значит, что есть некоторое слагаемое $k_j u_j(x_j + \tilde{\Delta}_j) > k_j u_j(x_j + \Delta_j)$, такое, что все другие слагаемые в функции общественного благосостояния не ниже, чем при распределении $\Delta_1, ..., \Delta_n$. Однако в силу монотонности $u_j(x)$ это может быть выполнено только при $\tilde{\Delta}_j > \Delta_j$, но сумма S уже вся распределена. То есть нельзя увеличить слагаемое $k_j u_j(x_j + \Delta_j)$, не уменьшив $k_i u_i(x_i + \Delta_i)$. Покажем, что и этот вариант не сможет сильнее увеличить благосостояние.

Рассмотрим

$$U(x + \Delta) - U(x + \tilde{\Delta}) = \sum_i k_i u_i(x_i + \Delta_i) - \sum_i k_i u_i(x_i + \tilde{\Delta}_i).$$

Разница в данных суммах возникает только в двух слагаемых i и j, тогда

$$U(x + \Delta) - U(x + \tilde{\Delta}) = (k_i u_i(x_i + \Delta_i) + k_j u_j(x_j + \Delta_j)) -$$

$$-(k_i u_i(x_i + \Delta_i - \varepsilon) + k_j u_j(x_j + \Delta_j + \varepsilon)) = k_i(u_i(x_i + \Delta_i) - u_i(x_i + \Delta_i - \varepsilon)) -$$

$$- k_j(u_j(x_j + \Delta_j) + u_j(x_j + \Delta_j + \varepsilon)).$$

Далее из

$$k_1 u_1'(x_1 + \Delta_1) = ... = k_m u_m'(x_m + \Delta_m) \ge k_{m+1} u_{m+1}'(x_{m+1}) \ge ... \ge k_n u_n'(x_n)$$

следует, что

$$k_i u_i'(x_i + \Delta_i) \ge k_j u_j'(x_j + \Delta_j),\quad U - \tilde{U} = \varepsilon(k_i u_i'(x_i + \Delta_i) - k_i u_j'(x_j + \Delta_j)) \ge 0.$$

Это означает, что показатель благосостояния нельзя улучшить. ■

Процедура нахождения оптимального решения для утилитаристского критерия общественного благосостояния. Алгоритм нахождения оптимального распределения суммы S между группами сводится к следующему. Упорядочим группы по их предельной полезности от начального распределения блага:

$$k_1 u_1'(x_1) \ge k_2 u_2'(x_2) \ge ... \ge k_n u_n'(x_n).$$

Тогда при выборе группы, которой предпочтительнее было бы дать некую малую сумму $\varepsilon > 0$, нужно остановить выбор на первой группе. У нее предельная полезность блага выше остальных, и передача некоторой суммы в эту группу наилучшим образом увеличит общее благосостояние.

Повышая сумму выплат в первой группе, мы снижаем предельную полезность ее блага. Будем добавлять ε в первую группу до тех пор, пока предельная полезность блага группы не станет равной предельной полезности блага для второй группы, т.е. будет выполнено

$$k_1 u_1'(x_1 + \Delta_1) = k_2 u_2'(x_2) \geq \ldots \geq k_n u_n'(x_n).$$

Теперь увеличим $x + \Delta_1$ и x_2 на сумму α_2. Действительно, добавление α_2 в любую из первых двух групп равносильно друг другу. Будем повторять эту операцию до тех пор, пока не будет выполнено

$$k_1 u_1'(x_1 + \Delta_1) = k_2 u_2'(x_2 + \Delta_2) = k_3 u_3'(x_3) \geq \ldots \geq k_n u_n'(x_n)$$

и пока не будет распределена вся сумма S. В итоге получим:

$$k_1 u_1'(x_1 + \Delta_1) = k_2 u_2'(x_2 + \Delta_2) = \ldots = k_m u_m'(x_m + \Delta_m) \geq k_{m+1} u_{m+1}'(x_{m+1}) \geq \ldots \geq k_n u_n'(x_n).$$

Если на последнем этапе нет возможности добавить всем m группам некую сумму, чтобы их предельная полезность блага достигла уровня $m+1$ группы, т.е. сумма S исчерпана почти полностью, необходимо остаток суммы распределить между m группами так, чтобы их предельная полезность после распределения S осталась равной друг другу.

Данный алгоритм приводит к такому распределению суммы S, которое удовлетворяет теореме и дает максимум утилитаристского критерия благосостояния.

Критерий оптимальности Роулса. Роулсианский критерий общественного благосостояния основан на утверждении, что справедливым будет считаться такое распределение, которое максимизирует благосостояние наименее обеспеченного члена общества. Для обоснования этого подхода Роулс использует специфическую конструкцию, известную в экономической теории под названием “вуаль неведения”. Это означает, что при формировании принципов справедливого распределения нужно абстрагироваться от возможных последствий для своего личного благосостояния. Роулс утверждает, что в условиях “вуали неведения” каждый предпочел бы застраховаться от возможного падения в пропасть бедности и потому одобрил бы такое распределение доходов, при котором общество было бы озабочено максимизацией доходов наименее обеспеченных членов.

Роулсианская функция общественного благосостояния имеет вид:

$$\min_i \gamma_i u_i(x_i) \to \max. \tag{5}$$

Речь идет о решении задачи максимина. Другими словами, общественное благосостояние по Роулсу улучшается только в том случае, если повышается благосостояние наименее обеспеченного индивида.

Коэффициенты γ_i могут представлять собой коэффициенты приведения функций полезности и рассматриваться в качестве коэффициентов социальной значимости (весов).

Математическая постановка задачи:

$$\min_i \gamma_i u_i(x_i + \Delta_i) \to \max, \quad \sum_i \Delta_i = S, \quad \Delta_i \geq 0 \quad \forall i, \tag{6}$$

или

$$\gamma_i u_i(x_i + \Delta_i) = z \to \max, \quad \sum_i \Delta_i = S, \quad \Delta_i \geq 0 \quad \forall i.$$

Упорядочим группы согласно принципу $i \leq i+1 \Leftrightarrow \gamma_i u_i(x_i) \leq \gamma_{i+1} u_{i+1}(x_{i+1})$. Тогда будет выполняться следующая теорема.

Теорема 2.

1. Оптимальное распределение $\Delta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ *субсидии* S *имеет вид* $(\Delta_1, \ldots, \Delta_m, 0, \ldots, 0)$, $m \leq n$, *где* $\sum_i \Delta_i = S$ *и* $\Delta_i > 0, i = 1, \ldots, m$, *причем*

$$\begin{aligned} &\gamma_i u_i(x_i + \Delta_i) = \gamma_j u_j(x_j + \Delta_j) = z \quad \forall i, j \leq m, \\ &\gamma_i u_i(x_i + \Delta_i) < \gamma_k u_k(x_k) \quad \forall i \leq 1, \ldots, m \ \ \forall k > m. \end{aligned} \tag{7}$$

2. Всякое распределение $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$, *при котором вся сумма S распределена между m группами в упорядоченном наборе таким образом, что полезность этих групп равна, а полезность остальных групп не ниже* (*т.е. выполнено* (7)), *оптимально.*

Доказательство.

1. Запишем функцию Лагранжа:

$$L(\alpha, \beta, \Delta_1, \ldots, \Delta_n) = z + \sum_i \alpha_i(\gamma_i u_i(x_i + \Delta_i) - z) + \beta(S - \sum_i \Delta_i).$$

Пусть $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ – оптимальное распределение, тогда выполняется соотношение Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta_i} = \alpha_i \gamma_i u_i'(x_i + \Delta_i) - \beta \le 0, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = 1 + \sum \alpha_i \le 0,$$

причем в точках $\Delta_i > 0$ имеет место равенство $\alpha_i \gamma_i u_i'(x_i + \Delta_i) = \beta$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$ – множители Лагранжа.

Так как $\sum \Delta_i = S > 0$, то существуют $\Delta_i > 0$, для которых $\alpha_i \gamma_j u_j'(x_j) = \beta$, при этом для $\Delta_j > 0$ будет выполнено неравенство $\alpha_i \gamma_j u_j'(x_j) < \beta$.

Рассматриваемые нами функции полезности выпуклые, а для таких функций условие Лагранжа является необходимым и достаточным для существования седловой точки. При этом седловая точка – достаточное условие для существования экстремума.

2. Покажем, что показатель Роулса, рассчитанный на основании пункта 1 теоремы 2, нельзя улучшить. Пусть группы упорядочены по их полезности дохода в точке начального распределения $k_1 u_1(x_1) \le k_2 u_2(x_2) \le \ldots \le k_n u_n(x_n)$. Имеется набор $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$, такой, что

$$k_1 u_1(x_1 + \Delta_1) = \ldots = k_m u_m(x_m + \Delta_m) \le k_{m+1} u_{m+1}(x_{m+1}) \le \ldots \le k_n u_n(x_n),$$

т.е. $\Delta_i > 0$ при $i \in 1, \ldots, m,\ \ \Delta_i = 0\ \ \ j \in m+1, \ldots, n; \sum \Delta_i = S.$

Пусть данное распределение не оптимально и существует другое, при котором значение показателя общественного благосостояния больше. В данном случае для улучшения показателя общего блага надо увеличить значения $k_i u_i(x_i + \Delta_i)$, $i = 1, \ldots, m$, но сумма S уже потрачена. Повысить значение полезности одной из групп невозможно, не уменьшив полезность в другой. Это означает, что показатель благосостояния U нельзя улучшить. ■

Процедура нахождения оптимального решения для критерия общественного благосостояния Роулса. Будем рассматривать упорядоченные группы:

$$z = \gamma_1 u_1(x_1) \le \gamma_2 u_2(x_2) \le \ldots \le \gamma_n u_n(x_n).$$

Для максимизации критерия Роулса следует, что при возможности добавить некую малую сумму $\alpha > 0$ эту сумму следует передавать первой группе. Тогда полезность этой группы вырастет:

$$z < z_\alpha = \gamma_1 u_1(x_1 + \alpha) \le \gamma_2 u_2(x_2) \le \ldots \le \gamma_n u_n(x_n).$$

Будем добавлять субсидию в первую группу до тех пор, пока полезность этой группы не сравняется с полезностью второй группы: $\gamma_1 u_1(x_1 + \Delta_1) \le \gamma_2 u_2(x_2)$, откуда

$$\Delta_1 = u^{-1}(\gamma_2 u_2(x_2)/\gamma_1) - x_1, \quad z = \gamma_1 u_1(x_1 + \Delta_1) = \gamma_2 u_2(x_2) \le \ldots \le \gamma_n u_n(x_n).$$

Далее будем добавлять одинаковую сумму субсидии в первую и вторую группы одновременно до тех пор, пока их полезность не совпадет с уровнем полезности третьей группы, и т.д. Продолжаем этот алгоритм до тех пор, пока не будет распределена вся сумма S. В итоге получим:

$$\gamma_1 u_1(x_1 + \Delta_1) = \gamma_2 u_2(x_2 + \Delta_2) = \ldots = \gamma_m u_m(x_m + \Delta_m) \le \gamma_{m+1} u_{m+1}(x_{2m+1}) \le \ldots \le \gamma_n u_n(x_n).$$

Если на последнем этапе нет возможности добавить всем m группам такую сумму, чтобы их полезность достигла уровня m+1 группы, но сумма S не исчерпана полностью, то необходимо этот остаток распределить между всеми m группами, чтобы их полезность осталась равной.

Примеры распределения субсидии согласно описанным критериям. Этот пример основан на данных по распределению среднедушевого дохода в Российской Федерации за 2008 г. (Федеральная служба государственной статистики, 2009). Расчет алгоритмов производился в программе Mathcad и приложении MS Excel (табл. 1).

Таблица 1. Исходные данные

Доход, руб.		Доля людей, %	Средний доход, руб.
До 2000.00		1.5	1000
2000.01	4000.00	8.3	3000
4000.01	6000.00	12.0	5000
6000.01	8000.00	12.1	7000
8000.01	10 000.00	10.9	9000
10 000.01	15 000.00	20.1	12 500
15 000.01	25 000.00	20.0	20 000
12 000.01 и более		15.1	40 000

Для нашей задачи будем считать, что общее число населения составляет 145 млн человек. Положим, что сумма, направленная на увеличение благосостояния, составляет 2% всех доходов общества и равна 49.2 млрд руб. Рассмотрим применение описанных методик для трех примеров.

Пример 1. Утилитаристский критерий. Считаем, что все люди равноценны для общества. Математически это означает, что $k_i = k_j = 1$. Функции полезностей определяются как $\ln(x)$. Рассчитаем утилитаристский критерий общественного благосостояния и полезность единицы дохода для каждой из групп (табл. 2). Предельная полезность единицы дохода убывает от группы 1 до группы 8.

Таблица 2. Расчет утилитаристского критерия благосостояния

Группы	Средний доход, руб.	Доля людей, %	Утилитаристский критерий благосостояния	Предельная полезность единицы дохода (рис. 1)
1	1000	1.5	0.015024368	0.001000000
2	3000	8.3	0.096356634	0.000333333
3	5000	12.0	0.148199162	0.000200000
4	7000	12.1	0.15533756	0.000142857
5	9000	10.9	0.143904207	0.000111111
6	12 500	20.1	0.274938889	0.000080000
7	20 000	20.0	0.287201139	0.000050000
8	40 000	15.1	0.232013317	0.000025000
		100	**1.352975275**	

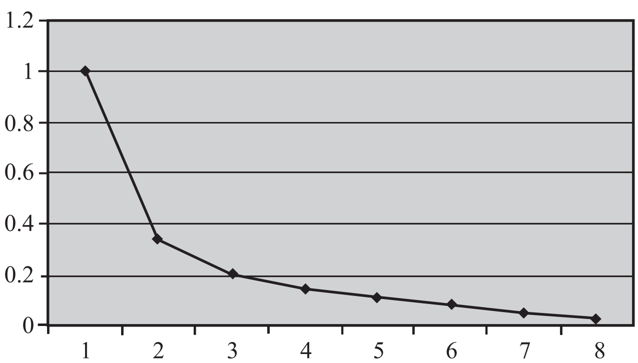

Рис. 1. Предельная полезность дохода, утилитаристский критерий, до распределения субсидии

Распределим субсидию, согласно теореме 1 выравнивая предельные полезности. На первом шаге сравниваем доход в группах с первой по третью. Остаток распределяем между первыми тремя группами таким образом, чтобы их предельная полезность оставалась равной. Округление сумм будем проводить до 0.01. Итоговое распределение выглядит следующим образом (табл. 3).

После распределения субсидии в 2% суммы всех доходов утилитаристский критерий благосостояния вырос на 0.87% и составляет 1.3648324.

Таблица 3. Итоговое распределение доходов, утилитаристский критерий, группы с одинаковой функцией полезности

Доля людей, %	Доход, руб.	Значения предельной полезности (рис. 2)
20.2	5361.88	0.000186502
1.6	5361.89	0.000186501
12.1	7000	0.000142857
10.9	9000	0.000111111
20.1	12 500	0.000080000
20.0	20 000	0.000050000
15.1	40 000	0.000025000

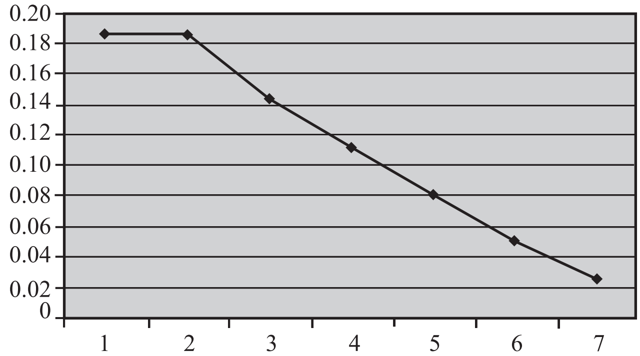

Рис. 2. Предельная полезность дохода, утилитаристский критерий, после распределения субсидии

Полученное оптимальное распределение субсидии показано на рис. 3.

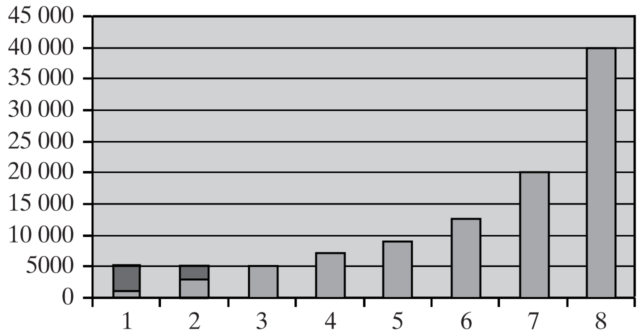

Рис. 3. Изменение доходных групп после распределения субсидии согласно утилитаристскому критерию

Пример 2. Критерий Роулса. Будем рассматривать одинаковых людей и распределение по среднедушевым доходам из примера 1. Функция полезности дохода – $\ln(x)$. Согласно критерию Роулса показатель благосостояния равен 6.9077553 (табл. 4).

Таблица 4. Начальное распределение доходов в группах, критерий Роулса

Доход, руб.		Доля людей, %	Средний доход, руб.	Значение функций полезности в группе до распределения субсидии (рис. 4)
До 2000.00		1.5	1000	6.9077553
2000.01	4000.00	8.3	3000	8.0063676
4000.01	6000.00	12.1	5000	8.5171932
6000.01	8000.00	12.0	7000	8.8536654
8000.01	10 000.00	10.9	9000	9.1049799
10 000.01	15 000.00	20.1	12 500	9.4334839
15 000.01	25 000.00	20.0	20 000	9.9034876
25 000.01 и более		15.1	40 000	10.596635
		100		**6.9077553**

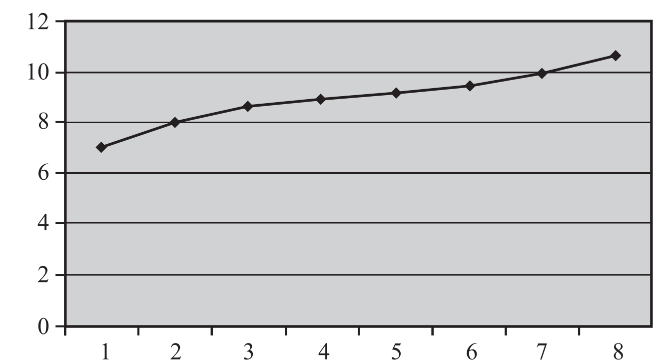

Рис. 4. Показатель общественного благосостояния в группах до распределения субсидии, согласно критерию Роулса

Отметим, что оптимальное распределение субсидии между группами по критерию Роулса аналогично результату, полученному в примере 1 (табл. 5).

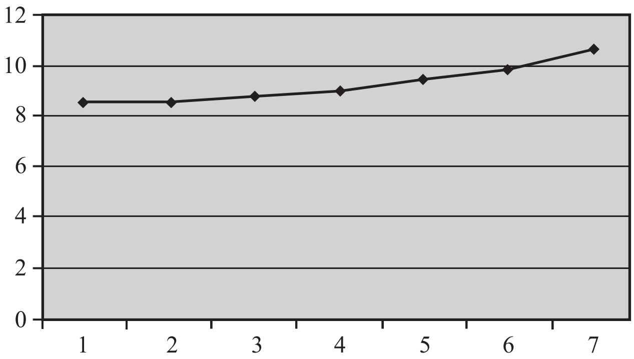

Рис. 5. Показатель общественного благосостояния в группах после распределения субсидии, согласно критерию Роулса

Таблица 5. Итоговое распределение доходов, критерий Роулса, группы с одинаковой функцией полезности

Доля людей, %	Доход, руб.	Значение функций полезности после распределения субсидии (рис. 5)
20.2	5361.88	8.587069939
1.6	5361.89	8.587071804
12.1	7000	8.853665428
10.9	9000	9.104979856
20.1	12 500	9.433483923
20.0	20 000	9.903487553
15.1	40 000	10.59663473

Отличаются только сами показатели общественного благосостояния. Одинаковый результат в первом и втором примерах связан с тем, что рассматриваются люди с одинаковыми функциями полезности от дохода.

Замечание. Оптимальное распределение субсидии согласно утилитаристскому критерию с одинаковыми людьми будет совпадать с оптимальным распределением субсидии согласно критерию Роулса. Это следует из того, что ввиду отсутствия в критериях коэффициентов приведения (коэффициентов социальной значимости) упорядочение групп будет происходить одинаковым образом. Группы будут упорядочены по своему доходу. А далее принцип распределения субсидии совпадает для обоих случаев: увеличиваем доход самого бедного до следующего по уровню доходов и т.д., пока не закончатся средства.

Таблица 6. Расчет утилитаристского критерия общественного благосостояния для групп с различными функциями полезности и коэффициентами социальной значимости

Доход, руб.		Доля людей, %	Средний доход, руб.	Вид функции полезности от дохода	Коэффициенты приведения функций полезности	Значение предельной полезности (рис. 6)	Значение функции полезности
До 2000.0		1.5	1000	$\ln(x)$	1.000	0.00100000	0.103616329
2000.01	4000.00	8.3	3000	$x^{0.4}$	0.099	0.00032316	0.201166801
4000.01	6000.00	12.1	5000	$\ln(x)$	1.407	0.00028150	1.438551941
6000.01	8000.00	12.0	7000	$x^{0.4}$	0.069	0.00013573	0.287413416
8000.01	10 000.00	10.9	9000	$\ln(x)$	1.176	0.00013068	1.167226282
10 000.01	15 000.00	20.1	12 500	$x^{0.4}$	0.054	0.00007581	0.47615941
15 000.01	25 000.00	20.0	20 000	$\ln(x)$	0.090	0.00000452	0.179215891
Более 25 000.00		15.1	40 000	$x^{0.4}$	0.005	0.00000668	0.056817314
		100					**3.910167384**

Теперь рассмотрим доходные группы с различными функциями полезности и тем же начальным распределением доходов.

Пример 3. С различными функциями полезности. Пусть функции полезности дохода различны для каждой из групп. Рассмотрим этот пример для утилитаристского и роулсеанского критериев общественного благосостояния.

3.1. Утилитаристский критерий

В столбце 6 (табл. 6) приведены расчетные коэффициенты приведения функций полезности. Данные коэффициенты рассчитывались экспертно, согласно (2). Решением данной задачи будет распределение субсидии между первыми тремя группами (табл. 7).

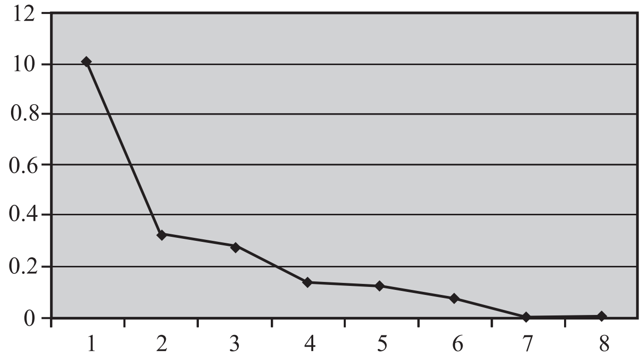

Рис. 6. Предельная полезность дохода в группах с различными функциями полезности, утилитаристский критерий, до распределения субсидии

Таблица 7. Итоговое распределение субсидии, утилитаристский критерий, различные функции полезности

Доля людей, %	Средний доход, руб.	Предельная полезность (рис. 7)	Утилитаристский критерий благосостояния
1.5	4149.64	0.00024098	0.1249616
8.3	4892.01	0.00024099	0.2446262
12.0	5838.40	0.00024108	1.4647347
12.1	7000.00	0.00013573	0.2874134
10.9	9000.00	0.00013068	1.1672263
20.1	12 500.00	0.00007581	0.4761594
20.0	20 000.00	0.00000452	0.1792159
15.1	40 000.00	0.00000376	0.0568173
100			**4.0011548**

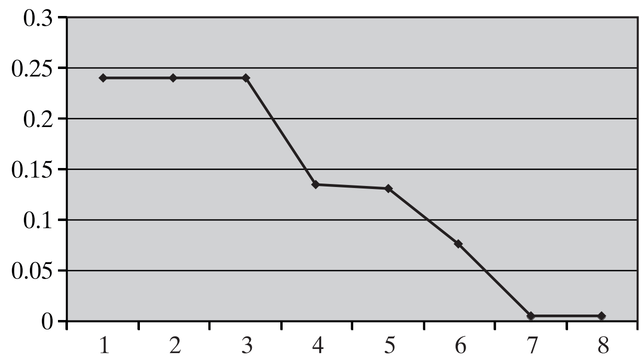

Рис. 7. Предельная полезность дохода в группах с различными функциями полезности, утилитаристский критерий, после распределения субсидии

Изменение доходных групп показано на рис. 8. В некоторых случаях доходы в одной из групп после распределения субсидии могут превышать доходы в соседней группе. Такой вариант распределения субсидий в обществе может привести к социальной напряженности. В нашем случае независимость от труда скрывает этот недостаток. Примером пояснения данной ситуации могут являться две группы пенсионеров, одни из которых живут в городе, а другие – в деревне. Первые вынуждены тратить больше средств на квартплату, отопление, проезд, продукты и пр. Вторая группа пенсионеров может частично возмещать свои расходы за счет ведения подсобного хозяйства.

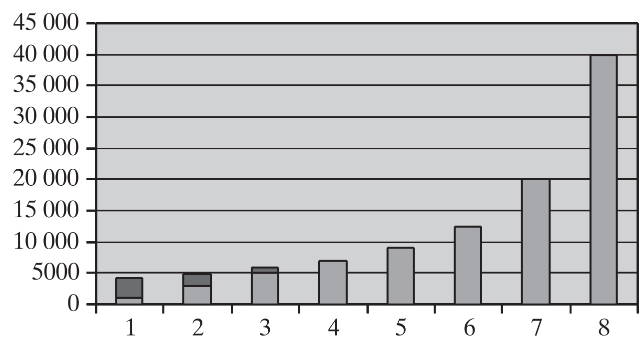

Рис. 8. Изменение доходных групп с различными функциями полезности после распределения субсидии, утилитаристский критерий

3.2. Роулсеанский критерий. Начинаем добавлять субсидию в первую группу (табл. 8) до тех пор, пока функция полезности дохода не станет равной второй группе. Продолжаем решать

Таблица 8. Начальное распределение субсидии, критерий Роулса, различные функции полезности

Доход, руб.		Доля людей, %	Средний доход, руб.	Вид функции полезности	Коэффициенты приведения функций полезности	Общественное благосостояние, критерий Роулса (рис. 9)
До 2000.00		1.5	1000	ln x	1.05	7.253143
2000.01	4000.00	8.3	3000	$x^{1/2}$	0.14	7.668116
4000.01	6000.00	12.0	5000	ln x	1.06	9.028225
6000.01	8000.00	12.1	7000	$x^{1/2}$	0.13	10.87658
8000.01	10 000.00	10.9	9000	ln x	1.2	10.92598
10 000.01	15 000.00	20.1	12 500	$x^{1/2}$	0.11	12.29837
15 000.01	25 000.00	20.0	20 000	ln x	1.5	14.85523
25 000.01 и более		15.1	40 000	$x^{1/2}$	0.1	20
		100				**7.253143**

задачу, распределяя субсидию между первой и второй группами до тех пор, пока функция благосостояния от доходов в этих группах не станет равной функции полезности в третьей группе, и т.д. Общее решение задачи сводится к распределению субсидий, показанному в табл. 9. В данном случае критерий общественного благосостояния Роулса увеличился на 26.99%.

Изменение доходных групп показано на рис. 11.

Заключение. В работе исследуются различные варианты распределения субсидий между некоторыми группами. Нахождение оптимального распределения основывается

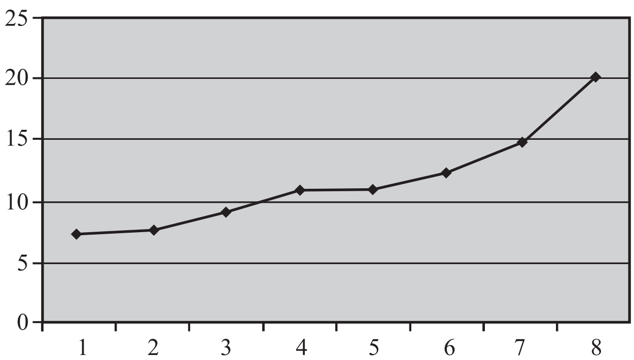

Рис. 9. Критерий общественного благосостояния Роулса для групп с различными функциями полезности до распределения субсидии

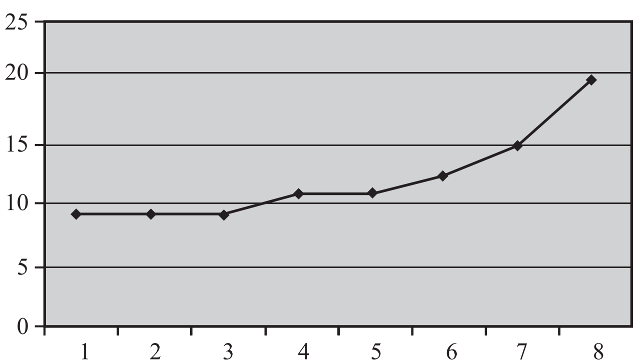

Рис. 10. Критерий общественного благосостояния Роулса для групп с различными функциями полезности после распределения субсидии

Таблица 9. Итоговое распределение субсидии, критерий Роулса, различные функции полезности

Доля людей, %	Средний доход, руб.	Итоговый доход в группе, руб.	Общественное благосостояние, критерий Роулса, после распределения (рис. 10)
1.5	1000	6453	9.210872
8.3	3000	4329	9.210872
12	5000	5940	9.210872
12.1	7000	7000	10.87658
10.9	9000	9000	10.92598
20.1	12 500	12 500	12.29837
20	20 000	20 000	14.85523
15.1	40 000	40 000	20
			9.210872

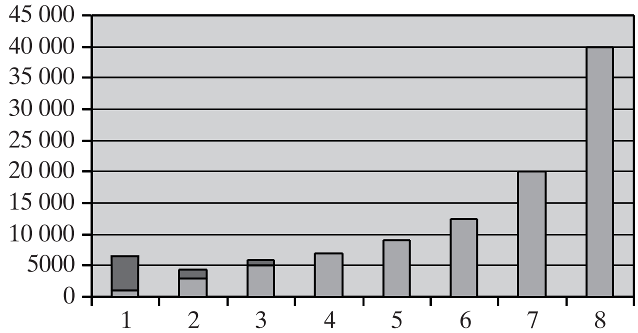

Рис. 11. Изменение доходных групп с различными функциями полезности после распределения субсидии, критерий Роулса

на выборе критерия общественного благосостояния. Нами были рассмотрены утилитаристский и роулсеанский критерии для одинаковых и различных функций полезности доходных групп. Также было показано, что использование в расчетах различных функций полезности и показателей благосостояния дает, строго говоря, совершенно разные результаты. Кроме того, показано, что при распределении субсидии необходимо учитывать экспертное мнение в определении коэффициентов социальной значимости групп. Что, разумеется, исключает сугубо математический подход при распределении благ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Гаврилец Ю.Н. (1983): Целевые функции социально-экономического планирования. М.: Экономика.

Кара-Мурза С.Г. (2005): Потерянный разум. М.: Эксмо.

Федеральная служба государственной статистики (2009): Россия в цифрах. М.: Статистика России.

Поступила в редакцию
18.12.2008 г.

Method of Distribution of the Organic Growth between Different Groups according to their Utility Function

Yu.V. Korotkova

The author has investigated the distribution of limited goods in the context of the welfare maximization which is based on the utilities functions in the groups. The methods of the specified serviceable life distribution are based on the Rawl’s and utilitarian’s criteria of the public welfare. These techniques can be applied for allocation of subsidies between the groups with fixed initial income.

Key words: distribution, limited goods, utilities functions, common welfare, group, subsidy, fixed income.