

ЗАМЕТКИ И ПИСЬМА

ОПЫТ ИСЧИСЛЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТЕМПА РОСТА

Л. Д. САХНОВСКИЙ

(Николаев)

Порядок исчисления средних темпов изменения экономических явлений имеет большое практическое значение. Решение ряда задач в повседневной планово-экономической работе требует определения среднего темпа роста в промежуточные периоды, когда имеется объем задания на отрезок времени, представляющий сумму промежуточных периодов.

Такая на первый взгляд простая задача, как определение объема валового выпуска на каждый месяц года, в условиях равномерного темпа роста, если заданы годовой объем валового выпуска и величина валового выпуска базисного месяца, представляет большую трудность и, как правило, решается путем подбора, что приводит к значительным искажениям. Правильно выбранный темп роста обеспечивает выполнение планового задания (сумму динамического ряда) при наименьших усилиях, так как завышение темпа роста или занижение его приводят к неоправданному перенапряжению плана.

При анализе производственно-хозяйственной деятельности предприятия, цеха также возникает необходимость определения средних темпов изменения ряда экономических показателей. Определение темпа роста по закону геометрического ряда в некоторых случаях приводит к искажениям, так как величина темпа роста в этом случае зависит только от величины последнего периода (A_n) и величины базисного периода (A_0) и совершенно не зависит от величины остальных членов динамического ряда.

Средние темпы роста таких экономических категорий, как валовый выпуск, выработка на одного работающего, капиталовложения и т. п., где суммирование уровней динамического ряда имеет экономический смысл, следует исчислять по закону параболического ряда (параболический темп роста). При этом величина среднего темпа роста будет зависеть от суммы членов всего динамического ряда и величины базисного периода. Методология исчисления среднего темпа роста как для целей статистики, так и для экономического планирования имеет весьма существенное значение. В нашей экономической литературе имеются критические обзоры существующих методов исчисления средних темпов роста, где утверждается положительная оценка метода нахождения темпа роста по закону параболического ряда [1—6]. Однако порядок исчисления среднего темпа роста по закону параболического ряда не разработан.

Уравнение, которое нам необходимо решить при определении параболического темпа роста, имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^n A_i = A_0 Y + A_0 Y^2 + A_0 Y^3 + \dots + A_0 Y^n, \quad (1)$$

где $\sum_{i=1}^n A_i$ — сумма всего динамического ряда, n — количество членов нашего дина-

мического ряда или количество периодов, на протяжении которых происходит изменение нашего ряда, A_0 — исходная величина базисного периода, Y — средний параболический темп роста.

В общем виде уравнение (1) не имеет решения. В лаборатории экономических исследований завода им. Носенко было разработано частное решение указанного уравнения в пределах $0 < Y < 2$, что дает возможность определить параболический темп роста как при положительном приросте от 0 до 100%, так и при отрицательном приросте от 0 до 100%.

Свободный член n перенесем в правую часть равенства:

$$\begin{aligned} & \frac{n(n+1)}{2} \bar{X} + \frac{n(n-1) + (n-1)(n-2) + (n-2)(n-3) + \dots + i(i-1) + \dots + 2 \cdot 1}{2!} \bar{X}^2 + \\ & + \frac{n(n-1)(n-2) + (n-1)(n-2)(n-3) + \dots + i(i-1)(i-2) + \dots + 3 \cdot 2 \cdot 1}{3!} \bar{X}^3 + \dots \\ & + \frac{n(n-1) \dots (n-i+1) + (n-1)(n-2) \dots (n-1-i+1) + \dots + i(i-1)(i-2) \dots (i-i+1)}{i!} \bar{X}^i + \\ & \dots + \bar{X}^n = \frac{\sum_{i=1}^n A_i}{A_0} - n. \end{aligned} \quad (6)$$

Обозначив коэффициенты при $\bar{X}$ через M_n ; при $\bar{X}^2$ через C_n ; при $\bar{X}^3$ через N_n ; при $\bar{X}^i$ через T_n , имеем:

$$M_n = \frac{n(n+1)}{2}; \quad (7)$$

$$C_n = \frac{n(n-1) + (n-1)(n-2) + (n-2)(n-3) + \dots + i(i-1) + \dots + 2 \cdot 1}{2!}; \quad (8)$$

$$N_n = \frac{n(n-1)(n-2) + (n-1)(n-2)(n-3) + \dots + i(i-1)(i-2) + \dots + 3 \cdot 2 \cdot 1}{3!}; \quad (9)$$

$$T_n = \frac{n(n-1) \dots (n-i+1) + (n-1)(n-2) \dots (n-1-i+1) + \dots + i(i-1)(i-2) \dots (i-i+1)}{i!} \quad (10)$$

Величину $\frac{\sum_{i=1}^n A_i}{A_0} - n$ обозначим через Q (11), тогда наше уравнение (6) примет вид:

$$M_n \bar{X} + C_n \bar{X}^2 + N_n \bar{X}^3 + \dots + T_n \bar{X}^i + \dots + \bar{X}^n = Q. \quad (12)$$

Значения коэффициентов при $\bar{X}$ различных степеней для уравнений, где $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$, подсчитав по формулам (7—10), сведем в таблицу.

Анализируя содержание табл. 1, можно отметить, что коэффициент при $\bar{X}^i$ (за исключением случая, когда $i = 1$) в n -строке, равен сумме коэффициентов при $\bar{X}^{i-1}$ и $\bar{X}^i$ в $n-1$ -строке.

Таблица 1

Наивысшая степень динатомического ряда n	Значения коэффициентов при									
	$\bar{X}$	$\bar{X}^2$	$\bar{X}^3$	$\bar{X}^4$	$\bar{X}^5$	$\bar{X}^6$	$\bar{X}^7$	$\bar{X}^8$	$\bar{X}^9$	10
1	1									
2	3	1								
3	6	4	1							
4	10	10	5	1						
5	15	20	15	6	1					
6	21	35	35	21	7	1				
7	28	56	70	56	28	8	1			
8	36	84	126	126	84	36	9	1		
9	45	120	210	252	210	120	45	10	1	
10	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1
11	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12
12	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78
13	91	364								
14	105	455								

Определив коэффициенты при $\bar{X}$ первой степени по формуле (7) и проставив их в таблицу (см. табл. 1), можно, используя вышеуказанную зависимость между коэффициентами, определить последовательно коэффициенты для всех степеней любой строки.

Имея уравнение (12) с выявленными значениями коэффициентов $M_n, C_n, N_n \dots T_n$ и т. д., нам необходимо его решить относительно $\bar{X}$.

Уравнение (12) напомним в следующем виде:

$$C_n \bar{X}^2 + M_n \bar{X} - (Q - N_n \bar{X}^3 - \dots - T_n \bar{X}^i - \dots - \bar{X}^n) = 0. \quad (13)$$

Рассматривая уравнение (13) как квадратное, имеем:

$$\bar{X} = \frac{-M_n \pm \sqrt{M_n^2 + 4C_n(Q - N_n \bar{X}^3 - \dots - T_n \bar{X}^i - \dots - \bar{X}^n)}}{2C_n}. \quad (14)$$

Анализ уравнения (14) показал, что его можно решить методом итераций (метод последовательных приближений) в интервале $0 < \bar{X} < 1$ с любой заданной точностью.

Учитывая, что величина $\bar{X}$ меньше 1, в ряде случаев можно без ощутимого влияния на точность результата пренебречь произведениями соответствующих коэффициентов на $\bar{X}$ более высоких степеней.

При решении уравнения (14) принимаем следующий порядок:

1. Определяем в первом приближении величину $\bar{X}_1$, приняв в правой части уравнения $\bar{X} = 0$.

2. Определяем во втором приближении величину $\bar{X}_2$, приняв в первой части уравнения (14) $\bar{X} = \bar{X}_1$.

3. Повторяем указанный процесс исчисления $\bar{X}_m$ до получения необходимой степени точности.

Записав найденные значения $\bar{X}$ в порядке последовательности их определения, получим ряд чисел $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \bar{X}_4$ и т. д. Приведенный ряд чисел имеет высокую сходимость, и все значения с нечетным порядковым номером будут больше истинного значения $\bar{X}_0$, а значения, соответствующие четному порядковому номеру, будут меньше истинного значения $\bar{X}_0$.

Если нам необходимо вычислить значение $\bar{X}_m$ с абсолютной погрешностью, меньшей, чем заданное число ϵ , необходимо вычислить приближенные значения корня до тех пор, пока разность двух последовательно вычисленных значений корня не станет меньше ϵ . Если $|\bar{X}_m - \bar{X}_{m-1}| \leq \epsilon$, тогда и $|\bar{X}_0 - \bar{X}_m| \leq \epsilon$. Выявленный порядок решения уравнения даст возможность поставленную задачу решить при помощи ЭВМ. Для примера приведем решение следующей задачи.

Определить среднемесячный темп роста валового выпуска на протяжении года ($n = 12$ месяцев), зная, что годовой объем валового выпуска составляет

$$\sum_{i=1}^{12} A_i =$$

$= 5000$ тыс. руб. и величина валового выпуска исходного месяца (база) равна $A_0 = 300$ тыс. руб. Величину $Y = 1 + \bar{X}$ определить с точностью до $1 \cdot 10^{-4}$.

Имеем уравнение (12) $M_n \bar{X} + C_n \bar{X}^2 + N_n \bar{X}^3 + \dots + T_n \bar{X}^i + \dots + \bar{X}^n = Q$. Величину Q определим из равенства (11)

$$Q = \frac{\sum_{i=1}^{12} A_i}{A_0} - n = \frac{5000000}{300000} - 12 = 4,67.$$

Определив коэффициенты при $\bar{X}$ из табл. 1, имеем:

$$78\bar{X} + 286\bar{X}^2 + 715\bar{X}^3 + 1287\bar{X}^4 + 1716\bar{X}^5 + 1716\bar{X}^6 + 1287\bar{X}^7 + 715\bar{X}^8 + 286\bar{X}^9 + 78\bar{X}^{10} + 13\bar{X}^{11} + \bar{X}^{12} = 4,67.$$

Пользуясь уравнением (14), определяем $\bar{X}_1$ (темпер прироста) в первом приближении, для чего в правой части уравнения (14) принимаем $\bar{X} = 0$.

$$\bar{X}_1 = \frac{-78 \pm \sqrt{78^2 + 4 \cdot 286 \cdot 4,67}}{2 \cdot 286} = \frac{-78 \pm 106,89}{572} = 0,0506.$$

Для определения величины темпа прироста во втором приближении $\bar{X}_2$ предварительно необходимо установить значения $\bar{X}_1$, возведенной в степени от 3 до 12. $\bar{X}_1^3 = 0,0506^3 = 0,000129$; $\bar{X}_1^4 = 0,0000065$; $\bar{X}_1^5 = 0,0000003$.

Исчисление $\bar{X}_1$ в степенях выше четвертой нецелесообразно, так как $0,0506^5$ и в более высоких степенях принимает столь малые значения, что после умножения на соответствующие коэффициенты получаются произведения, не влияющие на результат исчисления. К тому же надо учесть, что коэффициенты при $\bar{X}^i$ в нашем примере, начиная с $\bar{X}^5$, не возрастают.

Так, $T_{12} \cdot \bar{X}^5 = 1716 \cdot 0,0000003 = 0,00051$.

В нашем расчете $\bar{X}^5$ и в более высоких степенях мы опускаем.

Далее по уравнению (14) определяем $\bar{X}_2$, подставив в правую часть уравнения найденную величину $\bar{X}_1$:

$$\begin{aligned}\bar{X}_2 &= \frac{-78 \pm \sqrt{6084 + 1144(4,67 - 745 \cdot 0,000129 - 1287 \cdot 0,0000065)}}{2286} \\ &= \frac{-78 \pm \sqrt{6084 + 1144(4,67 - 0,092 - 0,008)}}{572} = \frac{-78 \pm \sqrt{6084 + 5228}}{572} \\ &= \frac{-78 \pm 106,36}{572} = 0,0495.\end{aligned}$$

Для определения $\bar{X}_3$ подставим в правую часть уравнения (14) найденное значение $\bar{X}_2$, предварительно установив

$$\bar{X}_2^3 = 0,0495^3 = 0,000121, \quad \bar{X}_2^4 = 0,000006,$$

$$\begin{aligned}\bar{X}_3 &= \frac{-78 \pm \sqrt{6084 + 1144(4,67 - 745 \cdot 0,000121 - 1287 \cdot 0,000006)}}{572} \\ &= \frac{-78 \pm \sqrt{6084 + 1144(4,67 - 0,087 - 0,008)}}{572} = \frac{-78 \pm \sqrt{6084 + 5234}}{572} \\ &= \frac{-78 \pm 106,39}{572} = 0,0496.\end{aligned}$$

В результате проведенных расчетов имеем:

$$\bar{X}_1 = 0,0506, \bar{X}_2 = 0,0495, \bar{X}_3 = 0,0496,$$

$$|\bar{X}_2 - \bar{X}_1| = |0,0495 - 0,0506| = 0,0011; |\bar{X}_3 - \bar{X}_2| = |0,0496 - 0,0495| = 0,0001.$$

Следовательно, уже при третьем приближении мы определили величину среднего темпа прироста с заданной точностью $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-4}$. Искомый темп роста валового выпуска будет равен

$$Y = 1 + \bar{X}_3 = 1 + 0,0496 = 1,0496.$$

Как видно из приведенного примера, определение среднего параболического темпа роста требует сравнительно большого количества расчетов, а решая подобную задачу при отрицательном приросте (когда $\bar{X} < 0$), в уравнении (14) могут иметь место комплексные числа.

Для облегчения нахождения среднего (параболического) темпа роста, в условиях практической деятельности, автором статьи составлены таблицы, определяющие за-

висимость между величиной $\sum_{i=1}^n A_i$ и A_0 , средним (параболическим) темпом роста K , средним (параболическим) темпом роста

$Y = (1 + \bar{X}) \cdot 100$ и количеством периодов (количество членов нашего ряда) n . Ниже приведена выдержка из указанных таблиц (табл. 2).

Указанные таблицы, отражая зависимость между $\sum_{i=1}^n A_i$, A_0 , n и Y дают возможность без трудоемких вычислений определить любой из приведенных показателей, если известны три других. Эти же таблицы дают возможность определять средний темп роста при заданных объемах в конечном и базисном периодах, т. е. решать задачи, присущие таблицам геометрического ряда.

Таблица 2

Таблица значений коэффициента K

$Y=(1+X) \cdot 100$		Количество периодов n (лет, месяцев)							
		7	8	9	10	11	12	13	14
Темп роста, %	104,1	8,25	9,63	11,06	12,56	14,11	15,73	17,41	19,17
	104,2	8,28	9,67	11,12	12,63	14,20	15,84	17,54	19,32
	104,3	8,31	9,71	11,17	12,70	14,29	15,94	17,67	19,47
	104,4	8,34	9,75	11,23	12,77	14,38	16,05	17,80	19,62
	104,5	8,37	9,80	11,29	12,84	14,46	16,16	17,93	19,77
	104,6	8,41	9,84	11,34	12,91	14,55	16,27	18,06	19,93
	104,7	8,44	9,89	11,40	12,98	14,64	16,38	18,19	20,09
	104,8	8,47	9,93	11,46	13,06	14,73	16,49	18,32	20,25
	104,9	8,51	9,98	11,52	13,13	14,82	16,60	18,46	20,41
	105,0	8,54	10,02	11,58	13,21	14,91	16,71	18,60	20,57
	105,1	8,58	10,07	11,64	13,28	15,01	16,83	18,73	20,73
	105,2	8,62	10,12	11,70	13,36	15,10	16,94	18,86	20,89
	105,3	8,65	10,16	11,76	13,43	15,19	17,05	19,01	21,06
	105,4	8,69	10,21	11,82	13,51	15,28	17,17	19,15	21,23
	105,5	8,72	10,26	11,88	13,58	15,38	17,29	19,29	21,41

Решая вышепоставленную задачу при помощи таблицы, мы определяем лишь

$$K = \frac{\sum_{i=1}^{12} A_i}{A_0} = \frac{5 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^5} = 16,67, \text{ а затем в графе 12, соответствующей нашему } n, \text{ на-}$$

ходим ближайшие величины $K_1 = 16,60$ и $K_2 = 16,71$, соответствующие темпам роста $Y_1 = 104,9\%$ и $Y_2 = 105,0\%$.

Интерполируя разность $K - K_1 = 16,67 - 16,60 = 0,07$ относительно разности $K_2 - K_1 = 16,71 - 16,60 = 0,11$, имеем $\frac{0,07 \cdot 0,1}{0,11} = 0,06$.

Следовательно, $Y = 104,9 + 0,06 = 104,96\%$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Кабачник. К вопросу об исчислении средних темпов роста народного хозяйства. Вестн. статистики, 1949, № 4.
2. М. Каганский. О новом методе расчета среднего темпа. Научн. зап. Харьковского ин-та сов. торговли, 1951, вып. 2 (4).
3. Л. Казинец. Об исчислении сводных показателей динамики социально-экономических явлений. Вестн. статистики, 1956, № 5.
4. А. Карасев. К вопросу об исчислении среднегодовых темпов роста народного хозяйства. Вестн. статистики, 1949, № 2.
5. И. Писарев. Некоторые вопросы теории статистики. Вопр. экономики, 1948, № 7.
6. Фин Ди Си. К вопросу о методологии исчисления среднего темпа роста. Вестн. статистики, 1958, № 2.

Поступила в редакцию
22 IV 1965