ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1965 том I, вып. 1

ПРОБЛЕМЫ ОПТИМАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ ПОТРЕБЛЕНИЯ

МИХАЛ КАЛЕЦКИЙ

(*ПОЛЬША*)

1. В связи с последними достижениями в разработке методов линейного программирования и применении вычислительных машин в настоящее время часто обсуждаются проблемы оптимизации национального дохода. Если наряду с темпами роста национального дохода известна структура потребления, то оптимизация национального дохода в перспективном плане в конечном счете приводит к выбору наиболее эффективной техники производства и наиболее эффективной структуры внешней торговли. Однако, если не существует каких-либо априорных предположений относительно структуры потребления и этот компонент национального дохода сам подлежит оптимизации, то оптимизация перспективного плана может привести к ошибочным результатам, в особенности если национальный доход выражен в неизменных ценах (например, в ценах 1960 г.). В самом деле, максимальное соотношение между стоимостью потребляемых товаров и издержками их производства дается такой структурой потребления, при которой большой удельный вес имеют товары, характеризующиеся наиболее высоким соотношением цены (например, цены 1960 г.) и издержек производства. Но если, например, лезвия для бритв оказываются с этой точки зрения наиболее «прибыльным» товаром, то «оптимальная» структура потребления должна была бы включать этот единственный товар, что является явно абсурдным.

2. Такой парадокс — результат ошибочного приравнивания каких-либо двух вариантов потребления, основанного на равенстве их стоимостей в неизменных ценах, принятых в качестве «базисных». Ясно ведь, что фактическое потребление в данном году не может быть эквивалентно выражено потреблением бритвенных лезвий, даже если последнее равно по стоимости фактическому потреблению в «базисных» ценах. И даже если варианты потребления не различаются столь разительно, все же определение эквивалента потребленных товаров путем расчета в неизменных ценах приводит к явным противоречиям.

Обозначим через A набор продуктов, потребляемых в данном году, и через B — другой набор, равный первому по стоимости, в ценах реализации набора A. Примем, что A эквивалентен B. Допустим далее, что на следующий год на рынок поставляется набор B. Цены реализации будут несомненно иными, ибо структура поставляемого набора иная. Если теперь выразить стоимость набора A в ценах реализации набора B, то стоимости этих двух наборов уже не будут равными. Такое равенство возможно лишь в одной системе цен. Это можно показать на следующем простом примере.

Потребление складывается лишь из двух продуктов — 1 и 2. Их количества и цены обозначаются соответственно через q_{1A}, q_{2A}, p_{1A}, p_{2A} — для набора A и q_{1B}, q_{2B}, p_{1B}, p_{2B} — для набора B. Стоимость потребляемых товаров в ценах реализации равняется для набора A величине

$p_{1A}q_{1A}+p_{2A}q_{2A}$, а для набора B величине $p_{1A}q_{1B}+p_{2A}q_{2B}$. Считая эти стоимости равными, получаем

$$p_{1A}q_{1A}+p_{2A}q_{2A}=p_{1A}q_{1B}+p_{2A}q_{2B}$$

и следовательно:

$$p_{1A}(q_{1A}-q_{1B})=p_{2A}(q_{2A}-q_{2B})$$

или

$$\frac{q_{2A}-q_{2B}}{q_{1A}-q_{1B}}=-\frac{p_{1A}}{p_{2A}}. \qquad (1)$$

Таково условие эквивалентности наборов A и B. Но если набор B отличен от A, то и соотношение их цен реализации также отлично. Таким образом:

$$\frac{p_{1A}}{p_{2A}}\neq\frac{p_{1B}}{p_{2B}}.$$

Отсюда

$$\frac{q_{2A}-q_{2B}}{q_{1A}-q_{1B}}\neq-\frac{p_{1B}}{p_{2B}}.$$

Поэтому

$$p_{1B}q_{1A}+p_{2B}q_{2A}\neq p_{1B}q_{1B}+p_{2B}q_{2B}.$$

Это показывает, что стоимости наборов A и B не равны, если их выразить в ценах реализации набора B.

3. Однако существует одно условие, когда указанное противоречие не возникает, а именно, когда структуры наборов A и B весьма сходны, т. е. когда $q_{1B}=q_{1A}+\Delta q_{1A}$ и $q_{2B}=q_{2A}+\Delta q_{2A}$, где Δq_{1A} и Δq_{2A} — малые величины. Тогда различия в ценах весьма невелики:

$$p_{1B}=p_{1A}+\Delta p_{1A} \text{ и } p_{2B}=p_{2A}+\Delta p_{2A}.$$

Формулу (1), выражающую условие равенства стоимостей наборов A и B в ценах реализации набора A, можно теперь записать в следующем виде:

$$\frac{\Delta q_{2A}}{\Delta q_{1A}}=-\frac{p_{1A}}{p_{2A}}. \qquad (2)$$

Условие равенства стоимостей наборов A и B в ценах реализации набора B таково:

$$\frac{\Delta q_{2A}}{\Delta q_{1A}}=-\frac{p_{1A}+\Delta p_{1A}}{p_{2A}+\Delta p_{2A}}. \qquad (3)$$

Отношение $\frac{p_{1A}+\Delta p_{1A}}{p_{2A}+\Delta p_{2A}}$ отличается от $\frac{p_{1A}}{p_{2A}}$ лишь на весьма малую величину ε.

Приведенные два критерия эквивалентности здесь практически совпадают. Лучше всего это можно увидеть, переписав формулы (2) и (3) следующим образом:

$$\Delta q_{2A}=-\frac{p_{1A}}{p_{2A}}\Delta q_{1},$$

$$\Delta q_{2A}=-\frac{p_{1A}}{p_{2A}}\Delta q_{1A}-\varepsilon\Delta q_{1A},$$

где $\varepsilon\Delta q_{1A}$ — малая величина второго порядка, которой можно пренебречь.

Это дает возможность по-новому подойти к проблеме эквивалентности структур потребления. От структуры (q_{1A}, q_{2A}) с ценами реализации p_{1A} и p_{2A} мы переходим к другой, весьма сходной структуре $(q_{1A}+\Delta q_{1A},\ q_{2A}+\Delta q_{2A})$, в которой $\Delta q_{2A} = -(p_{1A}/p_{2A})\Delta q_{1A}$. Цены в этой новой структуре равняются $p_{1A}+\Delta p_{1A}$, $p_{2A}+\Delta p_{2A}$. Далее действуем по тому же принципу: приращения количеств обоих товаров имеют разные знаки и обратно пропорциональны текущим ценам. По такой цепочке эквивалентных структур потребления можно перейти от набора $A(q_{1A}, q_{2A})$ к набору $B(q_{1B}, q_{2B})$, причем разность $q_{1B} - q_{2B}$ не будет уже весьма малой величиной. Двигаясь в обратном направлении по этой цепочке эквивалентных структур потребления, мы вернемся к набору $A(q_{1A}, q_{2A})$. В самом деле, если восстановить последовательные этапы перехода от B к A, то приращение Δq_2 будет отличаться (по своему абсолютному значению) от соответствующего приращения на переходе от A к B лишь на малую величину второго порядка $\varepsilon\Delta q_1$. Сумма этих малых величин второго порядка для всего перехода от B к A будет малой величиной первого порядка. Так, используя этот метод, мы можем вернуться к набору $A(q_{1A}, q_{2A})$, не допуская больших отклонений. При этом мы не испытаем тех трудностей, которые встречаются при определении эквивалентности наборов A и B в виде равенства стоимостей и при выражении этих стоимостей в ценах реализации одного из двух наборов.

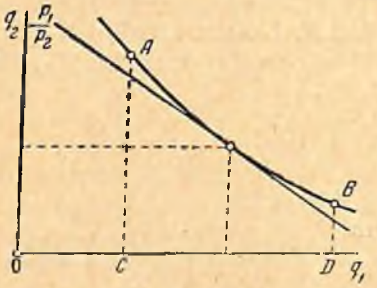

Рис. 1. Схема перехода от набора A к набору B

Покажем переход AB на рисунке. Хотя приводимый анализ относится к двухпродуктовым наборам, его можно распространить и на многопродуктовые наборы.

4. Нанесем q_1 (количество товара 1) на ось абсцисс и q_2 (количество товара 2) на ось ординат. Точка $A(q_1, q_2)$ соответствует набору этих двух товаров (набору A). Пусть q_1 линейно возрастает от OC до OD. Малая величина Δq_2 относится к величине Δq_1 следующим образом:

$$\frac{\Delta q_2}{\Delta q_1} = -\frac{p_1}{p_2}, \tag{4}$$

где p_1/p_2 — соотношение цен в наборе A. Кривая AB, получаемая в процессе перехода, является понижающейся (приращение Δq_2 отрицательно), и тангенс угла наклона касательной к этой кривой в точке A равен p_1/p_2 (рис. 1).

Из определения следует, что точки кривой AB представляют собой эквивалентные наборы потребительских товаров. Можно также отметить, что при перемещении по этой кривой от A к B отношение p_1/p_2 уменьшается с увеличением сбыта q_1 товара 1 и с уменьшением сбыта q_2 товара 2. Таким образом, абсолютное значение тангенса наклона касательной (равное p_1/p_2) уменьшается с переходом от A к B. Следовательно, кривая является вогнутой*.

* Дифференциальное уравнение кривой AB может быть выведено следующим образом: величина p_1/p_2 есть функция q_1 и q_2, которая обозначается через f. Используя уравнение (4), можем записать:

$$\frac{\Delta q_2}{\Delta q_1} = -f(q_1, q_2).$$

Построенная таким образом кривая AB имеет те же характеристики, что и известная в буржуазной экономической науке «кривая безразличия» [1]. Но эта последняя выводится из совершенно других посылок. Кривая безразличия представляет агрегат наборов двух продуктов q_1 и q_2, рассматриваемых потребителями как эквивалентные. То, что наклон касательной в точке (q_1, q_2) соответствует отношению p_1/p_2 (где p_1 и p_2 — цены реализации), определяется предпосылкой оптимальности выбора потребителя. Эта теория вызывает ряд возражений общего порядка.

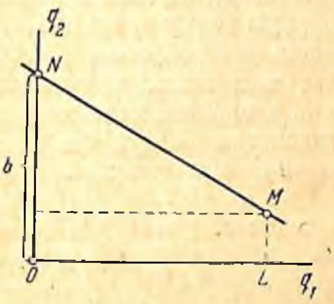

Рис. 2

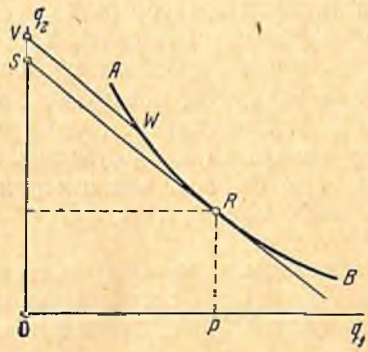

Рис. 3

Рис. 2. Схема изменения суммарных издержек производства двух товаров при заданном соотношении удельных издержек на каждый из них и изменяющемся наборе товаров

Рис. 3. Схема нахождения набора из двух товаров, минимизирующего суммарные издержки их производства

Наши посылки по своему характеру совершенно иные: мы просто пытаемся найти определение эквивалентности, которое элиминировало бы противоречия при сопоставлении наборов потребительских товаров по стоимостям, измеряемым в неизменных ценах. Наклон касательной в точке (q_1, q_2), соответствующий отношению p_1/p_2, находится непосредственно из приведенного определения.

5. Перейдем к основному предмету настоящей статьи — задаче выбора такого из эквивалентных (в смысле приведенного определения) наборов продуктов 1 и 2, который отличался бы наименьшими издержками производства.

Обозначим через E_1 и E_2 наблюдающиеся в течение длительного времени затраты на производство единиц продуктов 1 и 2 (включая капитальные затраты) так, как это делается при оценке эффективности капиталовложений [2]. Суммарные (в этом смысле) издержки производства набора q_1 и q_2* равны $E_1q_1 + E_2q_2$. Эту величину можно показать на диаграмме следующим образом.

Нанесем на диаграмму прямую, наклонную в отношении оси абсцисс под углом, тангенс которого соответствует отношению E_1/E_2 и проходящую через точки $M(q_{1M}, q_{2M})$. Рис. 2 показывает, что $E_1q_{1M} + E_2p_{2M} \neq$ $\neq E_2 \ b$, где b — расстояние ON от начала координат до пересечения прямой NH с осью ординат (рис. 2). В самом деле, уравнение прямой NM таково:

$$q_2 = -(E_1/E_2) \cdot q_1 + b,$$

* В советской литературе по эффективности капитальных вложений они обычно называются приведенными издержками.— *Ред.*

а поскольку NM проходит через точку (q_{1M}, q_{2M}), то

$$q_{2M} = -E_1 / E_2 \cdot q_{1M} + b.$$

Отсюда:

$$E_1 q_{1M} + E_2 q_{2M} = E_2 \cdot b.$$

Линию NM можно назвать прямой издержек производства.

Теперь мы можем найти вариант структуры потребления, требующий минимальных издержек производства. Рис. 3 показывает, что эта структура будет соответствовать точке R, в которой прямая RS издержек производства (наклон которой равен $-E_1 / E_2$) касается кривой AB эквивалентных вариантов потребительских наборов. В самом деле, если прямая издержек производства проходит через любую другую точку кривой AB, например через точку W, она будет отсекать больший отрезок оси ординат $(OV > OS)$. Это означает, что при данных издержках производства на единицу товара E_1 и E_2 суммарные издержки производства набора товаров q_{1W}, q_{2W} больше, чем издержки производства набора q_{1R}, q_{2R}. Следовательно, минимум суммарных издержек производства находится в точке R.

Напомним, что наклон касательной в точке R равен p_{1R} / p_{2R}. Следовательно, в точке R соотношение цен реализации должно равняться соотношению удельных издержек производства

$$\frac{p_{1R}}{p_{2R}} = \frac{E_1}{E_2}$$

или

$$\frac{p_{1R}}{E_1} = \frac{p_{2R}}{E_2}.$$

Это показывает, что для варианта потребления, характеризующегося минимальными издержками производства, цены реализации пропорциональны издержкам на единицу товара.

6. До сих пор мы рассматривали наборы, состоящие из двух товаров. В практике встречаются наборы многих товаров. И в этом случае можно (теоретически) определить агрегат наборов, эквивалентных данному, используя положение о том, что два незначительно отличающихся друг от друга набора могут иметь одинаковые стоимости в ценах реализации одного из них. Поскольку цены реализации этих двух наборов различаются лишь незначительно, то и их стоимости в ценах реализации второго набора также будут равны (если пренебречь малыми величинами второго порядка). Эти наборы, близко сходные друг с другом, не образуют цепочки, изображаемой линией AB, как это происходит в случае двух товаров. Если число продуктов равняется n, то точки в n-мерном пространстве соответствуют эквивалентным наборам, расположенным на $(n-1)$-мерной поверхности.

При некоторых предположениях правило о том, что варианты потребления, требующие минимальных издержек производства, характеризуются ценами реализации $p_{1R}, p_{2R}, \ldots, p_{nR}$, которые пропорциональны удельным издержкам производства $E_1, E_2, \ldots, E_n$, приложимо и к общему случаю.

Возьмем первоначальный вариант A, для которого цены реализации не пропорциональны издержкам производства на единицу товара. Такой вариант не может характеризоваться минимальными издержками, потому что их можно уменьшить, перейдя к ближайшему эквивалентному варианту A', в котором удельный вес более «прибыльных» товаров выше, чем в варианте A. В самом деле, стоимость набора A в ценах $p_{1A}, p_{2A}, \ldots, p_{nA}$ равна (по определению эквивалентности вариантов) стоимости набора A, но суммарные издержки производства ниже, ибо товары, для которых величина p_A / E относительно высока, имеют здесь больший удельный вес, чем в наборе A.

Мы можем идти в этом направлении до тех пор (путем уменьшения соотношения цен более и менее «прибыльных» товаров), пока отношение цен реализации не станет равным отношениям удельных издержек производства (думается, что процесс пойдет именно в этом направлении). В некоторой точке R уже не будет возможным далее изменять наборы продуктов так, чтобы суммарные издержки производства сократились еще больше.

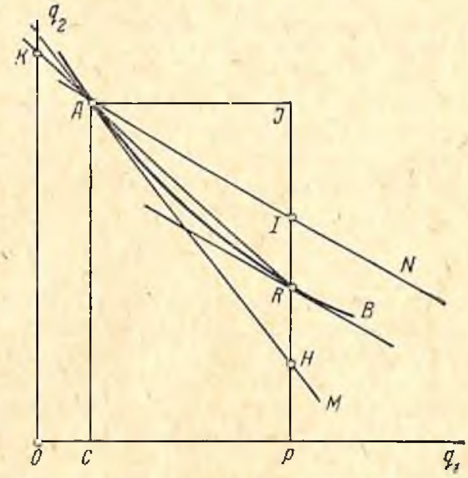

Рис. 4. Общая схема определения оптимального варианта потребления

7. Возникает вопрос, как можно, используя этот критерий, оптимизировать на практике структуру потребления с точки зрения уровня издержек производства.

Предположим, что имеется некоторый многопродуктовый набор A и его цены реализации $p_{1A}, p_{2A}, \ldots, p_{nA}$. Задача состоит в том, чтобы найти другой набор, эквивалентный (в смысле приведенного выше определения) набору A, цены реализации которого были бы пропорциональны удельным издержкам производства $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Это потребовало бы прежде всего определения координат многочисленных точек упомянутой выше $(n-1)$-мерной поверхности, а затем нахождения точки, которой соответствовали бы цены реализации, пропорциональные $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Очевидно, что такой метод не пригоден для практического применения. Следовательно, необходимо рассмотреть ряд радикальных упрощений. Для этого вновь вернемся к двухпродуктовой схеме.

Изобразим кривую эквивалентных вариантов потребления AB (рис. 4). Примем A в качестве первоначального набора товаров, цены которого p_{1A} и p_{2A} известны. Тангенс угла наклона касательной AM к этой кривой в точке A равен $-p_{1A} / p_{2A}$. В точке R суммарные издержки производства минимальны, тангенс угла наклона касательной к кривой AB в этой точке равен $-E_1 / E_2$. Проведем через точку A прямую AN, параллельную этой касательной. Обозначим через H и I точки пересечения прямых AM и AN с вертикалью, проходящей через точку R. Известно, что если AR — дуга параболы с вертикальной осью, то R расположена в середине отрезка HI. Предположим, — а это правдоподобно, — что кривая AB может быть аппроксимирована именно такой дугой, и, следовательно, точка R расположена недалеко от середины отрезка HI. Отсюда получаем хорошую аппроксимацию:

$$\frac{JR}{AJ} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{JI}{AJ} + \frac{JH}{AJ} \right).$$

Но JI / AJ равно E_1 / E_2, а JH / AJ равно p_{1A} / p_{2A}. Стало быть:

$$\frac{JR}{AJ} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{E_1}{E_2} + \frac{p_{1A}}{p_{2A}} \right).$$

Прибегнем еще к одной аппроксимации, заменяя средние арифметические величины E_1 / E_2 и p_{1A} / p_{2A} их средними геометрическими (что вполне допустимо, когда соотношения E_1 / E_2 и p_{1A} / p_{2A} не слишком отличаются друг от друга, т. е. когда одно из них не превосходит другое, скажем, вдвое). Тогда получим:

$$\frac{JR}{AJ} = \sqrt{\frac{E_1 \cdot p_{1A}}{E_2 \cdot p_{2A}}}.$$

Тангенс угла наклона прямой AR, равный $-JR / AJ$, приблизительно равняется

$$-\sqrt{\frac{E_1 \cdot p_{1A}}{E_2 \cdot p_{2A}}}.$$

Следовательно, уравнение прямой AR таково:

$$q_2 = -\sqrt{\frac{E_1 \cdot p_{1A}}{E_2 \cdot p_{2A}}} \cdot q_1 + b,$$

где величина b равна отрезку OK.

Поскольку точки A и R находятся на одной прямой, то $\sqrt{E_1 \cdot p_{1A}} \cdot q_{1A} + \sqrt{E_2 \cdot p_{2A}} \cdot q_2 = b\sqrt{E_2 p_{2A}} = -\sqrt{E_1 p_{1A}} \cdot q_{1R} + \sqrt{E_2 p_{2A}} \cdot q_{2R}$.

Это уравнение означает, что стоимости наборов A и R в ценах $\sqrt{E_1 \cdot p_{1A}}$ и $\sqrt{E_2 \cdot p_{2A}}$ приблизительно равны. Иными словами, стоимость набора R в ценах $\sqrt{E_1 \cdot p_{1A}}$ и $\sqrt{E_2 \cdot p_{2A}}$, т. е. в измерителях, выражающих средние геометрические цен реализации набора A и удельных издержек производства, равна (приблизительно) стоимости набора A в тех же ценах G_A, т. е.

$$G_A = q_{1R}\sqrt{E_1 \cdot p_{1A}} + q_{2R}\sqrt{E_2 \cdot p_{2A}}.$$

Таково первое условие приближения к оптимальному варианту потребления. Второе условие — пропорциональность цен реализации набора R удельным издержкам E_1 и E_2. Таким образом, теперь мы приходим к более типичной задаче определения структуры потребления. «Реальная» стоимость набора потребительских товаров, т. е. его стоимость в неизменных ценах — в данном случае в ценах $\sqrt{E_1 p_{1A}}$ и $\sqrt{E_2 p_{2A}}$ — становится известной, как только определены цены реализации (в данном случае пропорциональные удельным издержкам E_1 и E_2) и количества двух продуктов q_{1R} и q_{2R}. Для этого, разумеется, необходимо знать, с одной стороны, соотношение между объемом потребления одного из продуктов, скажем, q_{1R} и «реальной» суммарной стоимостью G_A и, с другой стороны, соотношение цен p_1 / p_2.

8. **Представляется возможным использовать тот же метод для многопродуктовых наборов потребительских товаров; это можно сделать следующим образом.** В этом случае стоимость G_A первоначального набора A в ценах, которые являются средними геометрическими цен реализации и удельных издержек производства, должна быть приблизительно равна стоимости оптимального варианта R в этих ценах. Таким образом, имеем:

$$G_A = q_{1R}\sqrt{E_1 p_{1A}} + q_{2R}\sqrt{E_2 p_{2A}} + \ldots + q_{nR}\sqrt{E_n p_{nA}}.$$

Эта гипотеза еще должна быть подтверждена. Если она будет принята, то приблизительное определение структуры потребления, требующей минимума суммарных издержек, в перспективном планировании может производиться следующим образом.

Первоначальная структура потребления A, например, структура на 1980 г., выраженная в ценах 1960 г., устанавливается на основе семейных бюджетов, соответствующих доходу на душу населения, намеченному на 1980 г. Эти цены будут, следовательно, равны $p_{1A}, p_{2A}, \ldots, p_{nA}$, так как это есть цены реализации, соответствующие фактической структуре потребления 1960 г. в том виде, в каком она отражается в семейных бюджетах. Далее определяются удельные издержки $E_1, E_2, \ldots, E_n$ по принципам, применяемым при расчете эффективности капиталовложений.

Следующий этап — расчет стоимости G_A набора A в ценах $\sqrt{E_1p_{1A}}$, $\sqrt{E_2p_{2A}}, \ldots, \sqrt{E_np_{nA}}$. Наконец, мы пытаемся найти такой набор R продуктов $q_{1R}, q_{2R}, \ldots, q_{nR}$, стоимость которого, измеренная в указанных ценах, равна G_A, а цены реализации пропорциональны $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Разумеется, применение такого метода предполагает знания соотношения между потреблением данного товара и «реальной» стоимостью агрегатного набора потребительских товаров (G_A), с одной стороны, и структуры цен — с другой.

9. Мы не принимали в расчет возможных пределов потребления отдельных продуктов, которые определяются физиологическими, культурными и иными соображениями. Если в оптимальном варианте потребление соответствующих товаров ниже этих пределов, то описанный метод не требует никакой модификации. В противном случае поправки окажутся необходимыми. Однако эта проблема выходит за пределы настоящей статьи, основная цель которой — наметить общий подход к вопросу о структуре потребления, приводящей к минимальным издержкам производства.

Но даже и на этой стадии ясно, что должна быть проведена еще большая работа, прежде чем вычислительные машины приступят к расчету оптимальной структуры потребления. И в отношении теории и с точки зрения доступности статистических данных мы еще весьма далеки от возможности надлежащим образом «загрузить» электронные вычислительные машины. И пока в этом направлении не будет достигнуто существенного прогресса, передача работы вычислительным машинам, как и во многих других случаях, может пойти лишь во вред реализации наших, пока еще незрелых, идей.

ЛИТЕРАТУРА

1. I. M. D. Little. A Critique of Welfare Economics. Oxford, 1957.
2. Metodyka ogólna w sprawie badań efektywności inwestycji. Komisja planowania Rady Ministrów PRL. Warszawa, 1962. (Имеется русский перевод, сделанный ВИНИТИ.— *Прим. ред.*).

Поступила в редакцию
21 IX 1964