ЛЕТНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА ПО МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

В последние годы в ряде отраслей науки получила права гражданства новая, весьма эффективная форма обмена научной информацией и опытом практических работ — летняя школа. Организация летних школ успешно практикуется учеными-математиками и начинает прививаться также в математической экономике и социологии (об этом говорит пока небольшой опыт работы летней школы экономистов-математиков и социологов в г. Пярну в июле 1965 г.).

В данной информации будет рассказано о летней математической школе по методам решения оптимальных задач, которая была организована Академией наук СССР в г. Черновцы на Украине в период с 9 июня по 9 июля 1965 г. Здесь встретились люди (около 70 человек), занимающиеся экстремальными задачами в различных аспектах и представляющие разные организации Москвы, Ленинграда, Киева, Новосибирска, Риги, Каунаса и других городов. Обсуждались наиболее важные и перспективные направления в развитии этой области математики.

Были прочитаны следующие циклы лекций: 1) нелинейное программирование и градиентные методы — проф. А. А. Первозванский (Ленинград); 2) оптимальные задачи в теории уравнений с частными производными — канд. физ.-мат. наук К. А. Лурье (Ленинград); 3) специальные задачи динамического программирования и оптимальное стационарное управление — канд. физ.-мат. наук И. В. Романовский (Ленинград); 4) последовательные алгоритмы оптимизации — канд. физ.-мат. наук В. С. Михалевич (Киев); 5) численные методы решения задач оптимального управления — канд. физ.-мат. наук Ф. Л. Черноусько (Москва). В работу школы также входили семинарские занятия, на которых докладывались и обсуждались оригинальные работы участников школы. Циклы лекций носили в основном обзорный характер и в них излагались как хорошо известные результаты, так и совсем новые.

В курсе лекций А. А. Первозванского был дан общий обзор наиболее важных методов нелинейного программирования. Рассматривалась задача:

$$\min f(x),$$
$$g_i(x) \leqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, l), \qquad (1)$$
$$\varphi_k(x) = 0 \quad (k = 1, \ldots, m),$$
$$x \in R \subset R^n,$$

где R — выпуклая замкнутая ограниченная область.

Предполагалось, что функции и допустимые области выпуклы. Ограничения типа равенств рассматривались только линейные (иначе нарушается условие выпуклости). Более подробно докладчик остановился на методах, которые считаются наиболее эффективными в настоящее время: 1) методы штрафных функций (подробно изучены и хорошо зарекомендовали себя на практике); 2) методы возможных направлений или градиентные методы с большим шагом (в основном изложены в работах Зойтендейка); 3) метод выпуклой аппроксимации (сравнительно нов, мало известен).

Суть последнего метода заключается в следующем. Рассмотрим задачу (1) и предположим, что у нас имеется набор $x^j \in R$, тогда рассмотрим всевозможные выпуклые комбинации вида: $\bar{X} = \Sigma x^j u^j$, $\Sigma u^j = 1$, $u^j \geqslant 0$.

Из условий выпуклости имеем:

$$g_i(\bar{X}) \geqslant \Sigma g_i(x^j) u^j,$$
$$f(\bar{X}) \geqslant \Sigma f(x^j) u^j,$$
$$\varphi_k(\bar{X}) = \Sigma \varphi_k(x^j) u^j$$

для всех i, j, k.

Вместо исходной задачи рассмотрим аппроксимирующую:

$$\min z = \min_{\{u\}} \Sigma f(x^j) u^j$$
$$\text{при } \Sigma g_i(x^j) u^j \leqslant 0, \ \Sigma \varphi_k(x^j) u^j = 0, \qquad (2)$$
$$\Sigma u^j = 1, \ u^j \geqslant 0.$$

Это задача линейного программирования. Пусть вектор $\bar{u}^0$ — ее решение. Ясно, что $\bar{X} = \Sigma x^j u^{0j}$ удовлетворяет всем ограничениям исходной задачи 1 и $f(\bar{X}) \leqslant \bar{Z}$, где $\bar{Z}$ — минимальное значение в задаче (2). Если сетка, состоящая из всех x^j, достаточно плотно покрывала область R, то и решение $\bar{X}$ будет достаточно близко к решению исходной задачи (1). В то же время ясно, что большая плотность покрытия повлечет за собой большие вычислительные трудности. Однако существуют случаи, когда возникает возможность использовать лишь небольшое число точек для вычисления и в процессе решения пополнять сетку. В качестве примера реализации этого подхода приводился метод декомпозиции Данцига — Вулфа *.

В конце цикла проводилось сравнение изложенных методов с учетом их реализации на ЭВМ.

Интересным с теоретической точки зрения был цикл лекций К. А. Лурье, посвященный оптимальным задачам в теории уравнений с частными производ-

---

* См., например, статью Ф. Вулфа «Новые методы нелинейного программирования». В сб. Применение математики в эконом. исследов. Т. III. М., «Наука», 1965.

ными. Этот раздел пока совершенно новый и мало исследованный. На лекциях были разобраны очень интересные физические задачи, для которых удалось выписать необходимые условия экстремума.

Многие практические задачи укладываются в рамки динамической модели, и это определяет важность исследований их как теоретически, так и практически, в смысле реализации методов их решения на ЭВМ.

В двух циклах лекций разбирались именно эти модели. Цикл лекций И. В. Романовского был посвящен специальным задачам динамического программирования по оптимальному стационарному управлению, в частности, часто встречающемуся типу динамических задач, для которых предельный переход от рекуррентного соотношения Р. Беллмана к соответствующему функциональному уравнению невозможен.

Рассматривался процесс с конечным числом состояний $S = \{1, \ldots, s\}$, интерпретируемых как вершины конечного ориентированного, сильно связанного графа G. Для каждого состояния вершины i задается множество соседних вершин u_i графа G, т. е. состояний, в которое может перейти процесс за один шаг (из состояния i). При этом управлениям соответствуют дуги графа. Каждой дуге (ij) графа (управлению) сопоставлено число c_{ij} — доход, получаемый при переходе из состояния i в j. Задается начало процесса i_0 и его продолжительность N — число дуг пути. Необходимо найти путь длины N с началом в i_0, доход для которого был бы максимальным, т. е. найти такой путь $i_0, i_1, \ldots, i_N$, где $i_l \in u_{i_{l-1}}$ и для которого $\sum_{l=1}^{N} c_{i_{l-1} i_l}$ была бы максимальной. Обозначим этот максимум при $N = n$ и $i_0 = i$ через $f_n(i)$; используя рекуррентное соотношение Беллмана, можно записать: $f_n(i) = \max_{j \in u_i} [c_{ij} + f_{n-1}(j)]$, $f_0(i) = 0$. Очевидно, что $f_n(i) \to \infty$ при $n \to \infty$. Оказывается, что $f_n(i)$ растет линейно с ростом n, а коэффициент пропорциональности роста λ^* имеет довольно естественный смысл. Если рассматривать замкнутые траектории процесса и удельный доход λ для каждой из них (доход на контуре, деленный на число его дуг), то в силу конечности графа найдется контур с максимальным λ, который и есть не что иное, как λ^*.

При этом оптимальная траектория с фиксированным началом и длиной складывается из «подхода» к оптимальному контуру, для которого $\lambda = \lambda^*$, многократному прохождению по оптимальным контурам и «выхода» из него.

Излагался один из способов нахождения λ^*, связанный с решением задачи линейного программирования.

Далее рассматривался вероятностный аналог задачи, когда переход из состояния в состояние совершается случайно, в соответствии с задаваемым распределением вероятностей, а роль дохода играет математическое ожидание дохода. При этом показывалось, что для вероятностей задачи имеют место аналогичные результаты.

В конце цикла рассматривалась линейная замкнутая модель производства фон Неймана и полученные ранее результаты естественным образом связывались с теоремой о магистрали. В заключение были рассмотрены марковские процессы.

Цикл лекций В. С. Михалевича был посвящен своеобразной трактовке метода динамического программирования, как метода последовательного анализа вариантов, суть которого состоит в монотонном сужении области допустимых вариантов *. При этом оказывается, что в каждом конкретном случае содержательный анализ задачи позволяет эффективно отсеивать невыгодные варианты и тем самым сужать область, в которой имеется решение. Указанная методика плодотворно развивается в Институте кибернетики АН УССР, где на ее основе решен большой класс важных практических задач. На лекциях были разобраны дискретные детерминированные и стохастические модели. Доклад В. С. Михалевича был дополнен выступлением Н. Шора, который рассказал об экономных машинных реализациях метода последовательного анализа вариантов при решении ряда задач.

В цикле лекций Ф. Л. Черноусько все существующие методы были условно разделены на три типа. К первому типу отнесены методы, связанные с решением краевой задачи, которая получается применением принципа Понтрягина к исходной задаче; ко второму — методы, в которых строится итерационный процесс для нахождения оптимального управления; к третьему — методы, связанные с непосредственным нахождением оптимальной траектории. Особое внимание докладчик уделил последним двум, которые базируются в основном на идеях градиентных методов и методов динамического программирования. Эти методы сейчас активно разрабатываются в вычислительном центре АН СССР, где создан ряд стандартных программ, реализующих их, и накоплен большой опыт по применению этих методов для реше-

* Более подробно можно ознакомиться с содержанием доклада В. С. Михалевича по его статье (Кибернетика, 1965, № 1).

ния задач на ЭВМ. Об одной из таких стандартных программ было рассказано в докладе сотрудника ВЦ АН СССР В. Борисова.

Надо отметить, что лекции сопровождались оживленными беседами и дискуссиями, что способствовало выяснению спорных и принципиальных вопросов. Большой интерес вызвали также доклады на семинарах, в которых участники школы знакомили аудиторию со своими работами, как правило, еще не опубликованными или даже еще не законченными. О некоторых из них здесь уже упоминалось. Из других отметим, в частности, доклады В. Демьянова, Б. Пшеничного, В. Коробкова, М. Нейгауз.

В том, что работа школы проходила успешно — немалая заслуга ее оргкомитета (председатель проф. Н. Н. Моисеев). Можно пожелать лишь, чтобы при организации следующей школы заранее были отпечатаны и разосланы тезисы лекций.

Школа несомненно способствовала расширению кругозора участников, дала возможность установить более тесные контакты между представителями различных учреждений, обменяться мнениями по широкому кругу вопросов. Организация таких школ в более широком масштабе, в особенности по смежным дисциплинам (математическая экономика, математическая социология), принесет большую пользу развитию нашей науки.

А. А. Фридман, М. М. Беркович