ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1966 том II, вып. 1

АБСТРАКТНАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО ХОЗЯЙСТВЕННОГО ПРОЦЕССА И ОБЪЕКТИВНО ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ОЦЕНКИ *

А. Л. ЛУРЬЕ

(Москва)

Социалистическое хозяйство — плановое хозяйство, цель которого — максимальное удовлетворение потребностей общества. Из этой особенности социалистической экономики вытекает основной метод ее теоретического изучения — построение и анализ математических моделей планового хозяйственного развития, сознательно направляемого к достижению максимального (или минимального) значения той или иной целевой функции (критерия оптимальности). Невозможность точного численного определения величины этой функции, обусловливающая серьезные трудности при разработке практических вопросов методологии оптимального планирования (не являющиеся, впрочем, непреодолимыми), ни в какой мере не исключает правомерности теоретического анализа соответствующих экономико-математических моделей. Принципиальное отрицание самого «существования» такой категории, как целевая функция социалистического хозяйства, равносильно отрицанию сопоставимости различных вариантов народнохозяйственного плана по степени их соответствия общим интересам социалистического общества [1, стр. 22—24].

При построении теоретических экономико-математических моделей чрезвычайная сложность экономической действительности преодолевается отчасти путем включения в модели лишь некоторых наиболее общих и существенных характеристик хозяйственного процесса, отчасти при помощи различного рода упрощающих предположений, хотя бы они и не соответствовали в точности экономической реальности. В настоящей статье, цель которой — анализ некоторых общих категорий социалистической экономики, мы стремились не вводить в модель детализирующих структуру экономики предположений и ограничивались по возможности формализацией лишь наиболее общих, не вызывающих сомнений характеристик развивающегося социалистического хозяйства. Упрощающие предпосылки сведены к минимуму, причем, как нам кажется, эти предпосылки (главная из них — дифференцируемость рассматриваемых функций) могут считаться в рамках затрагиваемых в работе вопросов приемлемой аппроксимацией.

ОБЩАЯ СХЕМА ОПТИМАЛЬНОГО ХОЗЯЙСТВЕННОГО ПРОЦЕССА

Будем рассматривать дискретную модель развития социалистической экономики. Последовательные состояния хозяйственной системы в моменты времени t $(t = 0, 1, \ldots, T)$ описываются неотрицательными векторами X_t, состоящими из N компонентов ξ_{it} $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Первые m компонентов каждого вектора, обозначаемые через $\xi_{1t}, \xi_{2t}, \ldots, \xi_{mt}$, представляют собой различного рода производственные ресурсы (воспроизводимые и невоспроизводимые средства производства и трудовые ресурсы).

* В порядке обсуждения.

имеющиеся в распоряжении общества на момент t. Остальные $n = N - m$ компонентов $\xi_{(m+1)t}, \xi_{(m+2)t}, \ldots, \xi_{Nt}$ — это количества различных хозяйственных ресурсов, используемых для удовлетворения потребностей общества, включая сюда как предметы непосредственного личного потребления его членов, так и средства удовлетворения коллективных потребностей (фонды общественного потребления в широком смысле слова), а также некоторые процессы удовлетворения потребностей (так называемые «услуги»), имевшие место или запланированные на период от момента $t-1$ до момента t. Наличие средств производства может иногда иметь значение для удовлетворения коллективных потребностей общества не только как фактор будущего роста продукции, но и непосредственно: например, развитие транспортной сети на каждый момент времени или наличная мощность машиностроительных заводов определяют в какой-то мере степень удовлетворения «потребности» общества в безопасности (бо́льшую или меньшую обороноспособность). Наличие такого рода ресурсов может отражаться в векторе X_t двумя компонентами: и в первой, и во второй группе.

Векторы X_t могут отображать хозяйственный процесс лишь в том случае, если каждый из них является «возможным» по отношению к предыдущему. Какие ресурсы можно иметь на момент t, зависит от того, какие производственные ресурсы имелись в момент $t-1$ и каковы способы их использования, осуществимые при данном состоянии технических знаний. Это условие будем выражать формулой $X_t \in W_t(X^m_{t-1})$. Через X^m_{t-1} обозначается вектор, первые m компонентов которого характеризуют производственные ресурсы на момент $t-1$, а остальные $N-m$ равны нулю. Под W_t понимается соответствующее тому или иному значению вектора X^m_{t-1} множество возможных состояний хозяйства (векторов X_t) на момент t.

Последовательности векторов X_t или, другими словами, матрицы $\| \xi_{it} \|$, отображающие возможные за период T варианты хозяйственного развития, определяются не только множествами $W_t(X^m_{t-1})$, соответствующими различным значениям X^m_{t-1}, но и исходным состоянием хозяйственной системы. Обозначим через Y_0 N-мерный вектор, компоненты которого представляют собой заданные на начальный момент времени хозяйственные ресурсы. Тогда допустимые хозяйственные процессы или, другими словами, возможные варианты перспективных планов будут определяться равенством

$$X_0 = Y_0 \tag{1}$$

и условием

$$X_t \in W_t(X^m{}_{t-1}). \tag{2}$$

В дальнейшем нам будет удобнее рассматривать Y_0 как первый столбец «исходной матрицы заданных ресурсов»: $\| \eta_{it} \| = Y_0, Y_1, \ldots, Y_T$, все столбцы которой, кроме Y_0, нулевые. Наряду с исходной матрицей заданных ресурсов будет рассматриваться множество ее возможных модификаций, т. е. таких «матриц заданных ресурсов», которые могут иметь элементы, отличные от исходной. Возможная условная интерпретация ненулевых элементов этих матриц (для $t > 0$): величины $\eta_{it} > 0$ — количества безвозмездно получаемых (например, из другой страны) ресурсов вида i в момент t; величины $\eta_{it} < 0$ — безвозмездная передача в момент t ресурсов вида i на сторону *.

* Как увидим, рассмотрение такого рода матриц необходимо в нашей абстрактной модели для определения понятия оценок.

Очевидно, каждой матрице заданных ресурсов соответствует множество допустимых процессов (перспективных планов) определяемое условиями*:

$$X_t = Y_t + X_t' \tag{1, a}$$

и

$$X_t' \in W_t(X_{t-1}^m), \tag{2, a}$$

где $X_0' = 0$.

Из всех возможных путей хозяйственного развития (допустимых процессов) социалистическое общество выбирает «оптимальный» путь, т. е. в наибольшей степени соответствующий целям общества. Каковы бы ни были эти цели, относительно любых хозяйственных процессов, т. е. последовательностей векторов X_t, имеет смысл утверждение, что один из них содействует осуществлению целей общества больше, меньше или в той же мере, как другой. Это «предпочтение» может быть выражено при помощи некоторой функции от компонентов векторов X_t; обозначим ее через $\omega(\|\xi_{it}\|)$. Поскольку мы разбиваем ресурсы на «производственные» (обозначим их через ξ_{it}^m) и «потребительские» (обозначим их через ξ_{it}^n), требование оптимизации хозяйственного процесса (максимизации $\omega(\|\xi_{it}\|)$ можно записать так:

$$\omega(\|\xi_{it}\|) = \varphi(X_0^n, X_1^n, \ldots, X_{T-1}^n, X_T) = \max. \tag{3}$$

В векторах X_t^n $(t = 0, 1, \ldots, T-1)$ первые m компонентов нулевые, а последние $n = N - m$ отражают состояние ресурсов, от которых непосредственно зависит удовлетворение потребностей общества (предметы потребления и «услуги»). Последний вектор X_T включает все виды ресурсов, так как степень соответствия хозяйственного процесса целям общества зависит, очевидно, и от состояния его производственной базы на конечный момент рассматриваемого периода.

Матрицу $\|\xi_{it}\|$ (последовательность векторов $X_0, X_1, \ldots, X_T$), удовлетворяющую условиям $(1, a)$, $(2, a)$, (3), будем называть оптимальным процессом или оптимальным перспективным планом, соответствующим матрице заданных ресурсов $\|\eta_{it}\|$. Можем написать

$$\|\xi_{it}\| = \Phi(\|\eta_{it}\|) \tag{4}$$

(при заданных W_t и φ).

Оптимальный процесс, соответствующий *исходной* матрице заданных ресурсов, будем называть «дифференцируемым оптимальным процессом», если функция $\Phi(\|\eta_{it}\|)$ дифференцируема в точке $\|\eta_{it}\| = \|\overset{0}{\eta}_{it}\|$, где $\|\overset{0}{\eta}_{it}\|$ — исходная матрица заданных ресурсов, и функция $\varphi(X_0^n, X_1^n, \ldots, X_{T-1}^n X_T)$ также дифференцируема в соответствующей точке (т. е. при $\|\xi_{it}\| = \Phi(\|\overset{0}{\eta}_{it}\|)$.

Величину целевой функции $\omega(\|\xi_{it}\|)$, соответствующую оптимальному процессу, т. е. ее максимально возможное значение (при заданных $\|\eta_{it}\|$, φ, $W_t(X_{t-1}^m)$)), обозначим через $\bar{\omega}$. Эту величину можно рассматривать как функцию от матрицы $\|\eta_{it}\|$ и писать в этом случае $\bar{\omega}(\|\eta_{it}\|)$. При сделанных предположениях о дифференцируемости функций Φ и φ функция $\bar{\omega}(\|\eta_{it}\|)$ в точке, соответствующей исходной матрице заданных ресурсов, также будет дифференцируемой, т. е. будет существовать ее полный дифференциал $d\bar{\omega}$.

Пусть $\|\theta_{it}\|$ — матрица функций, выражающих зависимость соответствующих элементов оптимального процесса $\|\xi_{it}\|$ от матрицы заданных

* Как частный случай для «исходной матрицы» получим (1) и (2).

ресурсов $\| \eta_{it} \|$ (при данных W_t и φ)

$$\xi_{it} = \theta_{it}(\| \eta_{it} \|). \tag{5}$$

Для частной производной $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \eta_{it}}$ получим

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \eta_{it}} = \sum_{k,\, r} \frac{\partial \omega}{\partial \xi_{kr}} \frac{\partial \theta_{kr}}{\partial \eta_{it}}, \tag{6}$$

где $k = 1, 2, \ldots, N$; $r = 0, 1, \ldots, T$, а полный дифференциал выразится формулой:

$$d\bar{\omega} = \sum_{i,\, t} d\eta_{it} \sum \frac{\partial \omega}{\partial \xi_{kr}} \frac{\partial \theta_{kr}}{\partial \eta_{it}}, \tag{7}$$

где $k = 1, 2, \ldots, N$; $r = 0, 1, \ldots, T$; $i = 1, 2, \ldots, N$; $t = 0, 1, \ldots, T$.

Теперь можно определить для нашей модели понятие «оценок» (являющееся обобщением «объективно обусловленных оценок» Л. В. Канторовича или «теневых цен» западных авторов). Частные производные $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \eta_{it}}$ в точке, соответствующей исходной матрице заданных ресурсов, т. е. при $\| \eta_{it} \| = \| \eta_{it}^0 \|$, будем называть «оптимальными оценками» или просто «оценками» элементов ξ_{it} дифференцируемого оптимального процесса и обозначать через ζ_{it}; $\| \zeta_{it} \|$ будет матрицей оценок; Z_t — вектором оценок. Вместо (7) можно написать

$$d\bar{\omega} = \sum_{i,\, t} \zeta_{it}\, d\eta_{it} = \sum Z_t \cdot dY_t. \tag{8}$$

Экономический смысл приведенного определения можно пояснить следующим образом. Оценка ζ_{it} выражает предельное приращение целевой функции, приходящееся на единицу приращения Δ_{it} ресурса i в момент времени t и тем самым характеризует значение приращения этого ресурса для достижения стоящих перед обществом целей.

При этом следует иметь в виду, что если выяснилась возможность в году t получить безвозмездно Δ_{it} ресурсов i (η_{it} вместо нуля будет равна Δ_{it}), то оптимальный хозяйственный процесс будет, как правило, изменен в различных своих частях, причем наличие ресурса i в году t при новом оптимальном процессе — ξ'_{it} — не обязательно должно отличаться в точности на Δ_{it} от прежнего — ξ_{it}. Безвозмездное приращение ресурса i может быть использовано полностью или частично для увеличения производства других продуктов за счет экономии затрат на i. Точно так же в случае отрицательного приращения ($\Delta_{it} < 0$) может оказаться целесообразным полностью или частично покрыть убыль продукта i за счет уменьшения производства в других отраслях. Существенно лишь, на какую величину удается увеличить целевую функцию ($\bar{\omega}$) или на сколько ее приходится уменьшить (при $\Delta_{it} < 0$).

Приведенная интерпретация оценок, связанная с истолкованием матрицы $\|\eta_{it}\|$, как матрицы возможных безвозмездных «приращений» ресурсов, поясняет формальное определение $\xi_{it} = \frac{\partial \omega}{\partial \eta_{it}}$, но не дает еще достаточного представления о роли оценок в социалистической экономике. Эта роль вытекает из ряда теорем, характеризующих значение оценок при сопоставлениях затрат и результатов отдельных хозяйственных мероприятий и производственных способов. Попытаемся дать формальные определения понятий «мероприятие» и «способ» и изложим затем содержание некоторых теорем об условиях, которым должны удовлетворять мероприятия и способы, если процесс хозяйственного развития социалистического общества является оптимальным.

ТЕОРЕМЫ О МЕРОПРИЯТИЯХ И СПОСОБАХ

При введенных выше обозначениях составление плана на интервал времени $t-1$, t при заданном векторе наличных производственных ресурсов X_{t-1}^{m} сводится к выбору одного из «возможных» векторов X_t, т. е. к выбору вектора, удовлетворяющего условию $X_t \in W_t(X_{t-1}^{m})$.

Любую пару векторов X_{t-1}, X_t, для которой выполняется это условие, будем в дальнейшем называть планом t (или «на год t»).

Если при некоторой исходной матрице заданных ресурсов $\| \eta^0{}_{it} \|$ планы на каждый год t $(t = 1, 2, \ldots, T)$ выбирать в соответствии с принципом оптимальности (т. е. так, чтобы $\bar{\omega}(\| \xi_{ik} \|) = \max$, то мы получим последовательность векторов $X_0, X_1, \ldots, X_T = \| \xi_{it} \|$, образующую оптимальный процесс. Предполагаем, что этот процесс дифференцируемый.

Будем говорить, что план X_{t-1}^{m}, X_t «входит в дифференцируемый оптимальный процесс», если X_t — вектор-столбец соответствующей матрицы $\| \xi_{it} \|$, а первые m компонентов вектора X_{t-1}^{m} совпадают с первыми m компонентами столбца X_{t-1} той же матрицы.

Дадим теперь формальное определение «мероприятия, входящего в план».

Пару векторов x_{t-1}^{m}, x_t назовем мероприятием, входящим в план X_{t-1}^{m}, X_t, если

$$X_t - x_t \in W_t(X_{t-1}^{m} - x_{t-1}^{m}), \qquad (9)$$

т. е. если $X_{t-1}^{m} - x_{t-1}^{m}$, $X_t - x_t$ также представляют собой план.

Поясним данное определение. Предположим, что некоторый набор производственных ресурсов x_{t-1}^{m} («затраты») может использоваться для хозяйственной операции, «результатами» которой на момент t являются x_t ресурсов. Такая операция будет «мероприятием», входящим в план t, если производственные ресурсы X_{t-1}^{m} этого плана, за вычетом из них затрат по данной операции — компонентов вектора x_{t-1}^{m}, обеспечивают получение на момент t такого же количества ресурсов, как и в первоначальном плане — X_t, за вычетом результатов данной операции, т. е. компонентов вектора x_t. Пусть, например, в народнохозяйственном плане t предусматриваются затраты q_0 тонн минеральных удобрений, увеличивающие урожай на Δ_0 центнеров зерна. Внесение q_0 тонн удобрений и получение Δ_0 центнеров зерна будет мероприятием, входящим в план, поскольку при наличии всех остальных ресурсов, но без этих минеральных удобрений были бы получены те же, что и ранее, результаты, уменьшенные лишь на Δ_0 центнеров зерна. В то же время остальные используемые в сельском хозяйстве ресурсы (без q_0 тонн удобрений) и весь запланированный урожай без Δ_0 тонн зерна не могут рассматриваться как мероприятие, так как если их «вычесть» из плана, то «остато» сельскохозяйственных ресурсов — q_0 тонн удобрений — не обеспечит получения «остатка» урожая — Δ_0 центнеров зерна, поскольку минеральные удобрения сами по себе, без труда, сельскохозяйственных машин, семян и т. д. не дадут никакого урожая. Как видим, в «план» могут входить мероприятия, но из этого еще не вытекает, что его можно представить как сумму мероприятий.

Пару векторов x^m_{t-1}, x_t назовем мероприятием, возможным при плане X^m_{t-1}, X_t, если

$$X_t + x_t \in W(X^m_{t-1} + x^m_{t-1}). \tag{10}$$

Независимым мероприятием для интервала $t-1$, t назовем мероприятие, возможное при любом плане t.

Чтобы пояснить приведенные определения, вернемся к только что разобранному примеру. Предположим, что увеличение количества удобрений на q_1 тонн могло бы вызвать дополнительный прирост урожая на Δ_1 центнеров. Такая операция будет мероприятием, «возможным» при данном плане (включающем уже q_0 удобрений). Если бы наш план был другим, предусматривал бы, например, меньшее или большее чем q_0 количество удобрений, то приращение на Δ_1 урожая за счет добавочных q_1 тонн удобрений не было бы «возможным мероприятием», так как эффект «добавки» удобрений зависит от того, сколько их было первоначально запланировано.

Если бы в противоположность действительному положению вещей добавление q_1 тонн удобрений при любом плане — любом первоначальном наличии сельскохозяйственных ресурсов (в том числе удобрений) — вызывало бы одно и то же приращение урожая Δ_1, то мы имели бы дело с «независимым» мероприятием.

Относительно мероприятий, «входящих» в планы дифференцируемого оптимального процесса и «возможных» по отношению к этим планам, справедлива следующая теорема (доказательство см. в [1], стр. 308—309).

Теорема 1. а) Если мероприятие x^m_{t-1}, x_t входит в план X^m_{t-1}, X_t дифференцируемого оптимального процесса, то при условии, что компоненты векторов x^m_{t-1}, x_t достаточно малы*,

$$x_t \cdot Z_t - x^m_{t-1} \cdot Z_{t-1} \geqslant 0. \tag{11}$$

б) Если мероприятие x^m_{t-1}, x_t возможно по отношению к плану X^m_{t-1}, X_t дифференцируемого оптимального процесса, то при условии, что компоненты векторов $x^{m}{}_{1}$, x_{t-1} достаточно малы

$$x_t \cdot Z_t - x^m_{t-1} \cdot Z_{t-1} \leqslant 0. \tag{12}$$

в) Если мероприятие x^m_{t-1}, x_t входит в план X^m_{t-1}, X_t дифференцируемого оптимального процесса и одновременно является по отношению к этому плану возможным, то при условии, что компоненты векторов x^m_{t-1} x_t достаточно малы,

$$x_t \cdot Z_t - x^m_{t-1} \cdot Z_{t-1} = 0 \tag{13}$$

(справедливость пункта *в* непосредственно вытекает из *а* и *б*).

Разность между произведением «результатов» мероприятия (x_t) на их оценки (Z_t) и произведением «затрат» (x^m_{t-1}) на их оценки (Z_{t-1}) можно назвать «прибылью», если она положительна, и «убытком» — в противоположном случае. Планы, входящие в дифференцируемый оптимальный про-

* Другими словами, можно указать такое число $\varepsilon > 0$, что при условии $|\bar{\xi}^m_{t-1}| < \varepsilon$, $|\bar{\xi}_t| < \varepsilon$, где $\bar{\xi}^m_{t-1}$ и $\bar{\xi}_t$ — компоненты векторов мероприятия x^m_{t-1}, x_t, входящего в дифференцируемый оптимальный процесс, справедливо (11). В дальнейшем выражение «достаточно малы» всюду употребляется в том же смысле.

цесс, назовем оптимальными. Экономическая интерпретация теоремы 1 будет тогда следующей. Если затраты и результаты не слишком велики («достаточно малы» в смысле примечания на стр. 17), то: *а*) мероприятия, входящие в оптимальный план, должны быть «безубыточны»; *б*) мероприятия, возможные при данном оптимальном плане, не должны давать «прибыли»; *в*) если мероприятие входит в оптимальный план и в то же время такое же мероприятие может быть дополнительно осуществлено (в случае появления соответствующих дополнительных ресурсов), то затраты и результаты должны быть по своим оценкам эквивалентны.

Из теоремы 1 легко вывести следующее положение для «независимых» мероприятий.

Теорема 2. При наличии дифференцируемого оптимального процесса независимое мероприятие $\overset{m}{x}_{t-1}$, x_t при условии, что компоненты векторов $\overset{m}{x}_{t-1}$, x_t достаточно малы, удовлетворяет неравенству (12); если же оно входит в план дифференцируемого оптимального процесса, то имеет место равенство (13).

Другими словами, независимое мероприятие (не слишком «большое») не может быть прибыльным, а если оно входит в дифференцируемый оптимальный процесс, то затраты и результаты должны быть по своим оценкам эквивалентны.

Изложенные теоремы имеют существенное значение для обоснования методов проверки оптимальности планов и определения целесообразности отдельных мероприятий, возможность которых выявилась после того, как уже был сконструирован оптимальный дифференцируемый процесс (составлен оптимальный перспективный план). Аналогичное значение имеют теоремы о производственных способах.

Пару функций $F_t^m(h)$, $F_t(h)$ от вещественной переменной $h \geqslant 0$, однозначно определяющих пару векторов $\overset{m}{x}_{t-1} = \overset{m}{F_t}(h)$, $x_t = F_t^m(h)$, причем $F_t^m(0)$ и $F_t(0)$ — нулевые векторы, будем называть способом для интервала $t-1$, t (или способом на год t). Таким образом, под «способом» понимается множество сочетаний производственных ресурсов на исходный момент времени $t-1$ и ресурсов любого рода (производственных и потребительских) на момент t, определяемое парой векторов, рассматриваемых как функции $F_t^m(h)$ и $F_t(h)$ от некоторого параметра. Если $\overset{m}{x}_{t-1}$, x_t, соответствующие некоторому значению $h_0 > 0$ переменной h, представляют собой мероприятие, входящее в план $\overset{m}{X}_{t-1}$, X_t, то будем говорить, что данный способ входит в этот план при интенсивности h_0. Если таких положительных чисел h_0 нет, то будем говорить, что данный способ «не входит в план $\overset{m}{X}_{t-1}$, X_t» или, для общности, «входит в план лишь при интенсивности $h_0 = 0$».

Способ $F_t^m(h)$, $F_t(h)$ называется независимым, если по отношению к любому плану t, в который этот способ входит с интенсивностью $h_0 \geqslant 0$, мероприятие $\overset{m}{x}_{t-1} = F_t^m(h_0) - F_t^m(h_0 - \Delta)$, $x_t = F_t(h_0) - F_t(h_0 - \Delta)$ при любом Δ, удовлетворяющем неравенству $0 < \Delta < h_0$, является входящим в план, а мероприятие $\overset{m}{x}_{t-1} = F_t^m(h_0 + \Delta) - F_t^m(h_0)$, $x_t = F_t(h_0 + \Delta) - F_t^m(h_0)$ при любом $\Delta > 0$ является возможным. Отсюда следует, что независимый способ по отношению к любому плану, в который он не входит ($h_0 = 0$), представляет собой при любом $h_0 > 0$ возможное мероприятие*.

* В [1] способ признавался независимым лишь при условии, что пара векторов $F_t^m(h)$, $F_t(h)$ при любом h представляет собой мероприятие, возможное при любом плане t. Такое «жесткое» требование существенно ограничивает класс независимых способов и в то же время не является необходимым для обоснования их важного свойства, о котором говорится в теореме 4.

Пусть, например, использование минеральных удобрений требует l затрат труда на каждую единицу удобрений и дает прирост урожая двух сельскохозяйственных культур (по сравнению с урожаем без применения удобрений), определяемый функциями $f_1(q)$ и $f_2(q)$, где q — количество удобрений. Применение удобрений можно в этом случае рассматривать как «способ», приняв в качестве параметра — «интенсивности» применения способа — количество удобрений: $h = q$. Функция, определяющая затраты (используемые ресурсы), будет тогда $F_t^m(h) = (h, lh)$, а получаемые результаты будут $F_t(h) = (f_1(h), f_2(h))$. Если в плане на год t предусмотрено использование q_0 удобрений при соответствующей затрате труда lq_0, то пара векторов (q_0, lq_0), $(f_1(q_0), f_2(q_0))$ представляет собой мероприятие, входящее в план. В этом случае данный «способ при интенсивности $h = q_0$ входит в план».

Поскольку эффект применения удобрений зависит от других элементов плана, рассматриваемый «способ» не может быть признан «независимым». Для этого требовалось бы, чтобы при любых планах на год t (отличающихся, например, способами обработки почвы) применение минеральных удобрений давало бы один и тот же эффект (т. е. не менялись бы ни коэффициент l, ни вид функций f_1 и f_2).

Будем называть способ дифференцируемым, если функции $F_t^m(h)$ и $F_t(h)$ дифференцируемы при любом $h > 0$ и имеют производные справа при $h = 0$. Назовем способ линейным, если $F_t^m(h)$ и $F_t(h)$ — линейные формы от h, т. е. если $F_t^m(h) = hP_{t-1}^m$ и $F_t(h) = hP_t$, где P_{t-1}^m и P_t — некоторые заданные векторы размерности N (при этом последние $N - m$ элементов вектора P_{t-1}^m равны нулю). В примере с удобрениями мы имели бы дело с линейным способом, если бы прирост урожая каждой из культур был бы пропорционален количеству удобрений: $f_1(q) = \lambda_1 q$ и $f_2(q) = \lambda_2 q$.

Из теоремы 1 вытекает справедливость следующей теоремы о «приращениях» способов.

Теорема 3. а) Если пара векторов $F_t^m(h_0) - F_t^m(h_0 - \varepsilon)$; $F_t(h_0) - F_t(h_0 - \varepsilon)$ при любых значениях ε, удовлетворяющих требованию $0 < \varepsilon < \delta$, где δ — некоторое положительное число, является мероприятием, входящим в план X_{t-1}^m, X_t дифференцируемого оптимального процесса, а функции $F_t^m(h)$, $F_t(h)$ в точке $h = h_0$ дифференцируемы слева, то

$$Z_t \cdot dF_t(h_0) - Z_{t-1} \cdot dF_t^m(h_0) \leqslant 0, \tag{14}$$

где $dF_t(h_0)$ и $dF_t^m(h_0)$ — дифференциалы слева.

б) Если пара векторов $F_t^m(h_0 + \varepsilon) - F_t^m(h_0)$, $F_t(h_0 + \varepsilon) - F_t(h_0)$ при любых значениях ε, удовлетворяющих требованию $0 < \varepsilon < \delta$, где δ — некоторое положительное число, является мероприятием, возможным при плане X_{t-1}^m, X_t дифференцируемого оптимального процесса, а функции $F_t^m(h)$, $F_t(h)$ в точке $h = h_0$ дифференцируемы справа, то

$$Z_t \cdot dF_t(h_0) - Z_{t-1} \cdot dF_t^m(h_0) \leqslant 0. \tag{15}$$

где $dF_t(h_0)$ и $F_t^m(h_0)$ — дифференциалы справа.

в) Если одновременно удовлетворяются условия пунктов *а* и *б*, то

$$Z_t \cdot dF_t(h_0) - Z_{t-1} \cdot dF_t^m(h_0) = 0. \tag{16}$$

Экономическое содержание этой теоремы аналогично содержанию теоремы 1, с тем различием, что в качестве «не слишком большого мероприятия» здесь рассматривается «приращение» способа $F_t^m(h)$, $F_t(h)$ в точке $h = h_0$, соответствующее весьма малым приращениям параметра h.

Если способ $F_t^m(h)$, $F_t(h)$ входит с интенсивностью h_0 в план t дифференцируемого оптимального процесса, то на основании теоремы 3 можно сформулировать следующие положения.

При соблюдении условия *а* малое уменьшение h_0 должно быть бесприбыльным (при расчете по оптимальным оценкам). При соблюдении условия *б* малое увеличение h_0 должно быть бесприбыльным. При одновременном выполнении условии *а* и *б* (случай *в*) любое изменение h_0 должно быть *в пределе* (при $\Delta \to 0$) и бесприбыльным, и безубыточным *.

Применим пункты *б* и *в* теоремы 3 к независимым способам.

Теорема 4. Если функции $F_t^m(h)$, $F_t(h)$ представляют собой независимый дифференцируемый способ и при интенсивности h_0 этот способ входит в план X_{t-1}^m, X_t дифференцируемого оптимального процесса, то:

$$Z_t \cdot dF_t(h_0) - Z_{t-1} \cdot dF_t^m(h_0) \leqslant 0, \quad h_0 \geqslant 0, \tag{17}$$

$$Z_t \cdot dF_t(h_0) - Z_{t-1} \cdot dF_t^m(h_0) = 0, \quad h_0 > 0. \tag{18}$$

Другими словами, изменение в интенсивности применения любого независимого дифференцируемого способа (если оно не слишком велико, т. е. позволяет ограничиться рассмотрением дифференциалов) не должно оказываться «прибыльным», в том числе и при $h_0 = 0$, т. е. когда способ совсем не применяется; если же независимый дифференцируемый способ вошел в план ($h_0 > 0$), то изменения в его интенсивности не должны в пределе давать ни прибыли, ни убытка.

Для доказательства теоремы 4 достаточно заметить, что в отношении независимых дифференцируемых способов всегда соблюдается условие *б* теоремы 3, а при $h_0 > 0$ может быть применен пункт *в*.

Как следствие теоремы 4 можно рассматривать теорему о линейных независимых способах.

Теорема 5. Если линейный независимый способ, определяемый векторами P_{t-1}^m, P_t, входит при интенсивности h_0 в план X_{t-1}^m, X_t **дифференцируемого** оптимального процесса, то:

$$Z_t \cdot P_t - Z_{t-1} \cdot P_{t-1} \leqslant 0, \quad h_0 \geqslant 0, \tag{19}$$

$$Z_t \cdot P_t - Z_{t-1} \cdot P_{t-1}^m = 0, \quad h_0 > 0. \tag{20}$$

Формула (19) показывает, что ни один линейный независимый способ не может быть «прибыльным», а из (20) вытекает, что «затраты» и «результаты» по способам, вошедшим в оптимальный план, должны быть эквивалентны.

Как известно, аналогичные требования в линейных моделях (см., например, [2]) являются необходимыми и достаточными условиями оптимальности плана. В нашей модели условия (19) и (20), как и требования, сформулированные в теоремах 1—4, — необходимые условия оптимальности, но недостаточные. Мало того, для рассматриваемой модели не является обязательным самое наличие независимых способов, в том числе линейных, а следовательно, выполнение условий (19) и (20), как и более общих (17) и (18), можно представить себе и чисто негативным: они не нарушатся при отсутствии каких бы то ни было «вошедших в план» или «возможных» независимых способов.

* Конечные, но достаточно малые по абсолютной величине приращения интенсивности (h_0) не должны при этом давать прибыли, но могут давать убыток. Однако при уменьшении абсолютной величины приращения этот убыток в рассматриваемом случае будет стремиться к нулю быстрее, чем величина самого приращения, т. е. будет бесконечно малой высшего порядка.

Чтобы требования (17), (18), а тем более (19), (20), являлись бы не только необходимыми, но и достаточными условиями оптимальности планов, пришлось бы ввести в модель дополнительные предпосылки, как нам кажется, «слишком сильные», т. е. существенно отличающиеся от действительности. Весь хозяйственный процесс за T лет требовалось бы представить как множество применяемых с различными интенсивностями независимых способов, а целевую функцию рассматривать как не имеющую локальных экстремумов.

О ЗНАЧЕНИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ОЦЕНОК

Приведенные теоремы о необходимых условиях, которым должны отвечать мероприятия и способы в условиях оптимально планируемого хозяйственного процесса, полученные для весьма общих предпосылок, подтверждают большую роль оптимальных оценок для социалистической экономики, показанную первоначально Л. В. Канторовичем на основе линейных моделей (хотя, как выше отмечено, соответствующие критерии оптимальности и перестают быть достаточными).

Как бы хорошо ни был составлен народнохозяйственный план, он требует в процессе своего осуществления уточнения и детализации, поскольку ряд вопросов неизбежно решается при составлении планов лишь в общих чертах. Необходима в то же время непрерывная корректировка хозяйственной деятельности в связи с меняющейся обстановкой (выяснение фактических результатов выполнения планов, появление новых средств и методов производства и др.). Все это требует решения многочисленных и разнообразных частных хозяйственных задач, которые могут практически рассматриваться как «достаточно малые» мероприятия (а в ряде случаев как определение интенсивности применения различных способов). Сопоставление «затрат» и «результатов» по таким мероприятиям при помощи цен, хотя бы приближенно пропорциональных оптимальным оценкам отдельных видов ресурсов*, явилось бы средством решения частных задач в соответствии с общими интересами социалистического хозяйства без пересчета каждый раз всего народнохозяйственного плана в целом. Очевидно, что такого рода бесчисленные пересчеты невыполнимы как для центральных плановых органов, так и тем более при решении конкретных вопросов отдельными хозяйственными ячейками, пользующимися самостоятельностью в рамках системы хозяйственного расчета.

Оптимальные оценки выступают, следовательно, как теоретическая база такой системы цен (и других связанных с ними экономических рычагов), которая позволяла бы решать частные хозяйственные задачи в соответствии с принципом оптимального развития всего социалистического хозяйства в целом и на этой основе наиболее эффективно сочетать централизованное планирование и самостоятельность отдельных хозяйственных организаций.

МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО ХОЗЯЙСТВЕННОГО ПРОЦЕССА И МИНИМИЗАЦИЯ ЗАТРАТ

Для более полного выяснения экономического содержания рассматриваемой модели социалистического хозяйства и некоторых свойств оптимальных оценок представляет интерес следующая теорема.

---

* Точное установление оптимальных оценок представляет собой навряд ли практически выполнимую задачу. Однако уже в ближайшее время могли бы быть внесены изменения в систему ценообразования, которые несколько приблизили бы соотношения цен к соотношениям оценок и сделали бы их более пригодными для решения различных технико-экономических вопросов.

Теорема 6. Если матрица $\| \xi_{it} \|$ — решение задачи, определяемой условиями (1), (2), (3) при исходной матрице заданных ресурсов $\| \eta_{it}{}^0 \|$, а $\bar{\omega}^0$ — соответствующее этому решению значение целевой функции, то эта же матрица $\| \xi_{it} \|$ является решением «видоизмененной» задачи, в которой один из элементов матрицы заданных ресурсов — $\eta_{i_0 t_0}$ — рассматривается как переменная величина, и требуется при соблюдении (1), (2) и условия $\omega(\| \xi_{it} \|) = \bar{\omega}^0$ (21) получить экстремальное значение для $\eta_{i_0 t_0}$:

$$\eta_{i_0 t_0} = \min\ (\max) \tag{22}$$

(min, если $\zeta_{i_0 t_0} > 0$; max, если $\zeta_{i_0 t_0} < 0$).

Предполагается, что функция $\bar{\omega}(\| \eta_{it} \|)$ первоначальной задачи монотонна и что $\zeta_{i_0 t_0} \neq 0$.

Для доказательства сформулированной теоремы достаточно заметить, что значение элемента $\eta_{i_0 t_0}$ в исходной матрице первоначальной задачи, т. е. $\eta_{i_0 t_0} = \eta^0_{i_0 t_0}$, является искомым минимумом (максимумом) целевой функции видоизмененной задачи. В самом деле, при любом $\eta_{i_0 t_0} < \eta^0_{i_0 t_0}$ функция $\bar{\omega}^0(\| \xi_{it} \|)$ не может принять значения, равного или меньшего $\bar{\omega}^0$, так как $\omega(\| \xi_{it} \|)$ монотонна и $\dfrac{d\bar{\omega}}{d\eta_{i_0 t_0}} > 0$ (аналогичное положение справедливо для $\eta_{i_0 t_0} > \eta^0_{i_0 t_0}$ при $\zeta_{i_0 t_0} < 0$).

Рассматривая минимальную (максимальную) величину $\eta_{i_0 t_0}$ как функцию от возможных значений других элементов матрицы $\| \eta_{it} \|$, можем определить оптимальные оценки для видоизмененной задачи: $\zeta_{it}' = = \dfrac{\partial \bar{\eta}_{i_0 t_0}}{\partial \eta_{it}}$, где $\bar{\eta}_{i_0 t_0}$ — экстремальное значение $\eta_{i_0 t_0}$. Эти оценки связаны с оценками первоначальной задачи простым соотношением:

$$\zeta_{it}' = -\frac{\zeta_{it}}{\zeta_{i_0 t_0}}. \tag{23}$$

Формулу (23) легко получить следующим образом. Если какому-либо элементу η_{it} исходной матрицы $\| \eta_{it}{}^0 \|$ (помимо $\eta_{i_0 t_0}$) придать некоторое приращение, то, при неизменности остальных ее элементов, величина $\bar{\omega} = \bar{\omega}^0$ останется постоянной лишь при одновременном соответствующем изменении величины $\eta_{i_0 t_0}{}^0$, другими словами, лишь при соответствующем приращении значения целевой функции видоизмененной задачи ($\bar{\eta}_{i_0 t_0} = = \eta_{i_0 t_0}{}^0$). Это условие можно выразить дифференциальным уравнением

$$d\bar{\omega} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{\eta}_{i_0 t_0}} d\bar{\eta}_{i_0 t_0} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \eta_{it}} d\eta_{it} = 0. \tag{24}$$

Отсюда

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{\eta}_{i_0 t_0}} d\bar{\eta}_{i_0 t_0} = -\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \eta_{it}} d\eta_{it}. \tag{25}$$

Разделив обе части уравнения (25) на $\dfrac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{\eta}_{i_0 t}}\ d\eta_{it}$, получим

$$\frac{d\bar{\eta}_{i_0 t_0}}{d\eta_{it}} = -\frac{\dfrac{\partial \bar{\omega}}{\partial \eta_{it}}}{\dfrac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{\eta}_{i_0 t_0}}} = \frac{\zeta_{it}}{\zeta_{i_0 t_0}}, \tag{26}$$

что и доказывает справедливость формулы (23).

Поясним экономический смысл установленных положений.

В видоизмененной модели ставится задача определить наименьшее (берем случай $\zeta_{i_0t_0} > 0$) возможное значение $\eta_{i_0t_0}$ — одного из элементов матрицы $\|\eta_{it}\|$ (при постоянстве остальных ее элементов), при котором достигался бы заданный уровень удовлетворения потребностей общества $\omega = \bar{\omega}^0$. Разность между возможными значениями $\eta_{i_0t_0}$ и заданным наличием ресурса i_0 в момент t_0 согласно исходной матрице (т. е. разность $\eta_{i_0t_0} - \eta_{i_0t_0}{}^0$) можно интерпретировать как увеличение первоначально заданного наличия ресурса i_0 на момент t_0 или как безвозмездное дополнительное его поступление, а если эта разность отрицательна — как уменьшение наличия или как выдачу ресурса i_0 на сторону. Требуется, следовательно, найти, при каком наименьшем дополнительном поступлении ресурса i_0 в момент t_0 или при какой наибольшей его выдаче на сторону может быть достигнут уровень удовлетворения общественных потребностей, полученный при решении первоначальной задачи. Теорема утверждает, что минимальное значение $\eta_{i_0t_0}$ будет в точности равно соответствующему элементу исходной матрицы заданных ресурсов, т. е. что не только дополнительного поступления ресурса i_0 в момент t_0 не требуется, но и возможностей для высвобождения ресурса i_0 для выдачи его на сторону также нет. Другими словами, план, представленный матрицей $\| \xi_{it} \|$, полученной при решении первоначальной задачи, является самым экономным в отношении использования ресурса i_0 в году t_0 (при уровне удовлетворения общественных потребностей $\bar{\omega}^0$).

Поскольку все изложенное справедливо для любых i и t (при условии $\zeta_{it} \neq 0$), мы можем сказать, что оптимальный перспективный план $\| \xi_{it} \|$, обеспечивающий максимальное удовлетворение потребностей общества — максимум функции $\varphi(X_0{}^n, X_1{}^n, \ldots, X_{T-1}^n, X_T)$, является в то же время оптимальным планом и в том смысле слова, что означает максимально экономное использование любого из хозяйственных ресурсов в любой из моментов времени t (кроме ресурсов с нулевой оценкой, т. е. имеющихся в излишнем количестве).

Само собой очевидно, что все сказанное не зависит от вида функции φ (лишь бы она оставалась дифференцируемой) и, следовательно, модели, где требование максимума полезного эффекта выражается упрощенно (например, как максимизация продукции заданного ассортимента и т. п.), также могут рассматриваться как решение задач на наиболее экономное использование того или иного вида ресурсов (при фиксировании числовой величины полученного полезного эффекта в качестве обязательного требования).

Не трудно уяснить и экономический смысл оценок ζ_{it}'.

Оценка ресурса i на момент t в видоизмененной задаче ζ_{it}' представляет собой приращение целевой функции $\bar{\eta}_{i_0t_0} = \min(\eta_{i_0t_0})$, приходящееся на единицу приращения величины η_{it}. Это оценка показывает, какое дополнительное поступление со стороны в момент t_0 ресурса i_0 необходимо и достаточно, чтобы при неизменности остальных условий (в том числе при том же уровне удовлетворения общественных потребностей) обеспечить возможность в момент t выдать на сторону единицу ресурса i или, наоборот, какое количество ресурса i_0 в момент t_0 можно было бы высвободить, если бы в момент t поступила со стороны добавочная единица ресурса i. Другими словами, оценки ζ_{it}' определяют тот перерасход или экономию ресурса i_0 в году t_0, которые эквивалентны по своему значению для общества перерасходу или экономии единицы ресурса i в году t. Если, например, $\zeta_{i_1t_1}'$ вдвое больше чем $\zeta_{i_2t_2}'$, то это означает, что перерасход единицы ресурса i_1 в году t_1 требует вдвое большего дополнительного количества ресурса i_0 в году t_0, чем перерасход единицы ресурса i_2 в году t_2, а экономия единицы ресурса i_1 в году t_1 позволяет высвободить (сэкономить) в году t_0 вдвое больше ресурса i_0, чем экономия единицы ресурса i_2 в году t_2.

Если i_0 — производственный ресурс и момент t_0 предшествует t, то оценку ζ_{it}' можно рассматривать как *дифференциальную* (*предельную*) *затрату ресурса* i_0 (в году t_0) *на единицу ресурса* i (получаемого в году t).

Аналогичным образом можно интерпретировать экономический смысл оценок ζ_{it} первоначальной задачи. Они выражают дифференциальные (предельные) приращения целевой функции $\bar\omega = \max\{\omega(\| \xi_{it} \|\}$, связанные с приращениями величин η_{it}, т. е. с увеличением или уменьшением возможностей использования ресурсов i в моменты времени t. Функция ω — это уровень осуществления поставленных обществом целей (уровень удовлетворения общественных потребностей). Следовательно, ζ_{it} — это *дифференциальный* (*предельный*) *полезный эффект для общества единицы приращения ресурса i в момент t.*

Формула (23) показывает, что оценки ресурсов i в моменты времени t в видоизмененной задаче — ζ_{it} — равны их оценкам в первоначальной задаче ζ_{it}, взятым с обратным знаком и поделенным на оценку $\zeta_{i_0t_0}$ ресурса i_0, т. е. ресурса, вошедшего в целевую функцию видоизмененной задачи. Отсюда вытекает, что *в оптимальном плане дифференциальные затраты на различные хозяйственные ресурсы должны быть пропорциональны их дифференциальному полезному эффекту для общества* *.

ОБ ОТРАЖЕНИИ В МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО ХОЗЯЙСТВЕННОГО ПРОЦЕССА РЕСУРСОВ ТРУДА

Особое место среди всех хозяйственных ресурсов социалистического общества занимает труд. Ресурсы труда имеют сходство с некоторыми природными ресурсами (как, например, земля) в том отношении, что их количество на тот или иной момент времени не находится в такой непосредственной связи с хозяйственными планами предшествующих лет, как наличие свободно воспроизводимых средств производства: орудий труда, сырья, топлива и т. п. При анализе ряда экономических проблем допустимо поэтому принимать в соответствующих моделях количество труда (как и наличие земель с теми или иными природными свойствами) заданным, другими словами, считать соответствующие компоненты векторов X_t фиксированными, не зависящими от $X_{t-1}{}^m$.

Однако поступать таким образом можно лишь при схематическом рассмотрении труда как единого ресурса, без учета различных его видов, требующих различной квалификации. В этом случае зависимость трудовых ресурсов от хозяйственного процесса сводится лишь к влиянию экономики на движение народонаселения — влиянию крайне сложному, косвенному и сказывающемуся только через большие промежутки времени, что и позволяет в общих народнохозяйственных моделях считать трудовые ресурсы на каждый год заранее заданными величинами. При необходимости же учитывать различные виды труда подготовка и переквалификация рабочей силы оказываются существенными моментами, которые следует считать органической частью самого хозяйственного процесса и вводить в соответ-

---

* Из этого положения, в частности, следует, что если бы средние затраты труда на единицу продукции совпадали с дифференциальными затратами труда, то в оптимальном плане предельные эффекты различных видов общественной продукции были бы пропорциональны трудовым стоимостям. Доказательство такой пропорциональности для указанного частного случая приводилось математиком Н. А. Столяровым (1902 г.) и советским экономистом А. А. Конюсом (1957 г.).

ствующие экономико-математические модели. Труд будет отображаться в векторах X_t не одним, а рядом компонентов, которые при этом уже не являются заранее заданнными. Строго говоря, и упомянутые выше природные ресурсы (в частности, земельные участки) также частично зависят от хозяйственного процесса, от методов их предшествующего использования.

Основная специфика трудовых ресурсов, отличающая их от всех остальных факторов производства, связана с другим моментом, имеющим глубокое принципиальное значение. Затраты труда, в какой бы конкретной форме они ни производились, по выражению Маркса, «представляют собой производительное расходование человеческого мозга, мускулов, нервов, рук и т. д.» [3, т. 23, стр. 53], т. е. деятельность самих членов общества, благосостояние которых является «целевой функцией», «критерием оптимальности» социалистического хозяйства. Экономия любого средства производства имеет значение *не сама по себе*, а лишь в той мере, в какой она содействует росту конечной продукции, предназначенной для удовлетворения общественных потребностей. Задачей рациональной организации народного хозяйства в целом является *максимальное* использование каждого из наличных средств производства (воспроизводимых и невоспроизводимых). По-другому обстоит дело с трудом. Экономия труда представляет выигрыш для общества, если даже сэкономленный труд не будет применен на других участках хозяйства: увеличение досуга — это уже рост благосостояния членов общества. Мы стремимся использовать трудовые ресурсы — «производительно расходовать человеческий мозг, мускулы, нервы, руки и т. д.» — не в максимально возможном объеме, а лишь в той мере, в какой получаемый результат — полезный эффект от производимой продукции — оправдывает с точки зрения общества в целом трудовые затраты его членов.

Эту специфику труда можно отразить в общей модели оптимального хозяйственного процесса различным образом. Будем, например, считать, что компоненты $\xi_{i't}$ векторов X_t представляют собой число «потенциальных» человеко-часов труда, т. е. число часов, которыми располагало бы общество в интервале t, $t+1$, если бы возможна была непрерывная круглосуточная работа (в обобщенной модели в каждом векторе X_t будет один компонент $\xi_{i't}$, в более детализированной — по числу видов труда).

Эти потенциальные человеко-часы могут быть использованы частично в производственных процессах, частично для получения особого «предмета потребления» — «досуга». Число часов досуга за интервал $t-1$, t показывается как компонент $\xi_{i''t}$ вектора X_t. Число трудо-часов, запланированных для производственных целей на интервал $t-1$, t, будет равно $\xi_{i'(t-1)} - \xi_{i''t}$. Конкретное распределение трудовых ресурсов между различными производственными процессами точно так же, как и использование всех других производственных ресурсов, отразится на размерах получаемой к моменту t продукции и тем самым на компонентах вектора X_t.

Какая часть потенциальных трудо-часов за каждый год t будет действительно использована на производственные цели, а какая составит «досуг», определяется, как и весь перспективный план, требованием максимизации функции $\omega(\| \xi_{it} \|) = \varphi(X_0^n, X_1^n, \ldots, X_{T-1}^n, X_T)$. Это означает, что в оптимальном плане любое увеличение или уменьшение затрат труда за счет уменьшения или увеличения досуга не должно оказываться выгодным; другими словами, предельный отрицательный эффект для общества от увеличения рабочего дня должен быть равен предельному положительному эффекту от соответствующего увеличения продукции.

ОПТИМАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ И ОБЩЕСТВЕННО НЕОБХОДИМЫЕ ЗАТРАТЫ ТРУДА

Как уже указывалось, для того, чтобы при рассмотрении частных хозяйственных вопросов находить решения, которые в наибольшей степени отвечали бы общим интересам социалистического общества, требуется соизмерять затраты и результаты по отдельным мероприятиям на основе цен пропорциональных оптимальным оценкам. Чем ближе соотношения цен к соотношениям оценок, тем правильнее они отражают значение каждого элемента затрат и результатов для достижения народнохозяйственного оптимума. Между тем предложения рассматривать оптимальные оценки как теоретическую базу установления цен в социалистическом хозяйстве вызвали у ряда наших экономистов резкие возражения, как якобы несовместимые с экономическим учением Маркса (с законом экономии общественного труда, с понятием общественно необходимых трудовых затрат, с теорией трудовой стоимости).

Эти возражения представляются нам результатом недостаточно глубокого понимания экономического смысла оптимальных оценок и вульгаризации Марксовой теории трудовой стоимости.

Для выяснения соотношения между оценками и общественно необходимыми затратами труда возьмем в качестве критерия оптимальности для «видоизмененной задачи» (см. стр. 22—23) достижение заданного уровня удовлетворения общественных потребностей с минимальными затратами общественного труда; другими словами, под ресурсом i_0 в году t_0 будем подразумевать трудовые ресурсы общества (потенциальные трудо-часы) в некотором году t_0 (под t_0 можно, например, понимать первый год планируемого периода; если же речь идет о сопоставлениях затрат и результатов в рамках какого-либо одного года, то естественно этот год и обозначить через t_0).

Как вытекает из теоремы 6, оптимальный план, обеспечивающий максимальный уровень осуществления целей общества — $\bar{\omega}$ (максимум удовлетворения общественных потребностей) — будет в то же время и планом, минимизирующим величину $\eta_{i_0t_0}$, что в данном случае ($i_0 \equiv i'$) эквивалентно минимизации затрат совокупного общественного труда. Следовательно, цены, пропорциональные оценкам ζ_{it}, содействуя приближению развития хозяйства к оптимальному, т. е. наиболее соответствующему целям общества, являются тем самым и ценами, содействующими максимальной экономии общественно-необходимых затрат труда. Пропорциональность цен оптимальным оценкам не противоречит закону экономии труда, а, наоборот, является средством его осуществления.

Минимизация суммы общественно необходимого труда в масштабе всего народного хозяйства как раз и требует приближения цен к соотношениям оптимальных оценок.

Мало того, оптимальные оценки и соответствующие им цены обязательно будут *пропорциональны* общественно необходимым затратам труда, если под ними понимать предельные приращения труда в масштабе всего социалистического хозяйства, приходящиеся на единицу приращения того или иного ресурса. В самом деле, согласно формуле (23), оценки ζ_{it}, построенные на основе критерия, характеризующего уровень удовлетворения общественных потребностей, пропорциональны в то же время оценкам ζ_{it}' видоизмененной задачи. Поскольку в этой задаче в качестве целевой функции мы приняли экономию общественного труда (минимизацию $\eta_{i_0t_0}$, где под i_0 понимаются трудовые ресурсы), цены, пропорциональные оценкам ζ_{it}',— это цены, пропорциональные предельным приращениям общественного труда; другими словами пропорциональные *дифференциальным* общественно необходимым трудовым затратам *.

Приведенные рассуждения, разъясняющие связь оптимальных оценок с понятием общественно необходимого труда и задачей социалистического общества по минимизации трудовых затрат (в масштабе всего народного хозяйства), вряд ли покажутся убедительными некоторым нашим экономистам, отрицающим оптимальные оценки как важнейшую категорию социалистической экономики. В основе их критики лежит убеждение в том, что согласно учению Маркса цены при социализме должны тяготеть к *средним* затратам общественно необходимого труда. Между тем соотношения дифференциальных затрат могут заметно отклоняться от соотношений средних затрат. В самом деле, во-первых, это не средние затраты, а затраты на единицу «приращения» того или иного продукта. Так, например, увеличение плана производства угля в том или ином бассейне может требовать бо́льших затрат труда на одну тонну, чем средняя затрата из-за необходимости перехода к более глубоким пластам и т. д. (разумеется, при одном и том же уровне техники). А «приращение» перевозок между двумя пунктами, соединенными железнодорожной магистралью, наоборот, обходится значительно дешевле, чем средняя затрата на один тонно-километр.

Во-вторых, в средние общественно необходимые затраты в их обычном понимании включается труд — «живой» и овеществленный в средствах производства,— затрачиваемый именно на данный продукт в данной отрасли, а под приращениями общественно необходимого труда, которым пропорциональны оптимальные оценки, понимаются затраты труда в масштабе всего народного хозяйства, включая и так называемые «косвенные затраты» (термин Л. В. Канторовича, см. [2]). Увеличение производства любого продукта всегда связано с изменениями в количестве используемых в данной отрасли средств производства, как воспроизводимых, так и не воспроизводимых (естественные ресурсы), имеющихся в данный момент в ограниченном количестве. Тем самым уменьшаются возможности использовать эти средства производства на других участках народного хозяйства. А это приводит к необходимости пользоваться на этих участках менее совершенной техникой или более бедными естественными ресурсами, в результате чего общая сумма трудовых затрат возрастает. Таким образом, дифференциальные затраты общественно необходимого труда — это не только прямые, но и косвенные, отражающие взаимосвязь всех звеньев народного хозяйства, учитываемую при составлении и анализе оптимальных планов (матриц $\| \xi_{it} \|$ нашей модели) **.

Но действительно ли из теории стоимости Маркса вытекает, что установление цен, пропорциональных *средним* общественно необходимым затратам труда, должно являться основным принципом ценообразования в социалистическом обществе?

Как нам кажется, такого рода положение скорее соответствует не экономическому учению Маркса, а теоретическим построениям представителей мелкобуржуазного социализма. По мнению этих последних, обмен

---

* Соотношение оптимальных оценок и общественно необходимых затрат труда устанавливается в настоящей статье на основе общей динамической модели народного хозяйства с критерием «максимум удовлетворения общественных потребностей». Соответствующие положения были обоснованы В. В. Новожиловым в [4] применительно к статической модели с критерием «минимум затрат труда». См. также [5], где впервые был предложен термин «дифференциальные затраты труда».

** Количественные различия средних и дифференциальных затрат общественно необходимого труда проиллюстрированы на примере простейших линейных моделей в [1, гл. 15].

товарами в пропорциях, определяемых средними трудовыми затратами,— естественный экономический закон. Нарушения этого закона — основное зло капиталистической системы хозяйства. Социалистическое общество призвано устранить эти нарушения — обеспечить обмен всех товаров в точном соответствии с их истинной стоимостью, т. е. по средним затратам труда. Маркс и Энгельс беспощадно высмеивали подобные представления о стоимости и ее роли при социализме. Для них закон стоимости — специфический закон именно товарно-капиталистического хозяйства.

«Возводя этот закон,— пишет Энгельс в книге «Анти-Дюринг»,— в основной закон своей хозяйственной коммуны и требуя, чтобы она проводила его вполне сознательно, г-н Дюринг делает основной закон существующего общества основным законом своего фантастического общества» [3, т. 20, стр. 324]. «Желать уничтожения капиталистической формы производства при помощи установления «истинной стоимости» — это то же самое, что стремиться к уничтожению католицизма путем избрания «истинного папы» или пытаться создать общество, где производители будут, наконец, господствовать над своим продуктом, путем последовательного проведения в жизнь экономической категории, являющейся наиболее полным выражением того факта, что производители порабощены своим собственным продуктом [3, т. 20, стр. 322].

Основную особенность своей теории стоимости, в отличие как от классиков (Смит, Рикардо), так и от мелкобуржуазных социалистов, Маркс видел в том, что для него стоимость — это не «вечная» категория, а специфическая форма установления производственных отношений в товарно-капиталистическом хозяйстве. Приравнивая друг другу вещи-товары, относясь к товарам как к чему-то соизмеримому, как к носителям «стоимости», люди фактически соизмеряют свои трудовые затраты и осуществляют трудовые взаимоотношения друг с другом. Через изменения свойств вещей — цен товаров — происходит стихийное регулирование общественного процесса воспроизводства *. При этом цены не только в каждый данный момент отклоняются от стоимостей (без чего закон стоимости не выполнял бы своей роли стихийного регулятора), но в развитом капиталистическом хозяйстве и самые их колебания происходят вокруг цен производства, а не непосредственно вокруг величин стоимости.

Рассмотрение товаров как стоимостей, как вещных представителей («сгустков») общественно необходимого труда позволяет Марксу вскрыть сущность производственных отношений капиталистического общества: исследовать происхождение прибавочной стоимости (т. е. взаимоотношения капиталистов и рабочих) и дележку прибавочной стоимости между различными группами эксплуататорских классов (прибыль и ее формы, рента).

В отличие от товарно-капиталистического общества трудовые взаимоотношения людей при социализме осуществляются непосредственно, на основе сознательного планового руководства всей хозяйственной деятельностью. Стоимость перестает быть единственно возможной формой установления производственных отношений. «...взвешивание полезного эффекта и трудовой затраты при решении вопроса о производстве,— пишет Энгельс,— представляет собой все, что остается в коммунистическом обществе от такого понятия политической экономии, как стоимость...» [3, т. 20, стр. 321].

Маркс и Энгельс не могли предвидеть всех конкретных особенностей будущего общества. Опыт показал, что по крайней мере на первой ста-

* Для понимания сущности учения Маркса о стоимости как вещной форме осуществления производственных отношений в капиталистическом хозяйстве особенное значение имеет параграф о товарном фетишизме в первой главе «Капитала» [3, т. 23].

дии коммунистического строительства сохраняются товарно-денежные отношения. Приравнивание вещей-товаров друг к другу в определенных пропорциях является одним из орудий установления производственных взаимоотношений отдельных ячеек социалистического общества и средством экономических расчетов при выборе наиболее целесообразных вариантов хозяйственных мероприятий. Но при этом использование «стоимостных» категорий является не основной, а вспомогательной формой производственных отношений и осуществляется не в стихийном порядке, а сознательно, в неразрывной связи с планированием, которому принадлежит решающая роль во всей экономической жизни. Поэтому понять закономерности, исходя из которых следует решать проблемы использования при социализме стоимостных категорий, можно, лишь учитывая их новое назначение как орудий, содействующих плановому ведению хозяйства. Иной подход к проблеме был бы столь же неверен, как попытка понять земельную ренту при капитализме, исходя не из основных законов этой общественной формации, а из изучения феодальных отношений крестьянина и помещика, или построить теорию банковского кредита на основе изучения ростовщичества в средние века. Нам представляются в связи с этим противоречащими самому духу экономической методологии Маркса догматические требования строить плановые цены по средним трудовым затратам, т. е. ориентируясь на закономерности простого товарного хозяйства, или по ценам производства, к которым тяготеют цены при капитализме *.

Закономерности социалистического ценообразования должны выводиться из сущности социалистической экономики, как оптимизируемой в плановом порядке хозяйственной системы и из той роли, которую могут и должны играть цены в приближении фактического развития хозяйства к оптимальному. Как указывалось выше, чем ближе цены к соотношениям оптимальных оценок или, другими словами, к дифференциальным затратам общественно необходимого труда, тем в бóльшей степени отвечают они задачам оптимизации социалистического хозяйства.

Некоторые экономисты и математики, признающие первостепенное значение для социалистической системы хозяйства теории оптимальных оценок (объективно обусловленных оценок, по терминологии Л. В. Канторовича), и в первую очередь основоположник этой теории — Л. В. Канторович, пытаются доказывать равенство оценок (или дифференциальных общественно необходимых затрат труда) величинам стоимости, истолковывая соответствующим образом самое понятие среднего общественно необходимого труда [2, стр. 296—300]. Такие попытки связаны, как нам кажется, с тем же упрощенным пониманием теории стоимости Маркса, как и у критиков объективно обусловленных оценок, т. е. с признанием необходимости якобы точного совпадения цен или, по меньшей мере, их средних уровней с величинами стоимости.

В свое время, до выхода в свет третьего тома «Капитала» делались различные попытки устранить «противоречие» между законом трудовой стоимости и тем фактом, что средний уровень цен в каждой отрасли производства зависит от органического состава капитала («цены производства»). Некоторые авторы объясняли это обстоятельство тем, что труд с большей технической вооруженностью — в отраслях высокого органического строения капитала — «создает» за одно и то же время бóльшую стоимость, чем в отраслях с низким органическим составом, представляет

* Мы готовы, однако, признать, что второе предложение имеет больше оснований, так как при соблюдении некоторых условий могло бы содействовать приближению цен к соотношениям оптимальных оценок.

собой большее количество общественно необходимого труда. Точно так же из рассуждений Л. В. Канторовича вытекает, что час труда, производящего продукты с относительно высокой оптимальной оценкой, представляет собой бóльшую общественно необходимую затрату, чем час труда при производстве продукта с меньшей оценкой. При этом одним из важнейших факторов, приводящим к этим различиям и в данном случае, является неодинаковая техническая вооруженность труда в разных отраслях производства.

В предисловии к третьему тому «Капитала» Энгельс еще в 1894 г. указал на несоответствие подобной трактовки понятий «общественно необходимый труд» и «величина стоимости» концепции Маркса [3, т. 25, стр. 3—26]. Различия в уровнях цен, связанные с органическим строением капитала, не являются для Маркса выражениями различий в величинах создаваемой трудом стоимости: они рассматриваются им как закономерные отклонения цен от стоимостей. Попытки доказать, будто в социалистическом хозяйстве цены, пропорциональные оптимальным оценкам, тем самым пропорциональны и величинам стоимости, столь же неверны и также мало вытекают из требований марксистской теории, как и раскритикованные Энгельсом попытки доказать аналогичное положение для цен производства.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Л. Лурье. О математических методах решения задач на оптимум при планировании социалистического хозяйства. М., «Наука», 1964.
2. Л. В. Канторович. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М., Изд-во АН СССР, 1959.
3. К. Маркс и Ф. Энгельс. Сочинения в 36 томах. Изд. 2-е. М., Госполитиздат, 1955—1964.
4. В. В. Новожилов. Теория трудовой стоимости и математика. Вопр. экономики, 1964, № 12.
5. В. В. Новожилов. Измерение затрат и их результатов в социалистическом хозяйстве. В сб. Применение матем. в эконом. исслед. М., Соцэкгиз, 1959.

Поступила в редакцию
13 VII 1965