

ОБ ОДНОМ ВИДОИЗМЕНЕНИИ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО УЛУЧШЕНИЯ ПЛАНА

Е. Г. ГОЛЬШТЕЙН

При решении задач линейного программирования методом последовательного улучшения плана полезно на каждой итерации иметь достаточно точную оценку отклонения имеющегося плана от искомого оптимума. В настоящей заметке показывается, что этого можно достичь ценой незначительного усложнения алгоритма метода улучшения плана.

Предлагаемый способ базируется на методе двусторонних оценок, изложенном в книге [1], хотя алгоритмически отличается от последнего.

Все рассуждения будут проводиться применительно к задаче, состоящей в максимизации линейной формы

$$L(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

В процессе изложения мы будем придерживаться терминологии книги [1].

Для начала процесса решения необходимо иметь опорный план

$$X' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$$

задачи (1) — (3) и план

$$Y' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_m)$$

задачи, двойственной по отношению к (1) — (3), которая состоит в минимизации линейной формы

$$\bar{L}(Y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \quad (4)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Пусть L^* — максимальное значение линейной формы (1) при условиях (2), (3). Из элементарных фактов теории двойственности вытекает

$$0 \leq L^* - L(X') \leq \bar{L}(Y') - L(X'). \quad (6)$$

Таким образом, имея план Y' двойственной задачи (4) — (5), можно оценить отклонение плана X' от искомого решения задачи (1) — (3).

В отличие от метода улучшения плана, в предлагаемом алгоритме движение к оптимуму осуществляется одновременно по планам прямой и двойственной задач, что дает возможность оценить в соответствии с (6) отклонение текущего плана от оптимального. При этом правая часть (6) сокращается (в невырожденном случае) после каждой итерации.

Если

$$L(Y') - L(X') = 0,$$

то согласно (6) план X' является решением задачи (1) — (3), а план Y' — решением задачи (4) — (5).

Допустим, что

$$L(Y') - L(X') > 0.$$

Объединим в множество $E(X, Y)$ такие индексы j ($j = 1, 2, \dots, n$), для которых либо

$$\delta_j(Y) = \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i - c_j = 0, \quad \text{либо } x_j > 0.$$

Условимся обозначать через $A(X, Y)$ задачу, которая отличается от (1) — (3) наличием дополнительных требований

$$x_j = 0, \quad \text{если } j \in E(X, Y).$$

Пусть X'' — оптимальный план задачи $A(X', Y')$, а

$$M' = (\mu_1', \mu_2', \dots, \mu_m')$$

— решение задачи, ей сопряженной.

Векторы X'' и M' вычисляются при помощи метода улучшения плана, который применяется к задаче $A(X', Y')$, отправляясь от исходного плана X' .

Могут представиться два случая:

$$1. \quad \Delta_j' = \sum_{i=1}^m a_{ij}\mu_i - c_j \geq 0 \quad \text{для } j = 1, 2, \dots, n, \quad \text{либо } L(X'') = L(Y').$$

2. Среди чисел Δ_j' имеются отрицательные, причем $L(X'') < L(Y')$. Первая возможность указывает на то, что X'' — решение задачи (1) — (3).

Если же имеет место вторая возможность, то при помощи векторов Y' и M' можно легко построить план Y'' задачи (4) — (5), более близкий к ее решению, чем Y' .

Действительно, пусть

$$Y'' = Y' + \theta'(M' - Y'), \quad (7)$$

где

$$\theta' = \min_{\Delta_j' < 0} \frac{\delta_j'}{\delta_j' - \Delta_j'}. \quad (8)$$

По построению неравенство $\Delta_j' < 0$ возможно лишь при $\delta_j' > 0$. Следовательно, $0 < \theta' < 1$.

Используя (7) и (8), имеем

$$\begin{aligned} \delta_j'' &= \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i'' - c_j = \delta_j' - \theta'(\delta_j' - \Delta_j') \geq \\ &\geq \begin{cases} \delta_j'(1 - \theta') + \theta'\Delta_j' \geq \delta_j'(1 - \theta') \geq 0, & \text{если } \Delta_j' \geq 0, \\ \delta_j' - \frac{\delta_j'}{\delta_j' - \Delta_j'}(\delta_j' - \Delta_j') = 0, & \text{если } \Delta_j' < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

т. е. Y'' — план задачи (4) — (5).

Далее,

$$\begin{aligned} L(Y'') &= L(Y') + \theta' [L(M') - L(Y')] = \\ &= L(Y') + \theta' [L(X'') - L(Y')] < L(Y'). \end{aligned}$$

Итак, в результате решения задачи $A(X', Y')$ мы получаем опорный план X'' задачи (1) — (3) и план Y'' задачи (4) — (5) такие, что либо X'' — искомое решение, либо $L(Y'') - L(X'') < L(Y') - L(X')$.

Совокупность шагов, необходимых для решения задачи $A(X', Y')$, назовем большой итерацией.

Если процесс решения задачи (1) — (3) еще не закончен, то векторы X'' и Y'' определяют задачу $A(X'', Y'')$, которая решается далее методом улучшения плана, отправляясь от плана X'' .

Отметим, что если j_0 — индекс, на котором достигается минимум (8), то $\Delta_{j_0} < 0$, причем $\delta_{j_0}'' = 0$, т. е. $j_0 \in E(X'', Y'')$. Поэтому в невырожденном случае первый же шаг очередной большой итерации приведет к увеличению линейной формы (1). Это обстоятельство указывает на конечность процесса. Тот же вывод остается в силе и в вырожденном случае, если только пользоваться известными приемами, гарантирующими от заклинивания.

Для численной реализации предлагаемого процесса естественно использовать второй алгоритм метода улучшения плана (метод обратной матрицы). В этом случае каждый шаг процесса представляет собой отдельную итерацию второго алгоритма, относящуюся к части векторов условий задачи (1) — (3).

План исходной задачи пересчитывается на каждом шаге. План двойственной задачи обновляется через несколько шагов, объединенных в большую итерацию, причем, как мы видели, это сравнительно малотрудоемкая операция.

Итак, предлагаемый метод, обеспечивая на каждом шаге возможность оценки отклонения имеющегося плана от оптимального, алгоритмически почти не отличается от метода улучшения плана.

При анализе задачи большого объема на ЦВМ методом улучшения плана процесс решения обычно разбивают на ряд больших итераций, каждая из которых состоит из нескольких шагов второго алгоритма, относящихся к фиксированному подмножеству векторов условий задачи (см., напр., § 2 гл. 9 книги [1]). Эта модификация обеспечивает экономное использование оперативной памяти машины.

Описанный процесс наиболее близок именно к этой модификации второго алгоритма. Единственное дополнительное требование, которое он предъявляет к алгоритму, состоит в следующем.

Вектор A_j должен быть включен в подмножество векторов условий, определяющих большую итерацию, если

$$\delta_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i - c_j = 0,$$

где $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ — текущий план двойственной задачи.

При анализе задачи предложенным методом естественным критерием окончания процесса решения является достаточная малость правой части неравенства (6). По-видимому, использование этого критерия в ряде случаев может привести к уменьшению отрицательной роли вычислительных ошибок, что особенно важно для задач большого размера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. Линейное программирование. М., 1963.

Поступила в редакцию
17 VII 1964