ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1965 том I, вып. 1

КОНЕЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТРАНСПОРТНОГО ТИПА

С. С. ЛЕБЕДЕВ

В настоящей статье предлагается для решения особого вида задач выпуклого программирования применить метод последовательного улучшения плана, являющийся обобщением хорошо известного метода линейного программирования.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Рассматривается задача нахождения минимального значения функции

$$F(x)=\sum_{j=1}^{n} f_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_{ij}\right)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=b_i; \qquad i=1,\ldots,m; \tag{2}$$

$$x_{ij}\geqslant 0; \qquad i=1,\ldots,m; \qquad j=1,\ldots,n. \tag{3}$$

Предполагается, что функции $f_j(x)$ $(j=1,\ldots,n)$ строго выпуклы и имеют непрерывные первые производные во всей области определения, а постоянные a_{ij}, b_i положительны. К задаче вида (1) — (3) сводятся многие экономические модели управления, например так называемая стохастическая транспортная задача [1, гл. 7, п. 3, 2], [2]. Другим примером является задача, рассмотренная в работе [3]. Существующие методы решения этих задач по своему характеру являются бесконечными сходящимися итерационными процессами.

В условия оптимальности Куна — Таккера [4] для задачи (1) — (3), помимо ограничений (2), (3), войдут следующие соотношения:

$$a_{kj}f_j'\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_{ij}\right)+c_{kj}=\lambda_k, \qquad \text{если } x_{kj}>0, \tag{4}$$

$$a_{kj}f_j'\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_{ij}\right)+c_{kj}\geqslant\lambda_k, \qquad \text{если } x_{kj}=0. \tag{5}$$

Здесь λ_k, $k=1,\ldots,m$ — обобщенные множители Лагранжа, или *оценки* условий (2).

Обозначим для произвольного плана задачи $x=\{x_{ij}\}$ через $E(x)$ множество всех переменных x_{ij}, для которых выполняются условия (4), и некоторых нулевых переменных, для которых условия (5) выполняются в виде равенств. Назовем *цепочкой* такую последовательность элементов $E(x)$, в которой каждые два соседних элемента имеют общим один из индексов, причем из двух соседних пар одна имеет общий индекс i, а вторая — j. Цепочка называется **замкнутой**, если ее начальный элемент совпадает с конечным. Подмножество $E'(x)$ множества $E(x)$ называется **связным**, если любые два элемента из $E'(x)$ можно соединить хотя бы одной цепочкой, т. е. существует такая цепочка элементов из $E'(x)$, что заданные два элемента являются ее началом и концом. Максимальные связные подмножества множества $E(x)$ назовем его **компонентами**. Если $E(x)$ связно, то оно состоит из единственной компоненты. Максимальное число компонент равно $\min(m, n)$. Если компонента не содержит ни одной замкнутой цепочки, она называется **деревом**. **Висячим** элементом компоненты называется такой ее элемент, который в любой из цепочек может быть только либо начальным, либо конечным элементом.

Лемма 1 [5, гл. 16, теорема 2]. *Среди элементов дерева имеются по меньшей мере два висячих элемента.*

Из леммы 1 легко получить индукцией по числу элементов дерева следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть элементы дерева $D \subset E(x)$ расположены на пересечении k строк и r столбцов матрицы $\| x_{ij} \|$. Тогда число элементов дерева равно $k + r - 1$.*

Поскольку $f_j(x)$ строго выпуклы, функции $f_j'(x)$ являются монотонно возрастающими. Обозначим $g_j(x) = f_j'^{-1}(x)$. Тогда условия (4) можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ij} = g_j\left(\frac{\lambda_k - c_{kj}}{a_{kj}}\right) \qquad (x_{kj} \in E(x)). \tag{6}$$

Если в множестве $E(x)$ есть два или более элемента с общим индексом j, то оценки условий в которые входят эти элементы, связаны простыми соотношениями. Действительно, пусть $x_{i_1 j} \in E(x)$ и $x_{i_2 j} \in E(x)$. Тогда из условий (6) ввиду равенства левых частей получаем:

$$g_j\left(\frac{\lambda_{i_1} - c_{i_1 j}}{a_{i_1 j}}\right) = g_j\left(\frac{\lambda_{i_2} - c_{i_2 j}}{a_{i_2 j}}\right).$$

Поскольку функции $g_j(x)$ являются монотонно возрастающими,

$$\frac{\lambda_{i_1} - c_{i_1 j}}{a_{i_1 j}} = \frac{\lambda_{i_2} - c_{i_2 j}}{a_{i_2 j}}. \tag{7}$$

Рассмотрим теперь цепочку элементов из $E(x)$: $x_{i_1 j_1} \to x_{i_2 j_1} \to x_{i_2 j_2} \to \ldots$ $\ldots \to x_{i_{k-1} j_{k-1}} \to x_{i_k j_{k-1}}$. Элементы с общим индексом i входят в одно и то же уравнение системы (2) и им соответствует одна и та же оценка. При помощи соотношений (7), выписанных для каждой пары элементов цепочки с общим индексом j, можно последовательно выразить все оценки, соответствующие элементам цепочки, через одну из них, например λ_{i_1},

$$\lambda_{i_r} = \lambda_{i_1} \prod_{s=1}^{r-1} \frac{a_{i_{s+1} j_s}}{a_{i_s j_s}} + C[i_1, j_1, i_2, j_2, \ldots, j_{r-1}, i_r], \qquad r = 2, \ldots, k, \tag{8}$$

где

$$C[i_1, j_1, i_2, j_2, \ldots, j_{r-1}, i_r] = \sum_{l=2}^{r-1} (c_{i_l j_{l-1}} - c_{i_l j_l}) \prod_{s=l}^{r-1} \frac{a_{i_{s+1} j_s}}{a_{i_s j_s}} -$$
$$- c_{i_1 j_1} \prod_{s=1}^{r-1} \frac{a_{i_{s+1} j_s}}{a_{i_s j_s}} + c_{i_r j_{r-1}}.$$

Если компонента множества $E(x)$ содержит замкнутую цепочку $x_{i_1j_1} \to x_{i_2j_1} \to \ldots \to x_{i} \to x_{i_1j^k}$, то, обозначая $i_1 = i_{k+1}$, из (8) получим

$$\lambda_{i_{k+1}} = \lambda_{i_1} = \lambda_{i_1} \prod_{s=1}^{k} \frac{a_{i_{s+1}i_s}}{a_{i_sj_s}} + C[i_1, j_1, i_2, \ldots, i_k, j_k, i_1],$$

или

$$\lambda_{i_1}\left(1 - \prod_{s=1}^{k} \frac{a_{i_{s+1}j_s}}{a_{i_sj_s}}\right) = \sum_{l=2}^{k} (c_{i_lj_{l-1}} - c_{i_lj_l}) \prod_{s=l}^{k} \frac{a_{i_{s+1}j_s}}{a_{i_sj_s}} -$$

$$- c_{i_1j_1} \prod_{s=1}^{k} \frac{a_{i_{s+1}j_s}}{a_{i_sj_s}} + c_{i_1j_k}. \tag{9}$$

Назовем величину $\prod_{s=1}^{k} \frac{a_{i_{s+1}j_s}}{a_{i_sj_s}}$ *индексом* замкнутой цепочки. Если индекс цепочки отличен от 1, то λ_{i_1} и λ_{i_r} $(r = 2, \ldots, k)$ однозначно определяются из соотношений (9) и (8).

Можно показать, что в методе последовательного улучшения плана достаточно ограничиться рассмотрением только таких множеств $E(x)$, каждая компонента которых либо вообще не содержит замкнутых цепочек, т. е. является деревом, либо содержит одну замкнутую цепочку с индексом, отличным от 1. Таким образом, в случаях, когда все $a_{ij} = 1$ либо все $c_{ij} = 0$ и $f_j(x) = c_je^{-x}$ [1], множества $E(x)$ не будут содержать замкнутых цепочек.

Из леммы 2 следует, что компонета, элементы которой расположены на пересечении k строк и r столбцов матрицы $\|x_{ij}\|$ и которая содержит только одну замкнутую цепочку, состоит из $k + r$ элементов.

2. КАНОНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим некоторое дерево $D^{(l)} \subset E(x)$. Обозначим через $I^{(l)}(J^{(l)})$ множество всех индексов $i(j)$, для которых в дереве $D^{(l)}$ имеется хотя бы один элемент: $I^{(l)} = \{i \,/\, x_{ij} \in D^{(l)}$ для некоторого $j\}$, $J^{(l)} = \{j \,/\, x_{ij} \in D^{(l)}$ для некоторого $i\}$. Через $I_j^{(l)}(J_i^{(l)})$ обозначим множество всех индексов $i(j)$ элементов из $D^{(l)}$, расположенных в j-м столбце (i-й строке) матрицы $\|x_{ij}\|$:

$$I_j^{(l)} = \{i \,/\, x_{ij} \in D^{(l)},\ j \text{ фиксировано}\};$$

$$J_i^{(l)} = \{j \,/\, x_{ij} \in D^{(l)},\ i \text{ фиксировано}\}.$$

Для удобства обозначений предположим, что $1 \in I^{(l)}$. Выразив все λ_i, $i \in I^{(l)}$ через λ_1 по формулам (8), запишем условия (2) и (6), в которые входят элементы дерева $D^{(l)}$, в виде следующей системы уравнений, которую назовем *канонической*:

$$\sum_{j \in J_i^{(l)}} x_{ij} = b_i^{(0)}; \qquad i \in I^{(l)}; \tag{10}$$

$$\sum_{i \in I_j^{(l)}} a_{ij}x_{ij} = -b_{m+j}^{(0)} + g_j(p_j\lambda_1 + q_j); \qquad j \in J^{(l)}, \tag{11}$$

Здесь p_j и q_j — константы, получаемые после подстановки в (6) выражения оценки λ_k через λ_1;

$$b_i^{(0)} = b_i;\ i = 1, \ldots, m;\ b_{m+j}^{(0)} = 0;\ j = 1, \ldots, n.$$

По лемме 2 число уравнений кононической системы и ее переменных $x_{ij} \in D^{(l)}$, λ_1 совпадает.

Теорема 1. *Пусть каноническая система уравнений* (10), (11) *разрешима и* $b_i^0 \geqslant 0$, $b_{m+j}^{(0)} \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$. *Тогда решение кононической системы единственно.*

Доказательство теоремы носит конструктивный характер, и его можно рассматривать одновременно как описание метода решения канонической системы уравнений.

Заметим, что висячему элементу дерева $x_{i_0j_0}$ соответствует одно из уравнений — (10) или (11), в котором переменная $x_{i_0j_0}$ является единственной из числа $x_{ij} \in D^{(l)}$. Процесс решения канонической системы сводится к последовательному исключению из системы переменных x_{ij}. На каждом шаге процесса имеется уравнение, содержащее только одну неисключенную переменную x_{ij}. Из этого уравнения можно выразить переменную x_{ij} в виде функции только одного переменного λ_1 и исключить ее из второго уравнения, в которое она входит. Последовательное исключение переменных x_{ij} приведет к тому, что останется одно уравнение с одним неизвестным — λ_1. К этому времени все переменные x_{ij} будут однозначно выражены через λ_1. Будет доказано, что уравнение для определения λ_1 либо имеет единственный корень, либо неразрешимо.

Предположим, что из канонической системы уже исключены переменные $x_{i_1j_1}, \ldots, x_{i_tj_t}$ и множество $D^{(t)} = D^{(l)} - \{x_{i_1j_1}, \ldots, x_{i_tj_t}\}$ является деревом. Пусть преобразованная система уравнений имеет следующий вид:

$$\sum_{j \in J_i^{(t)}} x_{ij} = b_i^{(t)} - \sum_{j \in J^{(t)}} a_{ij}^{(t)} g_j(p_j\lambda_1 + q_j), \qquad i \in I^{(t)}, \tag{12}$$

$$\sum_{i \in I^{(t)}} a_{ij}x_{ij} = -b_{m+j}^{(t)} + \sum_{s \in J^{(t)}} a_{m+j,\,s}^{(t)} g_s(p_s\lambda_1 + q_s); \qquad j \in J^{(t)}, \tag{13}$$

где

$$b_i^{(t)} \geqslant 0; \quad b_{m+j}^{(t)} \geqslant 0; \quad a_{ij}^{(t)} \geqslant 0; \quad a_{m+j,\,s}^{(t)} \geqslant 0.$$

По лемме 1 имеются по меньшей мере два уравнения, в которые входят только по одному из переменных $x_{ij} \in D^{(t)}$. Пусть переменная $x_{i_{t+1}j_{t+1}}$ является единственной в уравнении с индексом i_{t+1} системы (12). Тогда

$$x_{i_{t+1}j_{t+1}} = b_{i_{t+1}}^{(t)} - \sum_{j \in J^{(t)}} a_{i_{t+1}j}^{(t)} g_j(p_j\lambda_1 + q_j).$$

Исключим $x_{i_{t+1}j_{t+1}}$ из уравнения с индексом j_{t+1} системы (13), перенеся слагаемое $a_{i_{t+1}j_{t+1}} x_{i_{t+1}j_{t+1}}$ в правую часть. Очевидно, множество $D^{(t+1)} = D^{(t)} - \{x_{i_{t+1}j_{t+1}}\}$, полученное в результате исключения висячего элемента, также является деревом. Преобразованная система запишется в виде (12), (13), где индекс t изменен на $t+1$, причем $b_{m+j_{t+1}}^{(t+1)} = b_{m+j_{t+1}}^{(t)} + a_{i_{t+1}j_{t+1}} b_{i_{t+1}}^{(t)}$, $a_{m+j_{t+1},\,s}^{(t+1)} = a_{m+j_{t+1},\,s}^{(t)} + a_{i_{t+1}j_{t+1}} a_{i_{t+1}s}^{(t)}$, а остальные коэффициенты не меняются. Поскольку $a_{i_{t+1}j_{t+1}} > 0$, все коэффициенты правой части системы неотрицательны.

Если переменная $x_{i_{t+1}j_{t+1}}$ является единственной в уравнении с индексом j_{t+1} системы (13), находим

$$x_{i_{t+1}j_{t+1}} = \frac{b^{(t)}_{m+j_{t+1}}}{a_{i_{t+1}j_{t+1}}} + \sum_{j\in J^{(t)}} \frac{\alpha^{(t)}_{m+j_{t+1},\, j}}{a_{i_{t+1}j_{t+1}}} g_j(p_j\lambda_1 + q_j).$$

Исключив $x_{i_{t+1}j_{t+1}}$ из уравнения с индексом i_{t+1} системы (12), получим для переменных дерева $D^{(t+1)} = D^{(t)} - \{x_{i_{t+1}j_{t+1}}\}$ систему уравнений вида (12), (13), где индекс t заменен на $t+1$, причем

$$b_{i_{t+1}}^{(t+1)} = b_{i_{t+1}}^{(t)} + \frac{b^{(t)}_{m+j_{t+1}}}{a_{i_{t+1}j_{t+1}}}, \qquad \alpha_{i_{t+1}}^{(t+1)} = \alpha^{(t)}_{i_{t+1}j} + \frac{\alpha^{(t)}_{m+j_{t+1},\, j}}{a_{i_{t+1}j_{t+1}}},$$

а остальные коэффициенты не меняются. Очевидно, все коэффициенты $b_i^{(t+1)}$, $b_{m+j}^{(t+1)}$, $\alpha_{ij}^{(t+1)}$, $\alpha_{m+j,\,s}^{(t+1)}$ неотрицательны.

В любом случае вновь полученное множество $D^{(t+1)}$ является деревом, и процесс можно продолжить. Поскольку число уравнений исходной системы (10), (11) на единицу больше числа переменных x_{ij}, а с каждым шагом число уравнений и переменных системы уменьшается на единицу, через конечное число шагов будет получено уравнение, называемое *определяющим*:

$$0 = \beta - \sum_{j\in J^{(t)}} \alpha_j g_j(p_j\lambda_1 + q_j). \tag{14}$$

Здесь $\beta = b_i^{(k+r-1)}$, $\alpha_j = \alpha_{ij}^{(k+r-1)}$, если определяющее уравнение получено из уравнения вида (12) при $t = k + r - 1$, и $\beta = b_{m+s}^{(k+r-1)}$, $\alpha_j = \alpha_{m+s,\,j}^{(k+r-1)}$, если единственным оставшимся является уравнение вида (13) (в последнем случае это уравнение умножено на -1). По доказанному все коэффициенты $b_i^{(t)}$, $b_{m+j}^{(t)}$, $\alpha_{ij}^{(t)}$, $\alpha_{m+j,\,s}^{(t)}$ неотрицательны. Отсюда непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 3. *В определяющем уравнении коэффициенты* β *и* α_j *неотрицательны.*

Следовательно, функция $\psi(\lambda_1) = \sum_{j\in J^{(t)}} \alpha_j g_j(p_j\lambda_1 + q_j)$ — монотонно возрастающая, и уравнение (14) либо имеет единственный корень λ_1, либо вообще не имеет ни одного решения. В последнем случае, очевидно, не имеет решения и исходная система (10), (11), что противоречит предположению теоремы. Поскольку переменные x_{ij} определялись однозначно из соответствующих уравнений, подстановка в их выражения значения $\lambda_1 = \bar\lambda_1$ даст единственное решение канонической системы. Теорема доказана.

Отметим одно важное свойство описанного в доказательстве теоремы процесса, сформулировав его в виде следующего утверждения.

Лемма 4. *Определяющее уравнение может быть получено на месте любого наперед заданного уравнения канонической системы.*

Утверждение непосредственно вытекает из леммы 1, поскольку всегда есть возможность не исключать переменную x_{ij} из того уравнения, на месте которого должно быть получено определяющее.

Каждая из переменных $x_{ij} \in D^{(l)}$ может быть выражена в виде

$$x_{ij} = \beta_{ij} - \sum_{s \in J^{(l)}} a_{ij}^{(s)} g_s(p_s\lambda_1 + q_s),$$

где $\beta_{ij} \geqslant 0$, $a_{ij}^{(s)} \geqslant 0$, если x_{ij} определена из некоторого уравнения системы (12), и $\beta_{ij} \leqslant 0$, $a_{ij}^{(s)} \leqslant 0$, если переменная определена из некоторого уравнения системы (13).

Если к коэффициентам правой части системы (10), (11) добавить слагаемые вида $\gamma_i \cdot \theta$ и $\gamma_{m+j} \cdot \theta$, то, очевидно, переменные $x_{ij} \in D^{(l)}$ примут вид

$$x_{ij} = \beta_{ij} + \bar{\beta}_{ij}\theta - \sum_{s \in J^{(l)}} a_{ij}^{(s)} g_s(p_s\lambda_1 + q_s),$$

а определяющее уравнение запишется в следующей форме:

$$\sum_{j \in J^{(l)}} a_j g_j(p_j\lambda_1 + q_j) = \beta + \bar{\beta}\theta.$$

Заметим, что в случае $\gamma_{m+j} \leqslant 0$, $\gamma_i \geqslant 0$ имеем $\bar{\beta} \geqslant 0$ и $\operatorname{sign} \bar{\beta}_{ij} = \operatorname{sign} \beta_{ij}$. Наоборот, при $\gamma_{m+j} \geqslant 0$, $\gamma_i \leqslant 0$ имеем $\bar{\beta} \leqslant 0$ и $\operatorname{sign} \bar{\beta}_{ij} = -\operatorname{sign} \beta_{ij}$ Доказательство этих утверждений легко получить, рассмотрев вновь процесс решения системы уравнений, как это делается в доказательстве теоремы 1.

3. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО УЛУЧШЕНИЯ ПЛАНА

Описываемый ниже конечный метод решения нелинейной задачи (1) — (3) является обобщением метода последовательного улучшения плана линейного программирования. Доказательство его конечности, справедливое для общей задачи выпуклого программирования при линейных ограничениях [6], здесь приводиться не будет. Метод состоит в таком переборе планов задачи и связанных с ними оценок λ_i, при котором функция $F(x)$ монотонно убывает. В процессе метода выполняются условия (2), (3), (4), а соотношения (5) служат для проверки оптимальности плана. Если одно из неравенств (5) не выполняется, соответствующая переменная увеличивается до тех пор, пока нарушенное условие не обратится в равенство. Это составляет итерацию метода. При этом изменяются переменные $x_{ij} \in E(x)$ и λ_i $(i = 1, \ldots, m)$ таким образом, чтобы постоянно оставались выполненными условия (2) и (6). В ходе итерации должны выполняться условия (3). Поэтому при обращении в нуль одной из переменных $x_{ij} \in E(x)$ эта переменная исключается из множества $E(x)$. Процесс изменения переменных, при котором множество $E(x)$ не меняется, образует шаг метода. Итерация может состоять из конечного числа шагов, так как множество $E(x)$ конечно и в ходе отдельной итерации может только уменьшаться. Конечность числа итераций является следствием конечности числа различных множеств $E(x)$ и монотонного характера изменения функции $F(x)$.

Начальный план можно получить различными способами. Проще всего положить одну из переменных x_{ij} каждой строки матрицы $\|x_{ij}\|$ равной b_i $(i = 1, \ldots, m)$, а остальные переменные положить равными нулю. Тогда множество $E(x) = \{x_{ij_i}, i = 1, \ldots, m\}$ не будет иметь замкнутых цепочек, а оценки определяются из условий

$$\lambda_k = a_{kj_k} f'_{j_k}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij_k} x_{ij_k}\right) + c_{kj_k}.$$

Опишем отдельную итерацию метода. Пусть известен план $x = \{x_{ij}\}$, для которого выполняются условия (4) при определенных значениях оценок λ_k, $k = 1, \ldots, m$. Пусть для переменной $x_{i_0j_0}$ нарушено условие (5), т. е.

$$c_{i_0j_0} + a_{i_0j_0} f'_{j_0}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij_0} x_{ij_0}\right) < \lambda_{i_0}. \qquad (15)$$

Рассмотрим две компоненты множества $E(x)$: компоненту $E_1(x)$, которая содержит элементы с индексом i_0, и компоненту $E_2(x)$, которая содержит элементы с индексом j_0. Если в множество $E(x)$ не входит ни один элемент с индексом j_0, множество $E_2(x)$ пусто. Если элементы $x_{i_0j} \in E(x)$ и $x_{ij_0} \in E(x)$ можно соединить цепочкой, то множества $E_1(x)$ и $E_2(x)$ совпадают. Компоненты $E_1(x)$, $E_2(x)$ могут быть деревьями; в этом случае будем их обозначать D_1 и D_2 соответственно.

Положим $x_{i_0j_0} = \theta$ и будем увеличивать параметр θ, начиная с нуля, находя $x_{ij}(\theta) \in E(x)$ и $\lambda_i(\theta)$ из системы уравнений

$$\sum_{j\in J_i} x_{ij}(\theta) = \begin{cases} b_i; & i \neq i_0; \\ b_{i_0} - \theta; & i = i_0 \end{cases} \qquad (J_i = \{j/x_{ij} \in E(x)\}); \qquad (16)$$

$$\sum_{i\in I_j} a_{ij} x_{ij}(\theta) = \begin{cases} g_j\left(\dfrac{\lambda_k(\theta) - c_{kj}}{a_{kj}}\right); & j \neq j_0; \\ & \text{для } x_{kj} \in E(x), \\ -a_{i_0j_0}\theta + g_{j_0}\left(\dfrac{\lambda_k(\theta) - c_{kj_0}}{a_{kj_0}}\right); & j = j_0 \end{cases} \qquad (17)$$

$$(I_j = \{i/x_{ij} \in E(x)\}).$$

Заметим, что переменные x_{ij}, не входящие в компоненты $E_1(x)$ и $E_2(x)$, а также соответствующие оценки λ_i не зависят от θ, поскольку в правые части подсистем, выписанных для этих компонент, параметр θ не входит.

Возможны несколько случаев. Пусть $E_1(x) = E_2(x) = R$ и множество R содержит замкнутую цепочку с отличным от единицы индексом. Поскольку из системы (17) следует, что для $x_{i_0j} \in E(x)$, $x_{ij} \in E(x)$ выполняется условие (7), все оценки определяются однозначно по формулам (8), (9) и не зависят от θ. Следовательно, переменные $x_{ij}(\theta)$ являются линейными функциями от θ и их можно определить так же, как это делается в распределительной задаче линейного программирования. (Одна из переменных замкнутой цепочки полагается равной $x_{ij} + \tau\cdot\theta$, где $x_{ij} = x_{ij}(0)$, после чего применяется процесс определения переменных, подобный описанному в разделе 2. Параметр τ находится из определяющего уравнения). Поскольку λ_{i_0} и $\sum_{i=1}^{m} a_{ij_0} x_{ij_0}(\theta)$ не меняются с ростом θ, неравенство (15) не изменится. Поэтому надо увеличивать параметр θ до тех пор, пока одна из переменных x_{ij} не станет равной нулю.

Пусть $E_1(x) = E_2(x) = D$. Для удобства обозначений предположим, что $1 \in I^{(1)}$ $(I^{(1)} = I^{(2)})$. Тогда по формулам (8) все оценки $\lambda_i(\theta)$, $i \in I^{(1)}$

можно выразить через $\lambda_1(\theta)$, а условия (17) записать в виде

$$\sum_{i\in I^{(1)}} a_{ij}x_{ij}(\theta)=\begin{cases} g_j(p_j\lambda_1(\theta)+q_j); & j\neq j_0;\\ -a_{i_0j_0}\theta+g_{j_0}(p_{j_0}\lambda_1(\theta)+q_{j_0}); & j=j_0;\end{cases}\quad j\in J^{(1)}. \qquad (18)$$

Решая систему (16), (18) методом, изложенным в разделе 2, выразим все $x_{ij}(\theta)\in D$ через $\lambda_1(\theta)$ в виде

$$x_{ij}(\theta)=\beta_{ij}+\bar\beta_{ij}\theta-\sum_{s\in J^{(1)}}\alpha_{ij}^{(s)}g_s(p_s\lambda_1(\theta)+q_s), \qquad (19)$$

где $\operatorname{sign}\beta_{ij}=\operatorname{sign}\alpha_{ij}^{(s)}$ для любого $s\in J^{(1)}$. Переменная $\lambda_1(\theta)$ определяется при каждом фиксированном θ из уравнения

$$\psi(\lambda_1(\theta))\equiv\sum_{j\in J^{(1)}}\alpha_j g_j(p_j\lambda_1(\theta)+q_j)=\beta+\bar\beta\theta, \qquad (20)$$

где $\alpha_j\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$. Из монотонности функции $\psi(\lambda_1)$ следует, что при $\bar\beta>0$ $\lambda_1'(\theta)>0$, а при $\bar\beta<0$ $\lambda_1'(\theta)<0$.

Поскольку компоненты $E_1(x)$ и $E_2(x)$ совпадают, добавление к дереву D элемента $x_{i_0j_0}$ приведет к образованию замкнутой цепочки. Пусть это будет цепочка $\Gamma=\{x_{i_0j_0}\to x_{i_1j_1}\to x_{i_1j_1}\to\ldots\to x_{i_kj_k}\to x_{i_0j_k}\}$. Индекс этой цепочки отличен от 1 [иначе не было бы нарушено условие оптимальности для переменной $x_{i_0j_0}$ и неравенство (15) не имело бы места]. По лемме 4 определяющее уравнение может быть получено на месте любого из уравнений системы. Пусть определяющее уравнение вида (20) получено сначала на месте i_0-го уравнения системы (16), а затем на месте j_0-го уравнения системы (18). Заметим, что и в том и в другом случае в выражении (19) для переменных $x_{ij}\in D-\Gamma'$ $\bar\beta_{ij}=0$, где $\Gamma'=\Gamma-\{x_{i_0j_0}\}$.

Переменные $x_{ij}\in\Gamma'$ входят по две или совсем не входят в каждое из уравнений системы (16), (18), кроме i_0-го уравнения системы (16) и j_0-го уравнения системы (18). Поэтому при сделанном выборе определяющего уравнения два соседних элемента цепочки Γ' будут находиться один из системы (16), а другой — из системы (18). Следовательно, знак коэффициентов β_{ij}, $\bar\beta_{ij}$, $\alpha_{ij}^{(s)}$ для элементов $x_{ij}\in\Gamma'$ будет чередоваться.

При выборе в качестве определяющего i_0-го уравнения системы (16) $\alpha_{i_{l+1}j_l}\leqslant 0$, $\beta_{i_{l+1}j_l}\leqslant 0$, $\bar\beta_{i_{l+1}j_l}<0$ $(l=0,\ldots,k;\ i_{k+1}=i_0)$; $\alpha_{i_lj_l}^{(s)}\geqslant 0$, $\beta_{i_lj_l}\geqslant 0$, $\bar\beta_{i_lj_l}>0$ $(l=1,\ldots,k)$.

При выборе определяющим j_0-го уравнения системы (18) $\alpha_{i_{l+1}j_l}^{(s)}\geqslant 0$, $\beta_{i_{l+1}j_l}\geqslant 0$, $\bar\beta_{i_{l+1}j_l}<0$, $(l=0,\ldots,k)$, $\alpha_{i_lj_l}^{(s)}\leqslant 0$, $\beta_{i_lj_l}\leqslant 0$, $\bar\beta_{i_lj_l}>0$ $(l=1,\ldots,k)$.

В первом случае

$$\bar\beta=\Big(\prod_{s=0}^{k}a_{i_sj_s}-\prod_{s=0}^{k}a_{i_{s+1}j_s}\Big)\Big/\prod_{s=0}^{k}a_{i_{s+1}j_s},$$

во втором

$$\bar\beta=\Big(\prod_{s=0}^{k}a_{i_sj_s}-\prod_{s=0}^{k}a_{i_{s+1}j_s}\Big)\Big/\prod_{s=0}^{k}a_{i_sj_s},$$

т. е. знак $\bar{\beta}$ не меняется и зависит от того, больше или меньше 1 индекс замкнутой цепочки Г. В любом случае $\bar{\beta} \neq 0$.

Значения переменных x_{ij} не зависят от выбора определяющего уравнения. Если $\bar{\beta} > 0$, выберем те выражения для переменных $x_{ij} \in \Gamma'$, в которых $\operatorname{sign} \beta_{ij} = -\operatorname{sign} \alpha_{ij}^{(s)}$. Если $\bar{\beta} < 0$, возьмем те выражения для $x_{ij} \in \Gamma'$, в которых $\operatorname{sign} \beta_{ij} = \operatorname{sign} \alpha_{ij}^{(s)}$. Тогда $x_{ij}(\theta) \in \Gamma'$ будут монотонно возрастать, если $\beta_{ij} > 0$, и убывать, если $\beta_{ij} < 0$. Знак β_{ij} не зависит от выбора места определяющего уравнения. Следовательно, при любом определяющем уравнении можно определять характер изменения переменных $x_{ij} \in \Gamma'$ по знаку β_{ij}. Переменные $x_{ij} \in D - \Gamma'$ либо монотонно возрастают, либо монотонно убывают в зависимости от знаков $\alpha_{ij}^{(s)}$ и $\bar{\beta}$: при $\bar{\beta} > 0$ монотонно возрастают те переменные, у которых $\alpha_{ij}^{(s)} \geqslant 0$, и убывают те, у которых $\alpha_{ij}^{(s)} \leqslant 0$; при $\bar{\beta} < 0$ монотонно возрастают переменные, у которых $\alpha_{ij}^{(s)} \leqslant 0$, и убывают те, у которых $\alpha_{ij}^{(s)} \geqslant 0$.

Параметр θ надо увеличивать до значения $\bar{\theta} = \min(\theta_1, \theta_2)$, где θ_1 определяется условием

$$\sum_{i \in I_1} a_{ij_0} x_{ij_0}(\theta_1) + a_{i_0 j_0}\theta_1 = g_{j_0}\left(\frac{\lambda_{i_0}(\theta_1) - c_{i_0 j_0}}{a_{i_0 j_0}}\right), \tag{21}$$

$$\theta_2 = \min \theta_{ij} / \{x_{ij}(\theta_{ij}) = 0; \quad \theta_{ij} > 0\}$$

Для определения θ_2 надо найти числа θ_{ij} для убывающих переменных. Для переменных, у которых $\beta_{ij} = 0$ $(x_{ij} \in D - \Gamma')$, значения $\lambda_1(\theta_{ij})$ определяются из уравнений

$$\sum_{s \in J^{(1)}} \alpha_{ij}^{(s)} g_s(p_s \lambda_1(\theta_{ij}) + q_s) = \beta_{ij},$$

после чего сами числа θ_{ij} определяются из уравнения (20). Для переменных цепочки Γ' надо решить совместно два уравнения — (20) и уравнение $x_{ij}(\theta_{ij}) = 0$. Исключив из этих уравнений члены с θ, получим уравнение для определения $\lambda_1(\theta_{ij})$

$$\sum_{s \in J^{(1)}} \left(\frac{\alpha_{ij}^{(s)}}{\beta_{ij}} - \frac{\alpha_s}{\bar{\beta}}\right) g_s(p_s \lambda_1(\theta_{ij}) + q_s) = \frac{\bar{\beta}_{ij}}{\beta_{ij}} - \frac{\bar{\beta}}{\bar{\beta}} \qquad (\beta_{ij} \neq 0, \; \bar{\beta} \neq 0).$$

После нахождения чисел $\lambda_1(\theta_{ij})$ сами значения θ_{ij} определяются из уравнения (20). Если какое-либо из уравнений не имеет решения, соответствующее значение θ_{ij} полагается равным ∞. В силу сделанного выбора выражений для переменных цепочки Γ' $\operatorname{sign} \alpha_{ij}^{(s)} / \beta_{ij} = -\operatorname{sign} \alpha_s / \bar{\beta}$. Значит, левые части всех уравнений для определения $\lambda_1(\theta_{ij})$ являются монотонными функциями, и соответствующие уравнения могут иметь лишь один корень. Следовательно, числа θ_{ij} определяются однозначно.

Для определения θ_1 из условия (21) и j_0-го уравнения системы (18) получаем

$$\frac{\lambda_{i_0}(\theta_1) - c_{i_0 j_0}}{a_{i_0 j_0}} = p_{j_0} \lambda_1(\theta_1) + q_{j_0}.$$

Поскольку $\lambda_{i_0}(\theta)$ линейно выражается через $\lambda_1(\theta)$, получается линейное уравнение для определения $\lambda_1(\theta_1)$. (Коэффициент при $\lambda_1(\theta_1)$ в этом уравнении отличен от нуля, поскольку индекс цепочки Г не равен 1). Значение θ_1 определяется по найденному значению $\lambda_1(\theta_1)$ из уравнения (20).

Рассмотрим теперь наиболее общий случай, когда $E_1(x)$ и $E_2(x)$ не совпадают. Для удобства обозначений предположим, что $1 \in I^{(1)}$ и $2 \in I^{(2)}$. Тогда все оценки $\lambda_i(\theta)$, $i \in I^{(1)}$ можно выразить через $\lambda_1(\theta)$, а оценки

$\lambda_i(\theta)$, $i \in I^{(2)}$ — через $\lambda_2(\theta)$. Система уравнений (17) примет тогда следующий вид:

$$\sum_{i \in I_j^{(1)}} a_{ij} x_{ij}(\theta) = g_j(p_j \lambda_1(\theta) + q_j), \quad j \in J^{(1)};$$

$$\sum_{i \in I_j^{(2)}} a_{ij} x_{ij}(\theta) = \begin{cases} g_j(p_j \lambda_2(\theta) + q_j), & j \neq j_0, \\ -a_{i_0 j_0}\theta + g_{j_0}(p_{j_0}\lambda_2(\theta) + q_{j_0}), & j = j_0, \end{cases} \quad j \in J^{(2)}. \qquad (22)$$

Одно из множеств $E_t(x)$, $t = 1, 2$ (или каждое из них), может содержать замкнутую цепочку. Оценки λ_i, $i \in I^{(t)}$ не зависят тогда от θ, а переменные $x_{ij}(\theta)$ такого множества являются линейными функциями от θ: $x_{ij}(\theta) = \beta_{ij} + \bar\beta_{ij}\theta$. Тогда $\theta_{ij} = -\beta_{ij} / \bar\beta_{ij}$, если $\bar\beta_{ij} < 0$, и $\theta_{ij} = \infty$, если $\bar\beta_{ij} \geqslant 0$.

Если оба множества содержат замкнутые цепочки, неравенство (15) не изменится, и $\theta_1 = \infty$.

Если множество $E_t(x)$ не содержит замкнутой цепочки ($E_t(x) = D$), то, решая методом, описанным в разделе 2, соответствующую каноническую систему уравнений и взяв при $t = 1$ в качестве определяющего уравнение системы (16) с индексом i_0, а при $t = 2$ — уравнение системы (22) с индексом j_0, выразим переменные $x_{ij}(\theta) \in E_t(x)$ в следующем виде:

$$x_{ij}(\theta) = \beta_{ij} - \sum_{s \in J^{(t)}} \alpha_{ij}^{(s)} g_s(p_s \lambda_t(\theta) + q_s),$$

где $\operatorname{sign} \beta_{ij} = \operatorname{sign} \alpha_{ij}^{(s)}$, $s \in J^{(t)}$. Члены с параметром θ в этих выражениях отсутствуют, поскольку единственное уравнение канонической системы множества $E_t(x)$, содержащее в правой части параметр θ, взято в качестве определяющего. Определяющее уравнение запишется в виде

$$\psi_t(\lambda_t(\theta)) = \sum_{j \in J^{(t)}} \alpha_j g_j(p_j \lambda_t(\theta) + q_j) = \beta^{(t)} + \bar\beta^{(t)}\theta,$$

где $\alpha_j \geqslant 0$, $\beta^{(t)} \geqslant 0$, $\bar\beta^{(1)} = -1$, $\bar\beta^{(2)} = a_{i_0 j_0} > 0$. Поскольку функции $\psi_t(\lambda)$ монотонно возрастающие, $\lambda_1'(\theta) < 0$ и $\lambda_2'(\theta) > 0$. Это позволяет определить характер изменения любого из переменных $x_{ij}(\theta) \in E_t(x)$. При $t = 1$ будут возрастать с ростом θ те переменные $x_{ij}(\theta)$, у которых $\alpha_{ij}^{(s)} \geqslant 0$, и убывать те, у которых $\alpha_{ij}^{(s)} \leqslant 0$. При $t = 2$ переменная $x_{ij}(\theta)$ возрастает, если $\alpha_{ij}^{(s)} \leqslant 0$, и убывает, если $\alpha_{ij}^{(s)} \geqslant 0$.

Для возрастающих переменных полагаем $\theta_{ij} = \infty$. Для убывающих переменных из уравнений

$$\sum_{s \in J^{(t)}} \alpha_{ij}^{(s)} g_s(p_s \lambda_t(\theta_{ij}) + q_s) = \beta_{ij}$$

находятся числа $\lambda_t(\theta_{ij})$, после чего значение самого параметра определяется по формуле, получаемой из определяющего уравнения

$$\theta_{ij} = -\frac{\beta^{(t)}}{\bar\beta^{(t)}} + \sum_{j \in J^{(t)}} \frac{\alpha_j}{\bar\beta^{(t)}} g_j(p_j \lambda_t(\theta_{ij}) + q_j).$$

Ввиду монотонности функций $\sum_{s \in J^{(t)}} \alpha_{ij}^{(s)} g_s(p_s(\lambda_t) + q_s)$ значения $\lambda_t(\theta_{ij})$ и θ_{ij} определяются однозначно, если только соответствующие уравнения вообще имеют решения. В противном случае полагаем $\theta_{ij} = \infty$.

Для определения значения θ_1 необходимо разобрать различные случаи. Если множество $E_2(x)$ пусто, а множество $E_1(x)$ содержит замкнутую цепочку, то λ_{i_0} не зависит от θ, и

$$\theta_1 = \frac{1}{a_{i_0 j_0}} g_{j_0}\left(\frac{\lambda_{i_0} - c_{i_0 j_0}}{a_{i_0 j_0}}\right).$$

Если $E_2(x)$ пусто, а множество $E_1(x)$ не содержит замкнутой цепочки, то, исключая θ_1 из определяющего уравнения канонической системы множества $E_1(x)$ и уравнения

$$a_{i_0 j_0}\theta_1 = g_{j_0}\left(\frac{\lambda_{i_0}(\theta_1) - c_{i_0 j_0}}{a_{i_0 j_0}}\right),$$

получим уравнение для определения $\lambda_1(\theta_1)$

$$\sum_{j \in J^{(1)}} \alpha_j g_j(p_j \lambda_1(\theta_1) + q_j) + \frac{1}{a_{i_0 j_0}} g_{j_0}(p_{j_0}\lambda_1(\theta_1) + q_{j_0}) = \beta^{(1)}.$$

Здесь p_{j_0}, q_{j_0} получаются после подстановки вместо $\lambda_{i_0}(\theta_1)$ ее выражения через $\lambda_1(\theta_1)$ (см. (8)). Ввиду монотонности функций $g_j(x)$ и $\alpha_j \geqslant 0$, $1 / a_{i_0 j_0} > 0$, уравнение может иметь лишь один корень. Значение θ_1 определяется при фиксированном $\lambda_1(\theta_1)$ из определяющего уравнения.

Если множество $E_1(x)$ содержит замкнутую цепочку, а множество $E_2(x)$ непусто и $E_2(x) = D_2$, то оценки $\lambda_i \in I^{(1)}$, в том числе λ_{i_0}, не зависят от θ. Из условия (21) и уравнения с индексом j_0 системы (22) находим

$$\lambda_2(\theta_1) = \frac{\lambda_{i_0}}{p_{j_0} a_{i_0 j_0}} - \frac{q_{j_0}}{p_{j_0}} - \frac{c_{i_0 j_0}}{p_{j_0} a_{i_0 j_0}}.$$

Значение θ_1 находится из определяющего уравнения для множества $E_2(x)$. Аналогично в случае $E_1(x) = D_1$ и наличия замкнутой цепочки в множестве $E_2(x)$ получаем уравнение для определения $\lambda_{i_0}(\theta_1)$

$$p_{j_0}\lambda_2 + q_{j_0} = \frac{\lambda_{i_0}(\theta_1) - c_{i_0 j_0}}{a_{i_0 j_0}}.$$

Здесь $\lambda_2 \in I^{(2)}$ не зависит от θ. Значение $\lambda_1(\theta_1)$ однозначно определяется по $\lambda_{i_0}(\theta_1)$, после чего значение θ_1 находится из определяющего уравнения для множества $E_1(x)$.

Если множества $E_1(x)$ и $E_2(x)$ не содержат замкнутых цепочек, то при выполнении условия (21) деревья D_1 и D_2 соединяются, и все $\lambda_i(\theta_1)$, $i \in I^{(1)} + I^{(2)}$ можно выразить через $\lambda_1(\theta_1)$ по формулам (8). Пусть $\lambda_2(\theta_1) = \tilde{p}\lambda_1(\theta_1) + \tilde{q}$. Из определяющих уравнений для $t = 1, 2$, исключая параметр θ_1, находим

$$\sum_{j \in J^{(1)}} \alpha_j g_j(p_j \lambda_1(\theta_1) + q_j) + \sum_{j \in J^{(2)}} \frac{\alpha_j}{a_{i_0 j_0}} g_j(p_j \tilde{p}\lambda_1(\theta_1) + p_j\tilde{q} + q_j) = \beta^{(1)} + \frac{\beta^{(2)}}{a_{i_0 j_0}}.$$

Поскольку $\alpha_j \geqslant 0$, $j \in I^{(1)} + I^{(2)}$, решение уравнения — $\lambda_1(\theta_1)$, если оно существует, единственно. (В противном случае $\theta_1 = \infty$). Значение θ_1 определяется при найденном $\lambda_1(\theta_1)$ из определяющего уравнения для $t = 1$.

После вычисления $\bar{\theta} = \min(\theta_1, \theta_2)$ находятся по соответствующим формулам значения переменных $x_{ij}(\bar{\theta}) \in E(x)$ и $\lambda_i(\bar{\theta})$. Из множества $E(x)$ исключаются те переменные, которые стали равными предельному значению: $x_{ij}(\bar{\theta}) = 0$. Если $\bar{\theta} < \theta_1$, процесс увеличения параметра θ продолжается. Итерация состоит тогда из нескольких шагов. Итерация заканчивается при $\bar{\theta} = \theta_1$. В этом случае переменная $x_{i_0 j_0} = \bar{\theta}$ включается в множество $E(x)$. Возможен также случай, когда после исключения из множества $E(x)$ переменных $x_{ij}(\bar{\theta}) = 0$ в i_0-й строке матрицы $\|x_{ij}\|$ не останется ни одного элемента множества $\bar{E}(x)$. В этом случае итерация также заканчивается, переменная $x_{i_0j_0} = \theta$ включается в множество $E(x)$ и пересчитывается значение оценки i_0-го условия

$$\lambda_{i_0} = a_{i_0j_0}f_{j_0}'\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij_0}x_{ij_0}\right) + c_{i_0j_0}.$$

Теорема 2 (приводится без доказательства). *За конечное число итераций, каждая из которых состоит из конечного числа шагов, методом последовательного улучшения плана будет получено оптимальное решение задачи* (1)—(3).

На каждом шаге метода необходимо решать нелинейные уравнения, каждое из которых имеет только одно неизвестное. Ввиду монотонного характера функций эти уравнения либо имеют единственный корень, либо вообще не имеют решения. Для решения этих уравнений можно использовать любой из известных методов решения нелинейных уравнений с одним неизвестным. Ввиду монотонного характера изменения переменных нет необходимости вычислять все значения θ_{ij}. После нахождения одного из таких значений, например $\theta_{i_1j_1}$, надо определять величины θ_{ij} только для тех переменных, значения которых отрицательны: $x_{ij}(\theta_{i_1j_1}) < 0$.

Описанный метод легко распространяется на случай, когда некоторые коэффициенты a_{ij} равны нулю. Для этого надо только изменить определение цепочек таким образом, чтобы все элементы $x_{ij} \in E(x)$, для которых $a_{ij} = 0$, могли быть только висячими.

Для задачи, рассмотренной в работе [3], в которой все $c_{ij} = 0$ и $f_j(x) = c_je^{-x}$, описанный метод оказывается особенно эффективным. После замены $\ln \lambda_k = u_k$ условия (4) для этой задачи становятся линейными

$$\ln c_ja_{kj} - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_{ij} = u_k.$$

Это дает возможность реализовать метод без решения нелинейных уравнений. По трудоемкости алгоритм решения этой частной задачи оказывается сравнимым с алгоритмами решения распределительной задачи линейного программирования. Время решения задач такого вида размерами $m = 10$, $n = 20$ на ЭВМ с быстродействием в 20 000 операций в секунду менее 1 мин. при числе шагов порядка 30—40. Для этой же задачи легко реализуются обобщения на нелинейный случай методов последовательного улучшения оценок и сокращения невязок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. Задачи и методы линейного программирования. М., 1961.
2. A. C. Williams. A Stochastic Transportation Problem. Opns. Res., 1963, vol. 11, No. 5, p. 759—770.
3. И. А. Бахтин, М. А. Красносельский, А. Ю. Левин. Об отыскании экстремума одной функции на многограннике. Ж. вычисл. мат. и матем. физики, 1963, т. 3, № 2.
4. H. W. Kuhn, A. W. Tucker. Nonlinear Programming. Proc. of the 2nd Berkeley Sympos. on Math. Statistics and Probability. Univ. of Calif. Press, 1951, p. 481—492.
5. К. Берж. Теория графов и ее применения. Изд-во иностр. лит., 1962.
6. В. А. Булавский, Г. Ш. Рубинштейн. О решении задач выпуклого программирования с линейными ограничениями методом последовательного улучшения допустимого вектора. Докл. АН СССР, 1963, т. 150, № 2, стр. 231—234.

Поступила в редакцию
15 VII 1964