ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1967 том III, вып. 1

# ПРОБЛЕМА ОПТИМИЗАЦИИ КАЧЕСТВА ПРОДУКЦИИ

Н. Г. БУХАРИНОВ, А. Н. ШИШОВ

*(Ленинград)*

Коммунистическая партия и Советское правительство придают в настоящее время первостепенное значение решению проблемы определения оптимального качества продукции как одной из важнейших народнохозяйственных задач.

Однако данная проблема еще мало изучена. В частности, до сих пор нет такой работы, которая систематически излагала бы весь сложный комплекс вопросов, связанных с установлением экономических границ изменения качества продукции.

Обычно в экономико-математических моделях промышленная продукция рассматривается как комплекс неизменных потребительских свойств. Эти ее неизменные свойства отражены в постоянных коэффициентах, входящих в балансовые уравнения, или в неравенства ограничительных условий, или в коэффициенты целевой функции, а ведь в большинстве случаев свойства промышленной продукции могут варьировать в довольно широких пределах. При этом вариации в потребительских свойствах продукции сильно отражаются на технико-экономических показателях ее производства и потребления, так как лучшее качество требует бóльших затрат. Следовательно, необходим метод, позволяющий устанавливать оптимальное качество промышленной продукции. Разумеется, повышение качества продукции нельзя рассматривать как самоцель. Исходным методологическим принципом для решения вопросов, связанных с качеством продукции, следует считать принцип оптимальности ведения социалистического хозяйства в целом, сформулированный в Программе КПСС.

Если задачей техники и технологии производства является создание таких технологических процессов, которые бы повышали качество промышленной продукции, то задача экономической науки и практики состоит в выявлении из всех технологических процессов такого, который обеспечивал бы получение продукции оптимального качества. При этом признаком оптимальности качества должно служить такое сочетание потребительских свойств, которое дает максимум народнохозяйственного эффекта с учетом всех затрат, связанных с производством данной продукции.

Обратимся теперь к разработке способа нахождения оптимального качества продукции, используя для этой цели наиболее точный инструмент — метод экономико-математического моделирования.

Построим модель распределения продукции. Для этого введем следующие обозначения и допущения:

$x_{ij}$ — объем производства данной продукции $i$-м производителем, направляемой $j$-му потребителю;

$\Lambda_i = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_T)$ — вектор численных значений качественных характеристик продукции $i$-го производителя. Естественно выделять такие качественные ее характеристики, которые имеют существенное значение в процессе промышленного потребления. Например, характеристики упругости и твердости для конструктивных металлов или зольность и влажность для энергетических углей и т. д.;

$C_i^1(\Lambda_i)$ — затраты на производство единицы рассматриваемой продукции как функция ее качественных характеристик (т. е. от $\Lambda_i$);

$f_i(\Lambda_i)$ — коэффициенты, характеризующие «расход» ограниченных ресурсов у $i$-го производителя на единицу производимой продукции (в зависимости от значений $\Lambda_i$). При этом в конкретных задачах ограниченными ресурсами могут быть как основные фонды, так и отдельные виды оборудования, а также природные ресурсы, рабочая сила и т. д.;

$C_{ij}^2(\Lambda_i)$ — затраты на промышленное использование единицы продукции $j$-м потребителем (в зависимости от значений $\Lambda_i$);

$\varphi_{ij}(\Lambda_i)$ — удельный «выход» конечной продукции у $j$-го потребителя промежуточной продукции с параметрами качественного состояния $\Lambda_i$; следует добавить, что каждый $j$-й потребитель данной продукции является одновременно и производителем конечной продукции;

$P_j$ — плановое задание на производство конечной продукции $j$-м предприятием;

$M_i$ — объем ограничивающего фактора у $i$-го производителя.

Параметры, характеризующие качественное состояние рассматриваемой продукции на $i$-м предприятии, могут изменяться в определенных пределах, т. е. $\bar{\lambda}_{it} \leqslant \lambda_{it} \leqslant \bar{\bar{\lambda}}_{it}$, причем можно выбрать такое направление изменений параметров $\lambda_{it}$, чтобы оно совпадало с повышением качества продукции.

Задачу определения рациональных производственных связей и одновременно установления оптимизации качеств рассматриваемой продукции можно представить в виде следующего выражения: найти

$$\min\{L(x,\lambda)\} = \min\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} C_i^1(\Lambda_i^1)x_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} C_{ij}^2(\Lambda_i)x_{ij}\right\} =$$

$$= \min\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[C_i^1(\Lambda_i)x_{ij} + C_{ij}^2(\Lambda_i)]x_{ij}\right\}, \quad (1)$$

при условиях:

$$x_{ij} \geqslant 0; \quad \sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}(\Lambda_i)x_{ij} \geqslant P_j;$$

$$f_i(\Lambda_i)\cdot\sum_{j=1}^{m}x_{ij} \leqslant M_i; \quad \bar{\lambda}_{it} \leqslant \lambda_{it} \leqslant \bar{\bar{\lambda}}_{it}. \quad (2)$$

для каждого $i$ и $t = 1, \ldots, T$.

Указанная задача может рассматриваться как нелинейная экстремальная задача, даже если функции: $C_i^1(\Lambda_i)$, $C_{ij}^2(\Lambda_i)$, $f_i(\Lambda_i)$ и $\varphi_{ij}(\Lambda_i)$ являются линейными.

При $x_{ij}$ и $\lambda_{it}$ — равноправных независимых переменных целевая функция (1) и ограничения (2) будут содержать произведения искомых переменных $x_{ij}$ и $\lambda_{it}$.

Если рассматривается задача для перспективного планирования, то следует учитывать и необходимые капиталовложения с применением общеизвестной формулы приведенных затрат: $C + EK$. Тогда для задачи перспективного планирования функционал (1) и ограничивающие условия (2) надо написать так:

$$L(x, \lambda) = \sum_{i,j} [C_{ij}(\Lambda_i) + E \cdot K_{ij}(\Lambda_i)] \cdot x_{ij};$$

$$C_{ij}(\Lambda_i) = C_i^1(\Lambda_i) + C_{ij}^2(\Lambda_i); \quad K_{ij}(\Lambda_i) = K_i^1(\Lambda_i) + K_{ij}^2(\Lambda_i),$$

где $K_i^1(\Lambda_i)$ — удельные капиталовложения на производство единицы данной продукции (в зависимости от $\Lambda_i$); $K_{ij}^2(\Lambda_i)$ — удельные капиталовложения на переработку продукции и выпуск конечной продукции (в зависимости от $\Lambda_i$). Условие $f_i(\Lambda_i) \cdot \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leqslant M_i$ снимается в задаче перспективного планирования, если это условие относится к воспроизводимым ресурсам. Но если ограничивающими производство являются невоспроизводимые ресурсы, то указанное условие остается в силе.

Что же касается условия: $\sum_{i=1}^{n} \varphi_{ij}(\Lambda_i) \cdot x_{ij} \geqslant P_j$, $\quad \bar{\lambda}_{it} \leqslant \lambda_{it} \leqslant \bar{\bar{\lambda}}_{it}$, то оно остается с той лишь оговоркой, что пределы возможных изменений $\bar{\lambda}_{it}$ и $\bar{\bar{\lambda}}_{it}$ в задачах перспективного планирования, как правило, значительно расширяются.

Функции $C_{ij}(\Lambda_i)$, $f_i(\Lambda_i)$ и $\varphi_{ij}(\Lambda_i)$ имеют ряд общих свойств для продукции различных отраслей народного хозяйства. Функция затрат на производство и промышленное использование единицы рассматриваемой продукции $C_{ij}(\Lambda_i) = C_i^1(\Lambda_i) + C_{ij}^2(\Lambda_i)$ является выпуклой вниз функцией. При этом $C_i^1(\Lambda_i)$ — затраты на производство — растут по закону, близкому к гиперболическому при росте $\Lambda_i$ — качественных характеристик; $C_{ij}^2(\Lambda_i)$ — затраты на промышленное использование рассматриваемой промежуточной продукции — обычно падают с ростом значений $\lambda_{it}$; $f_i(\Lambda_i)$ — выпуклая вниз функция, отражающая нелинейный рост «потребления» ограничивающего ресурса; $\varphi_{ij}(\Lambda_i)$ — выпуклая вверх или линейная функция, отражающая рост «выхода» конечной продукции из единицы данной продукции.

При указанных свойствах, входящих в задачу функций, применение известных методов решения задач нелинейного программирования является неэффективным. В самом деле, градиентные методы решения нелинейных экстремальных задач и их различные вариации отличаются большой трудоемкостью и медленной сходимостью. Кроме того, в силу специфики отмеченной задачи нельзя в общем случае гарантировать единственности оптимальной точки. Поэтому для ряда частных случаев нами разработан специальный приближенный метод решения. Приведем его для случая, когда ограничения (2) могут быть заменены постоянными величинами. Обратимся сначала к отвлеченным задачам и на основе их решения покажем предлагаемый нами метод.

**Задача 1.** 1. Найти

$$\min\left\{L(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} C_{ij}(\Lambda_i) x_{ij}\right\}, \tag{3}$$

при условиях:

$$x_{ij} \geqslant 0; \quad i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leqslant M_i; \quad \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ij} x_{ij} \geqslant P_j; \quad \varphi_{ij} = \text{const};$$

$$\overline{\lambda}_{it} \leqslant \lambda_{it} \leqslant \overline{\overline{\lambda}}_{it}; \quad t = 1, \ldots, T.$$

Вместо задачи 1 можно рассмотреть более общую задачу 2.

**Задача 2.** Найти

$$\min\left\{L(x, \lambda) = \sum_{s=1}^{S} C_s(\Lambda) \cdot x_s\right\}, \tag{4}$$

при

$$x_s \geqslant 0; \quad A \cdot X = B; \quad A = \{a_{rs}\}; \quad \Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_T); \quad \lambda \in D, \tag{5}$$

где $D$ — выпуклая замкнутая область в $R_T$; $C_s(\Lambda)$ — выпуклые вниз функции. В качестве некоторого ориентировочного значения $\Lambda^1$, с которого начнем решение, можно взять данные практики. Подставляя $\Lambda^1$ в функционал (4), получим задачу линейного программирования: найти

$$\min\left\{L(x, \lambda^1) = \sum_{s=1}^{S} C_s(\Lambda^1) \cdot x_s\right\},$$

при условиях (5). Решение этой задачи линейного программирования обозначим через $x_s^1$ *.

Затем будем решать нелинейную задачу: найти

$$\min\left\{\sum_{s \in B_1} C_s(\Lambda) \cdot x_s^1\right\}$$

при условиях: $\Lambda \in D$, где $D$ — выпуклая, замкнутая область; $B_1$ — множество индексов $s$, для которых $x_s^1 > 0$; $C_s(\Lambda)$ — выпуклые функции.

Легко показать, что линейная комбинация выпуклых функций с положительными коэффициентами является выпуклой. Таким образом, имеет место задача минимизации выпуклой функции на замкнутом выпуклом множестве допустимых значений переменных $\lambda$. Для решения этой задачи успешно могут быть применены градиентные методы нелинейного программирования. Следует иметь в виду, что для многих практических задач оптимальная точка лежит внутри области $D$. В этих случаях задача значительно облегчается, так как оптимальные значения $\lambda$ могут быть найдены как корни уравнений:

$$\frac{\partial \cdot \sum_{s} C_s(\Lambda) \cdot x_s^1}{\partial \lambda_t} = 0, \quad t = 1, \ldots, T.$$

Обозначим найденные значения $\Lambda^2$. Вновь решаем задачу линейного программирования: найти

$$\min\left\{L(x, \lambda^2) = \sum_{s=1} C_s(\Lambda^2) x_s\right\}$$

при условиях (5).

---

* Здесь и в дальнейшем предполагается, что решение линейной задачи существует при любых значениях $\lambda$. Получение неограниченного значения функционала при каких-либо значениях $\lambda$ свидетельствовало бы о некорректной постановке задачи.

Оптимальное значение $x_s$ обозначим $x_s^2$. Затем аналогично изложенному методу нахождения $\Lambda^2$ находим $\Lambda^3$, но уже при $x_s = x_s^2$ и т. д.

Очевидно, что если на каком-либо шаге расчетов $l$ получим, что $\Lambda^l = \Lambda^{l+1}$, то и $x_s^l = x_s^{l+1}$, все дальнейшие значения $\Lambda$ и $x_s$ будут равны $\Lambda^l$ и $x_s^l$. Будем называть полученную точку $\Lambda^l$ и $x_s^l$ окончательным решением или просто решением задачи 2. Покажем, что решение задачи 2 достигается за конечное число шагов согласно изложенному методу расчета. Прежде всего отметим, что область задания переменных $x_s$ и $\Lambda$, определяемая условиями (5), замкнута и выпукла при слабых условиях, налагаемых на матрицу $A$, которые практически всегда выполняются. Для дальнейшего достаточно, чтобы значение функционала (4) было ограничено снизу.

Покажем, что значения функционала (4) монотонно убывают при переходе от одного этапа к последующему. Действительно, $L(X^{l-1}, \Lambda^l) \geqslant \geqslant L(X^l, \Lambda^l)$ в силу того, что $X^l$ доставляет минимум функционалу $L(X, \Lambda^l)$ при условиях (5) и, дополнительно, $X^{l-1}$ является допустимым базисным решением задачи линейного программирования с целевой функцией $L(X, \Lambda^l)$. Далее, $L(X^l, \Lambda^l) \geqslant L(X^l, \Lambda^{l+1})$ в силу способа отыскания $\Lambda^{l+1}$ как того значения $\Lambda$, которое доставляет минимальное значение функции $L(X^l, \Lambda)$ на всей области допустимых значений $\Lambda$.

Суммируя, получаем $L(X^{l-1}, \Lambda^l) \geqslant L(X^l, \Lambda^l) \geqslant L(X^l, \Lambda^{l+1})$. Конечность числа шагов, необходимых для получения решения задачи 2, следует из того, что для двух последовательных шагов $l$ и $l+1$ переменные $X$ и $\Lambda$ различаются только в том случае, если отличны соответствующие базисы $B_l$ и $B_{l+1}$. Количество же различных базисов $B$ в задаче 2 является конечным.

Остановимся подробнее на одном важном приложении построенной модели, а именно на ее приложении к вопросу об оптимальной удельной величине полезного вещества в производимой продукции. Сюда относятся, в частности, вопросы, связанные с обогащением углей, концентрацией полезных веществ в минеральных удобрениях и т. п.

Для всех отмеченных задач характерно, что приближенно каждая единица производимой продукции делится, во-первых, на полезное вещество (например, органическая масса в углях, соответствующее химически чистое минеральное удобрение и пр.) и, во-вторых, на балласт. Этот балласт в большинстве случаев играет отрицательную роль, значительно увеличивая удельные затраты на промышленное использование произведенной продукции. Полезные же свойства единицы продукции растут с повышением удельной величины полезного вещества в единице производимой продукции. Поэтому за характеристику качественного состояния можно выбрать один параметр, а именно величину удельного содержания полезного вещества.

Рассмотрим в качестве конкретного примера задачу нахождения оптимальной степени обогащения энергетических углей. Известно, что их обогащение служит исключительно цели повышения качества добываемых рядовых углей. Поэтому вопрос об оптимальной степени их обогащения является ярким примером проблемы оптимизации качественного состояния промышленной продукции. Построим экономико-математическую модель добычи, обогащения, перевозки и сжигания энергетических углей, которая является видоизменением общей модели (1) применительно к рассматриваемому случаю.

Введем необходимые соответствующие обозначения:

$x_{ij}$ — объем добычи рядового угля на $i$-м месторождении, предназначенный на поставку $j$-му потребителю (производителю тепла); $C_i^{д}$ — затраты на добычу 1 *т* рядового угля на $i$-м месторождении; $\lambda_i$ — содержание органической массы в концентрате при обогащении на $i$-й обогатительной фабрике; $C_i^0(\lambda_i)$ — затраты на обогащение 1 $т$ рядового угля на $i$-й обогатительной фабрике в зависимости от удельного содержания органической массы в обогащенном концентрате; $\gamma_i(\lambda_i)$ — выход концентрата на $i$-й обогатительной фабрике из 1 $т$ рядового угля; $C_{ij}^{т}$ — затраты на перевозку 1 $т$ угля от места добычи (и обогащения) $i$ до $j$-го потребителя; $\eta_{ij}(\lambda_i)$ — количество тепла, полезно произведенного у $j$-го потребителя при сжигании 1 $т$ концентрата, полученного с $i$-го месторождения; $C_{ij}^{сж}(\lambda_i)$ — затраты на сжигание у $j$-го потребителя 1 $т$ концентрата, полученного с $i$-го месторождения.

Суммарные затраты на добычу, обогащение, перевозку и сжигание угля, полученного всеми потребителями со всех месторождений, можно представить следующим выражением:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[C_i^{д}+C_i^0(\lambda_i)]\,x_{ij}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[C_{ij}^{т}+C_{ij}^{сж}(\lambda_i)]\cdot\gamma_i(\lambda_i)\cdot x_{ij}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[C_i^1(\lambda_i)+C_{ij}^2(\lambda_i)]\cdot x_{ij}=\sum_{i,\,j}C_{ij}(\lambda_i)\,x_{ij}. \tag{6}$$

Согласно обозначениям общей модели (1), $C_i^1(\lambda_i)$ представляет собой затраты на производство, $C_{ij}^2(\lambda_i)$ — затраты на промышленное потребление (в данном случае на сжигание) угля.

Если рассматривается задача перспективного планирования, то необходимо учитывать и капиталовложения, которые существенно зависят от качества концентрата: $K_i^{д}$ — удельные капиталовложения на добычу угля на $i$-м месторождении; $K_i^0(\lambda_i)$ — удельные капиталовложения в обогатительную фабрику на $i$-м месторождении в зависимости от качества обогащенного концентрата; $K_j^{сж}$ — удельные капиталовложения в энергетические установки по сжиганию угля у $j$-го потребителя.

Используя общую формулу приведенных затрат $C+EK$ применительно к добыче, обогащению, транспортировке и сжиганию угля, получим:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[C_{ij}(\lambda_i)+E\,(K_i^{д}+K_i^0(\lambda_i)+\gamma_i(\lambda_i)\cdot K_j^{сж})]\cdot x_{ij}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[C_{ij}(\lambda_i)+E\cdot K_{ij}(\lambda_i)]\cdot x_{ij}=\sum_{i,\,j}A_{ij}(\lambda_i)\cdot x_{ij}, \tag{7}$$

где

$$A_{ij}(\lambda_i)=C_{ij}(\lambda_i)+E\cdot K_{ij}(\lambda_i);$$

при этом необходимо выполнение условий:

$$x_{ij}\geqslant 0;\quad \bar{\lambda}_i\leqslant\lambda_i\leqslant\bar{\bar{\lambda}}_i;$$

$$\sum_{i=1}^{n}\eta_{ij}(\lambda_i)\cdot\gamma_i(\lambda_i)\cdot x_{ij}=Q_j;\qquad j=1,\ldots,m. \tag{8}$$

Последние уравнения в (8) представляют собой энергетические балансы для каждого производителя тепла.

Остановимся теперь на некоторых зависимостях, отраженных в модели добычи, обогащения и использования энергетических углей. Дело в том, что установление указанных зависимостей на основании фактических данных требует применения специфических аналитических зависимостей, общих (с небольшими вариациями) для ряда задач по нахождению оптимального содержания полезного вещества.

Прежде всего исследуем важную зависимость размера затрат от степени обогащения энергетических углей. Как и ранее, степень обогащения угля будем характеризовать повышением в нем содержания органической массы. Естественно предполагать, что затраты растут с повышением удельного веса органической массы в угле. Иными словами, затраты растут по мере снижения в угле процента балласта. Но при этом существенно качество угля, поступающего на обогатительную фабрику. Важным обстоятельством является степень забалластированности исходного рядового угля. Изучение отчетных материалов обогатительных фабрик, а также и проектные данные показывают, что при прочих равных условиях затраты на снижение зольности * угля путем обогащения растут обратно пропорционально зольности рядового угля. Это значит, что, чем выше зольность рядового угля, тем ниже затраты на 1% снижения зольности при обогащении. Следовательно, затраты на снижение зольности при обогащении зависят от двух факторов: от качества рядового угля, поступающего на обогатительную фабрику, и качества концентрата, отгружаемого потребителям обогатительными фабриками. Учитывая сказанное, для установления зависимости между зольностью угля и затратами на ее снижение необходимо следующее соотношение: $\Delta C^0 / \Delta z = f(z)$, т. е. отношение приращения затрат к приращению зольности является функцией от зольности угля. Это же уравнение в дифференциальной форме: $dC^0 / dz = f(z)$. Тогда затраты на обогащение, при котором зольность понижается с удельного содержания $z^0$ до содержания $z^1$, могут быть представлены так:

$$C^0(z^1, z^0) = \int_{z^0}^{z^1} f(z)\,dz = F(z^1) - F(z^0),$$

где $dF(z) / dz = f(z)$. Для установления статистической зависимости нами был принят вид функции $F(z) = (a / z) - bz$. Тогда затраты на обогащение угля с исходной зольностью $z^0$ до меньшей зольности $z^1$ могут быть подсчитаны по формуле:

$$C^0(z^1, z^0) = F(z^1) - F(z^0) = a\left(\frac{1}{z^1} - \frac{1}{z^0}\right) - b(z^1 - z^0).$$

Неопределенные параметры $a$ и $b$ были подсчитаны, как обычно, из условия минимальности суммы квадратов отклонений от фактических значений $z^0$, $z^1$ и $C^0$. При этом были использованы отчетные данные по 62 обогатительным фабрикам.

Сумма квадратов отклонений принятой теоретической кривой $C^0(z^1, z^0)$ от фактических значений $z_i^0$, $z_i^1$ и $C_i^0$ может быть представлена в виде:

$$N(a, b) = \sum_{i=1}^{62} \left[a\left(\frac{1}{z_i^1} - \frac{1}{z_i^0}\right) + b(z_i^0 - z_i^1) - C_i^0\right]^2.$$

* Между снижением зольности и уменьшением балласта в углях приближенно можно поставить знак равенства, ибо вторая составляющая (помимо золы) балласта — вода — мало изменяется от процесса обогащения. К тому же зола является основным фактором, снижающим к.п.д. топочных устройств, потребляющих энергетические угли. Разумеется, что сказанное выше относится к углям одной и той же марки.

Неопределенные параметры $a$ и $b$ должны определяться из условия, чтобы $N(a, b)$ было минимальным. Для этого найдем первые производные от $N(a, b)$ по $a$ и по $b$ и приравняем их 0. Получаем:

$$\left.\begin{aligned} a\cdot\sum_{i=1}^{62}\left(\frac{1}{z_i^1}-\frac{1}{z_i^0}\right)^2+b\cdot\sum_{i=1}^{62}\left(\frac{1}{z_i^1}-\frac{1}{z_i^0}\right)(z_i^0-z_i^1)=\sum_{i=1}^{62}C_i^0\left(\frac{1}{z_i^1}=\frac{1}{z_i^0}\right),\\ a\cdot\sum_{i=1}^{62}\left(\frac{1}{z_i^1}-\frac{1}{z_i^0}\right)(z_i^0-z_i^1)+b\cdot\sum_{i=1}^{62}(z_i^0-z_i^1)^2=\sum_{i=1}^{62}C_i^0(z_i^0-z_j^1).\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

Подставив численные значения указанных сумм в нормальные уравнения (9), получим:

$$\begin{aligned}337{,}256\cdot a+7{,}342\cdot b&=119{,}612,\\ 7{,}342\cdot a+0{,}242\cdot b&=\ \ 3{,}192.\end{aligned}$$

Отсюда $a = 0{,}198$; $b = 7{,}27$. Функция $F(z) = \frac{a}{z} - b\cdot z = \frac{0{,}198}{z} - z\cdot 7{,}27$. Средние затраты на обогащение 1 *т* рядового угля с зольностью $z^0$ будут:

$$C^0(z^1, z^0) = 0{,}198\left(\frac{1}{z^1}-\frac{1}{z^0}\right)+7{,}27\,(z^0-z^1), \qquad (10)$$

где, как и ранее, $z^1$ — зольность концентрата, получаемого в результате обогащения.

Сравнение результатов, полученных по формуле (10) расчетным путем, с фактическими данными для различных углей на различных месторождениях показало, что имеют место отклонения, которые бывают довольно значительными. Дело в том, что при получении численных значений параметров не учитывался такой важный фактор, как обогатимость различных углей. Отсутствие достаточной информации не позволило проводить вычисления параметров $a$ и $b$ по данным о затратах на обогащение угля разных категорий обогатимости. Возможность осуществления расчета с учетом различий обогатимости могла бы полученную формулу сделать значительно более точной.

Рассмотрим теперь зависимость выхода концентрата из 1 *т* рядового угля от степени снижения зольности.

Изучение фактических данных подсказало возможность принять для установления зависимости выхода концентрата от степени снижения зольности линейную форму. Однако следует оговориться, что нами была принята, как более удобная, зависимость $1-\gamma = \psi(|\Delta z|)$. Последнее выражение дает возможность и нахождения $\gamma$, т. е. выхода концентрата, ибо легко получаем $\gamma = 1 - \psi(|\Delta z|)$.

Итак, принимаем $1-\gamma = p\cdot|\Delta z| + q$, где $p$ и $q$ — неопределенные параметры. Так как корреляция $1-\gamma$ по $|\Delta z|$ принята линейной, то последнее дает возможность определить и меру тесноты связи $1-\gamma$ от $|\Delta z|$, т. е. вычислить соответствующий коэффициент корреляции. Исходными данными для установления корреляционной связи $1-\gamma$ от $|\Delta z|$ и для вычисления параметров $p$ и $q$ являются упомянутые выше фактические данные.

Составим уравнение для суммы квадратов отклонений:

$$N(p, q) = \sum_{i=1}^{62}[p|\Delta z_i| + q - (1-\gamma_i)]^2.$$

Требование минимальности последней суммы как функции параметров $p$ и $q$ приводит к системе нормальных уравнений:

$$p\cdot\sum_{i=1}^{62}(\Delta z_i)^2+q\cdot\sum_{i=1}^{62}|\Delta z_i|=\sum_{i=1}^{62}(1-\gamma_i)\cdot|\Delta z_i|,$$

$$p\cdot\sum_{i=1}^{62}|\Delta z_i|+q\cdot 62=\sum_{i=1}^{62}(1-\gamma_i).$$

Суммы:

$$\sum_{i=1}^{62}|\Delta z_i|;\quad \sum_{i=1}^{62}(\Delta z_i)^2;\quad \sum_{i=1}^{62}(1-\gamma_i);\quad \sum_{i=1}^{62}(1-\gamma_i)\,|\Delta z_i|$$

были рассчитаны с помощью соответствующих таблиц.

$$\begin{aligned} p\cdot 0{,}242+q\cdot 3{,}4&=0{,}564,\\ p\cdot 3{,}4\quad+q\cdot 62&=7{,}48. \end{aligned}\tag{11}$$

Из системы (3) получим: $p=2{,}7$ и $q=-0{,}031$. Отсюда

$$1-\gamma=2{,}7\cdot|\Delta z|-0{,}031.\tag{12}$$

Для расчета коэффициента корреляции необходимо параметр умножить на отношение $\sigma\Delta_z\,/\,\sigma_{1-z}$

$$\frac{\sigma_{\Delta z}}{\sigma_{1-\gamma}}=\sqrt{0{,}1187}=0{,}344,\quad r=p\frac{\sigma_{\Delta z}}{\sigma_{1-\gamma}}=2{,}7\cdot 0{,}344=0{,}929.$$

Близость коэффициента корреляции к 1 обнаруживает довольно большую тесноту связи между размером отходов и степенью снижения зольности.

Из формулы (12) получаем и формулу для расчета величины выхода концентрата

$$\gamma=0{,}969-2{,}7|\Delta z|.$$

Теперь остается рассмотреть пути нахождения оптимального значения параметров $\lambda_i$ для решения задачи в условиях перспективного планирования. Решение этой задачи применительно к нашей модели не может быть осуществлено средствами классического анализа.

Покажем схему расчетов наименьших приведенных затрат по выражению (7) с применением метода последовательных приближений. Функция (7) должна быть минимальной при условии, что соблюдаются условия (8).

Главная трудность расчета заключается в том, что остается неопределенным состав потребителей для углей каждого из месторождений, принятых к рассмотрению. Эта неопределенность делает неясной величину затрат на перевозку угля с месторождений до потребителей; остается также неизвестной величина затрат на сжигание угля, так как она сильно зависит от типа потребителя. В свою очередь отсутствие этих данных затрудняет нахождение оптимального предела обогащения, поскольку он в значительной мере определяется именно размером затрат на перевозку и сжигание угля. Поэтому для дальнейших практических расчетов по выражению придется задаваться хотя бы приближенным составом потребителей, с учетом их разной удаленности от месторождений угля и с учетом особенностей их топочно-котельных агрегатов.

Для нахождения оптимальных пределов обогащения по первому приближению могут быть предложены два пути: данные практики и расчетный путь. Если есть основание считать данные практики неудовлетворительными, то может быть использован расчетный путь, подробно описанный ниже.

Представим для ясности все затраты как функции пределов обогащений (таблица).

| Месторождения угля | Потребители угля | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | ... | $m$ |
| 1 | $\frac{A_{11}(\lambda_1)}{\gamma_1(\lambda_1)\eta_{11}(\lambda_1)}$ | $\frac{A_{12}(\lambda_1)}{\gamma_1(\lambda_1)\eta_{12}(\lambda_1)}$ | ... | $\frac{A_{1m}(\lambda_1)}{\gamma_1(\lambda_1)\eta_{1m}(\lambda_1)}$ |
| 2 | $\frac{A_{21}(\lambda_2)}{\gamma_2(\lambda_2)\eta_{21}(\lambda_2)}$ | $\frac{A_{22}(\lambda_2)}{\gamma_2(\lambda_2)\eta_{22}(\lambda_2)}$ | ... | $\frac{A_{2m}(\lambda_2)}{\gamma_2(\lambda_2)\eta_{2m}(\lambda_2)}$ |
| $n$ | $\frac{A_{n1}(\lambda_n)}{\gamma_n(\lambda_n)\eta_{n1}(\lambda_n)}$ | $\frac{A_{n2}(\lambda_n)}{\gamma_n(\lambda_n)\eta_{n2}(\lambda_n)}$ | ... | $\frac{A_{nm}(\lambda_n)}{\gamma_n(\lambda_n)\eta_{nm}(\lambda_n)}$ |

В столбце 1 таблицы, применительно к потребителю 1, представлены:

$\frac{A_{11}(\lambda_1)}{\gamma_1(\lambda_1)\eta_{11}(\lambda_1)}$ — затраты на 1 *Гкал* тепла как функции предела обогащения $\lambda_1$. Эти удельные затраты имели бы место, если потребитель 1 получал уголь с месторождения 1;

$\frac{A_{21}(\lambda_2)}{\gamma_2(\lambda_2)\eta_{21}(\lambda_2)}$ — затраты на 1 *Гкал* тепла как функции предела обогащения $\lambda_2$. Эти затраты имели бы место в случае, когда потребитель 1 получал бы уголь с месторождения 2 и т. д.;

$\frac{A_{n1}(\lambda_n)}{\gamma_n(\lambda_n)\eta_{n1}(\lambda_n)}$ — затраты на 1 *Гкал* тепла как функции предела обогащения $\lambda_n$.

Эти затраты имели бы место в случае снабжения углем потребителя 1 с месторождения $n$.

Аналогичный смысл имеют выражения, проставленные в остальных столбцах таблицы.

Представим теперь, что каждый потребитель $j$ мог бы выбирать себе поставщика и распоряжаться пределом обогащения угля этого поставщика. Руководствуясь наибольшей экономичностью, он бы выбрал того поставщика $i$, для которого затраты были бы минимальны, т. е.

$$\min_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{A_{kj}(\lambda_k)}{\gamma_k(\lambda_k)\eta_{kj}(\lambda_k)} = \frac{A_{ij}(\lambda_i)}{\gamma_i(\lambda_i)\eta_{ij}(\lambda_i)},$$

с этой целью необходимо для потребителя найти минимизирующие значения пределов обогащения $\lambda_i$ для всех поставщиков, т. е. найти корни $\lambda_i$

уравнений

$$\frac{d}{d\lambda_i}\left[\frac{A_{ij}(\lambda_i)}{\gamma_i(\lambda_i)\eta_{ij}(\lambda_i)}\right]=0, \qquad \begin{matrix} i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m, \end{matrix} \tag{13}$$

лежащие в допустимых пределах изменений $\lambda_i$. Функции $A_{ij}(\lambda_i)$, $\gamma_i(\lambda_i)$ и $\eta_{ij}(\lambda_i)$ таковы, что такие корни имеются, причем единственные для каждого из $n \times m$ уравнений (13).

Теперь найденные значения $\lambda_i$ (обозначим их $\lambda_{ij}$) должны быть подставлены в выражения для затрат на 1 *Гкал* тепла у $j$-го потребителя. Получим числа: $A_{ij}(\lambda_{ij}) / \gamma_i(\lambda_i)\eta_{ij}(\lambda_{ij})$; из этих $n$ чисел, представляющих величины затрат на 1 *Гкал* тепла у $j$-го потребителя, должно быть выбрано минимальное. Индекс этой величины определит наилучшего поставщика для $j$-го потребителя. В то же время будет получен и для каждого поставщика $i$ круг его потребителей $G_i^1$.

Теперь не представляет труда найти $\lambda_i$ первого приближения для каждого $i$. Ими будут корни уравнений:

$$\frac{d}{d\lambda_i}\sum_{j\in G_i^1}\frac{A_{ij}(\lambda_i)\cdot Q_j}{\gamma_i(\lambda_i)\eta_{ij}(\lambda_i)}=0, \quad i=1,\ldots,n, \tag{14}$$

лежащие в допустимых пределах изменений $\lambda_i$; обозначим их $\lambda_i^1$. Это будут пределы обогащения углей для каждого поставщика по первому приближению. Величины первого приближения легко могут быть найдены из уравнений:

$$x_{ij}^1=\frac{Q_j}{\gamma_i(\lambda_i)\eta_{ij}(\lambda_i^1)}, \qquad \text{если } j\in G_i^1;$$

$$x_{ij}^1=0, \text{ если } j \bar{\subset} G_i^1.$$

Далее, $j \in G_i^2$, если

$$\min_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{A_{kj}(\lambda_k^1)}{\gamma_k(\lambda_k^1)\eta_{kj}(\lambda_k^1)}\right\}=\frac{A_{ij}(\lambda_i^1)}{\gamma_i(\lambda_i^1)\eta_{ij}(\lambda_i^1)}.$$

При этом пределы обогащения берутся из первого приближения. Определив круг потребителей для каждого поставщика по формулам, аналогичным формуле (14), можно определить и пределы обогащения $\lambda_i^2$ второго приближения:

$$\frac{d}{d\lambda_i}\sum_{j\in G_i^2}\frac{A_{ij}(\lambda_i)\cdot Q_j}{\gamma_i(\lambda_i)\eta_{ij}(\lambda_i)}=0;$$

Затем определяем $x_{ij}^2$:

$$x_{ij}^2=\frac{Q_j}{\gamma_i(\lambda_i)\eta_{ij}(\lambda_i)}, \quad \text{если } j\in G_i^2,$$

$$x_{ij}^2=0, \quad \text{если } j \bar{\subset} G_i^2.$$

Подставляя $\lambda_i^2$ в таблицу, можно определить наименьшие величины в каждом столбце и т. д.

* * *

Итак, мы рассмотрели способ нахождения оптимального качества промышленной продукции. В качестве критерия был принят минимум затрат на единицу конечной продукции с учетом затрат на сырье, его передел и применение данной продукции. В работе нашли отражение линейные и нелинейные взаимосвязи между показателями во всех звеньях производственной цепи. Предложенный способ решения задачи проверен применительно к нахождению оптимального качества энергетических углей. Этот способ может быть использован при организации автоматизированного управления и планирования производства.

Поступила в редакцию
1 VII 1966

ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1967
том III, вып. 1

# ДИНАМИКА НАРОДНОГО ДОХОДА СССР И ЕГО ОСНОВНЫХ КОМПОНЕНТОВ *

АЛЬБ. Л. ВАЙНШТЕЙН

*(Москва)*

В подавляющем числе построений модели оптимального плана народного хозяйства в модель войдет народный доход или его основные компоненты — потребление и накопление страны — либо в виде элементов целевой функции, либо в форме ограничений. Поэтому анализ динамики этих показателей за достаточно длительный период представляет большой интерес в отношении возможности прогноза или по крайней мере, для ориентировки в их будущем движении. Настоящая статья и посвящена такому анализу.

## 1. СПОСОБЫ ИЗМЕРЕНИЯ НАРОДНОГО ДОХОДА

Народный доход в своем движении представляет поток продуктов **, направленный от производителя продуктов к их конечному потребителю. Этот поток проходит последовательно три взаимосвязанные фазы: создание или производство народного дохода, его распределение и перераспределение и, наконец, использование. На каждой из этих трех фаз народный доход может быть уловлен и сосчитан.

Исчисление этого показателя на каждой из трех фаз — народного дохода созданного, народного дохода распределенного и народного дохода использованного — требует различных статистических материалов и методов. Но если те и другие в каждом варианте расчета одинаково точны, то мы должны прийти к идентичным результатам во всех трех случаях ***.

Для углубленного анализа народного хозяйства необходимо совместное рассмотрение всех трех фаз движения народного дохода, ибо каждая фаза соответствует своему аспекту и смыслу этого показателя. Народный доход созданный измеряет производительность или экономическую мощь страны; народный доход выплаченный характеризует социально-экономический аспект — соотношение различных групп и классов населения в народном доходе; и, наконец, рассмотрение использованного народно-

---

* Работа выполнена в Лаборатории финансовых потоков ЦЭМИ АН СССР в сотрудничестве с Н. В. Розановой. Основные идеи работы были предметом обсуждения на семинаре по перспективному планированию развития народного хозяйства СССР (Новосибирск, СО АН СССР, март 1966) и на Объединенном Европейском конгрессе Эконометрического общества и Института по научному управлению (Варшава, сентябрь 1966).

** Или поток продуктов и услуг — в соответствии с концепцией многих буржуазных экономистов.

*** Национальное бюро экономических исследований в США произвело в начале 20-х годов под руководством У. Митчелла тщательное исчисление народного дохода на *двух* фазах — произведенного и выплаченного — за каждый год десятилетия 1909—1919 гг. под руководством двух разных лиц, и результаты оказались чрезвычайно близкими между собой. Расхождение в среднем за 10 лет составило всего 1,2% [1].