ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1965 том I, вып. 1

РЕШЕНИЕ РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО СОКРАЩЕНИЯ НЕВЯЗОК

Е. Б. ТРИУС

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования, называемую распределительной (обобщенной транспортной):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \leqslant a_i; \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j; \tag{2}$$

$$x_{ij} \geqslant 0. \tag{3}$$

Найти

$$\min \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} C_{ij}x_{ij}. \tag{4}$$

Заданные коэффициенты a_{ij} и C_{ij} предполагаются неотрицательными, а a_i и b_j — положительными.

Весьма большой круг задач линейного программирования, встречающихся при решении вопросов планирования, может быть сведен к этой задаче. Одна из многочисленных экономических интерпретаций этой задачи заключается в следующем. Имеется m видов сырья в количествах $a_1, a_2, \ldots, a_m$ единиц. Имеется n пунктов производства, в которых любой вид этого сырья может перерабатываться в готовый продукт, причем на изготовление единицы готового продукта в j-м пункте производства идет a_{ij} единиц сырья i-го вида. Заданы количества $b_1, b_2, \ldots, b_n$ единиц продукта, которые должны быть изготовлены в каждом из пунктов производства. Пусть x_{ij} — количество продукта, изготовляемое в j-м пункте производства из сырья i-го вида, а C_{ij} — стоимость изготовления единицы продукта этим способом.

Требуется найти такой план производства (матрицу $\|x_{ij}\|$), который не приводит к перерасходу сырья [условие (1)], обеспечивает требования по выходу продукта в каждом пункте производства [условие (2)] и обращает в минимум общую стоимость производства [функционал (4)].

Применение к этой задаче общих методов линейного программирования без какого-либо их видоизменения неэффективно в силу большого числа неизвестных — $m \times n$. Однако эти методы могут быть положены в основу разработки специальных алгоритмов решения распределительной задачи, учитывающих специфику ее условий. В литературе описано несколько таких алгоритмов [1, 2, 3]. Все они, за исключением [1], представляют собой реализации общего метода последовательного улучшения плана. Недостатком этого метода наряду с чувствительностью к вырожденности является необходимость определения исходного плана, что применительно к рассматриваемой задаче связано со значительными трудностями в тех случаях, когда множество допустимых планов сильно сужено жесткостью условий (1), (2).

Поэтому значительный интерес представляет разработка алгоритмов решения распределительной задачи, основанных на других методах линейного программирования, в частности на методе последовательного сокращения невязок, который в случае обычной транспортной задачи приводит к одному из самых эффективных алгоритмов (венгерский метод, метод условно-оптимальных планов).

В работе [1] предложен метод решения распределительной задачи, являющийся обобщением метода условно-оптимальных планов. В настоящей статье описывается и обосновывается другая реализация метода последовательного сокращения невязок, являющаяся в известной мере обобщением венгерского метода решения обычной транспортной задачи. На основе предлагаемого алгоритма в настоящее время разработана программа решения распределительной задачи на ЦВМ.

Перед изложением алгоритма, которое проводится в разделе 4, в разделе 2 доказываются две теоремы, необходимые для его вывода, а в разделе 3 формулируется и решается вспомогательная задача о минимизации перерасхода сырья, на базе которой строится алгоритм решения сформулированной задачи.

2. ТЕОРЕМЫ О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ МАТРИЦЫ СТОИМОСТЕЙ

Рассмотрим две теоремы о преобразованиях матрицы стоимостей $\|C_{ij}\|$, используемые при построении алгоритма.

Теорема 1. *Преобразование столбцов матрицы* $\|C_{ij}\|$, *выполняемое по формуле*

$$C'_{ij} = C_{ij} + d_j, \tag{5}$$

приводит к новой задаче с теми же условиями (1), (2), (3) *и измененным функционалом* (4), *множество оптимальных планов которой совпадает с множеством оптимальных планов исходной задачи.*

Другими словами, теорема утверждает, что в процессе решения задачи ко всем элементам любого столбца матрицы $\|C_{ij}\|$ можно прибавлять одно и то же произвольное число (как положительное, так и отрицательное).

Доказательство. Очевидно, что множества всех планов для обеих задач совпадают. Пусть план $\|x_{ij}\|$ оптимален для задачи с преобразованной матрицей C'_{ij}. Это означает, что

$$\sum_i \sum_j C_{ij}' x_{ij} \leqslant \sum_i \sum_j C_{ij}' x_{ij}',$$

где x_{ij}' — любой план этой задачи.

Выразим C_{ij}' в этом соотношении через C_{ij}, используя (5),

$$\sum_j \sum_i (C_{ij} + d_j) x_{ij} \leqslant \sum_j \sum_i (C_{ij} + d_j) x_{ij}'$$

или

$$\sum_j \sum_i C_{ij} x_{ij} + \sum_j d_j \sum_i x_{ij} \leqslant \sum_j \sum_i C_{ij} x_{ij}' + \sum_j d_j \sum_i x_{ij}'.$$

Поскольку любой план удовлетворяет условию (2), получаем

$$\sum_j \sum_i C_{ij} x_{ij} + \sum_j d_j b_j \leqslant \sum_j \sum_i C_{ij} x_{ij}' + \sum_j d_j b_j$$

или окончательно

$$\sum_j \sum_i C_{ij}x_{ij} \leqslant \sum_j \sum_i C_{ij}x_{ij}'.$$

Последнее соотношение показывает, что план $\|x_{ij}\|$ оптимален для исходной задачи. Аналогично показывается, что план, оптимальный для исходной задачи, оптимален для задачи с преобразованной матрицей $\| C_{ij}' \|$.

Теорема 2. *Преобразование строк матрицы* $\|C_{ij}\|$, *выполняемое по формуле*

$$\begin{aligned} C_{ij}' &= C_{ij} + k_1 a_{ij} \quad \text{при } i \in M, \\ C_{ij}' &= C_{ij} \qquad\qquad \text{при } i \overline{\in} M, \end{aligned} \tag{6}$$

где M — произвольное подмножество множества номеров строк и k_i — произвольные положительные числа, приводит к новой задаче, любой оптимальный план $\|x_{ij}\|$ которой, удовлетворяющий условию

$$\sum_j a_{ij}x_{ij} = a_i \quad \text{при} \quad i \overline{\in} M, \tag{7}$$

является оптимальным для исходной задачи.

Другими словами, теорема утверждает, что если к произвольным строкам матрицы $\|C_{ij}\|$ прибавить соответствующие строки матрицы $\|a_{ij}\|$, умноженные на любые положительные числа, и если для полученной матрицы $\| C_{ij}' \|$ будет найден оптимальный план, обращающий условия по преобразованным строкам в строгие равенства, то этот план является оптимальным для исходной задачи.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть план x_{ij} оптимален для задачи с преобразованной матрицей C_{ij}' и для этого плана имеют место равенства (7).

Из оптимальности плана следует соотношение

$$\sum_i \sum_j C_{ij}'x_{ij} \leqslant \sum_i \sum_j C_{ij}'x_{ij}', \tag{8}$$

где x_{ij}' — любой план, удовлетворяющий соотношениям (1), (2), (3).

Выразим C_{ij}' в этом соотношении через C_{ij}, используя (6):

$$\sum_{i \in M} \sum_j (C_{ij} + k_i a_{ij})\, x_{ij} + \sum_{i \overline{\in} M} \sum_j C_{ij}x_{ij} \leqslant \sum_{j \in M} \sum_j (C_{ij} + k_i a_{ij}')\, x_{ij} + \sum_{i \overline{\in} M} \sum_j C_{ij}x_{ij}'$$

или

$$\sum_i \sum_j C_{ij}x_{ij} + \sum_{i \in M} k_i \sum_j a_{ij}x_{ij} \leqslant \sum_i \sum_j C_{ij}x_{ij}' + \sum_{i \in M} k_i \sum_j a_{ij}x_{ij}'.$$

Учитывая (7), получим

$$\sum_i \sum_j C_{ij}x_{ij} \leqslant \sum_i \sum_j C_{ij}x_{ij}' - \sum_{i \in M} k_i \Big(a_i - \sum_j a_{ij}x_{ij}' \Big).$$

Поскольку величины, стоящие в круглых скобках правой части неравенства, неотрицательны для любого плана x_{ij}' имеет место неравенство

$$\sum_i \sum_j C_{ij}x_{ij} \leqslant \sum_i \sum_j C_{ij}x_{ij}', \tag{9}$$

показывающее, что план x_{ij} оптимален для исходной задачи. Тем самым теорема доказана.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА О МИНИМИЗАЦИИ ПЕРЕРАСХОДА СЫРЬЯ И МЕТОД ЕЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим вспомогательную задачу следующего содержания. Пусть совокупность разрешенных способов производства задана условием: употребление i-го вида сырья в j-м пункте производства разрешается только в том случае, если $C_{ij} = 0$. Это требование можно записать так:

$$x_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad C_{ij} \neq 0. \tag{10}$$

При таком ограничении, накладываемом на величины x_{ij}, значительно труднее (а может быть, невозможно) обеспечить выполнение всех требований (2) без перерасхода сырья. Поэтому разрешим перерасход сырья по некоторым строкам (видам сырья), множество номеров которых обозначим через N. Под планом рассматриваемой вспомогательной задачи будем понимать любую совокупность величин x_{ij}, удовлетворяющую условиям (2), (3) и (10), но не обязательно удовлетворяющую всем условиям (1), т. е. допускающую перерасход сырья в строках, номера которых принадлежат множеству N.

Задача заключается в отыскании плана, обращающего в минимум общий перерасход сырья по тем строкам (видам сырья), где он есть в соответствии с первоначальным планом, причем первоначальный план предполагается известным.

Математическая формулировка задачи такова.

Требуется найти план производства, удовлетворяющий условиям:

$$x_{ij} \geqslant 0;$$

$$x_{ij} = 0 \qquad \text{при } C_{ij} = 0;$$

$$\sum_j x_{ij} = b_j;$$

$$\sum_j a_{ij}x_{ij} \leqslant a_i \quad \text{при} \quad i \,\overline{\in}\, N$$

и обращающий в минимум функцию

$$\sum_{i \in N} \sum_j a_{ij}x_{ij}.$$

На основании теории двойственности сформулируем критерий оптимальности плана $\|x_{ij}\|$. План $\|x_{ij}\|$, предполагающий перерасход по некоторым строкам $i\,(i \in N,\ N$ — не пусто), оптимален в том и только в том случае, если существует система оценок $\bar{v}_j$ всех столбцов и оценок $u_i \geqslant 0$ тех строк, для которых $i \in N$, такая, что имеют место соотношения:

$$\begin{aligned}
&x_j \geqslant -a_{ij} && \text{при} \quad C_{ij} = 0,\ i \in N;\\
&v_j = -a_{ij} && \text{при} \quad x_{ij} > 0,\ i \in N;
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
&v_j + a_{ij}u_i \geqslant 0 && \text{при} \quad C_{ij} = 0,\ i \,\overline{\in}\, N;\\
&v_j + a_{ij}u_i = 0 && \text{при} \quad x_{ij} > 0,\ i \,\overline{\in}\, N;\\
&u_i = 0 && \text{при} \quad \sum_j a_{ij}x_{ij} < a_i.
\end{aligned} \tag{12}$$

Если приписать строкам с перерасходом ($i \in N$) единичные оценки, то соотношения (11) приобретают ту же форму, что соотношения (12), т. е. для всех строк

$$v_j + a_{ij}u_i \geqslant 0 \quad \text{при} \quad C_{ij} = 0, \tag{13}$$

$$v_j + a_{ij}u_i = 0 \quad \text{при} \quad x_{ij} \neq 0. \tag{14}$$

Идея решения вспомогательной задачи заключается в том, что для имеющегося плана производится попытка построения системы оценок, удовлетворяющей условиям (13), (14). Если удается построить такую систему, то анализируемый план оптимален и вспомогательная задача решена. Если же в процессе построения оценок выявляется невозможность удовлетворить какому-либо из условий (13), (14), то производится корректировка плана, приводящая к уменьшению перерасхода, после чего следует новая итерация, в основу которой положен вновь полученный план.

Таким образом, решение состоит из ряда итераций, каждая из которых разбивается на две части — построение системы оценок для имеющегося плана и корректировка плана.

Перейдем к описанию метода решения. При описании будем говорить о таблице размером $m \times n$, клеткам которой поставим в соответствие числа x_{ij} и C_{ij}. Клетки, соответствующие $C_{ij} = 0$, будем называть допустимыми клетками, а клетки, для которых $x_{ij} \neq 0$, — клетками с ненулевым производством.

А. Построение системы оценок. В начале каждой итерации строкам, в которых есть перерасход, приписывают в соответствии с ранее сказанным оценки $u_i = 1$, а номера этих строк записывают в таблицу строк, подлежащих рассмотрению.

Далее в строках, подлежащих рассмотрению, находят клетки с ненулевым производством. Их столбцам (если они не имели оценок) присваивают согласно критерию оптимальности оценки, определяемые по формуле (14), т. е.

$$v_j = -a_{ij}u_i,$$

а номер строки (если она не имеет остатка) записывают в таблицу строк, подлежащих рассмотрению.

После того как все строки, подлежащие рассмотрению, рассмотрены, приступают к поиску допустимых клеток в столбцах, подлежащих рассмотрению.

Для каждой найденной допустимой клетки присваивают ее строке (если она не имеет еще оценки) оценку

$$u_i = -\frac{v_j}{a_{ij}},$$

а номер строки (если она не имеет остатка) записывают в таблицу строк, подлежащих рассмотрению.

Далее возобновляют рассмотрение строк, которое повлечет за собой присвоение оценок новым столбцам и запись их в таблицу столбцов, подлежащих рассмотрению, что в свою очередь позволит возобновить просмотр столбцов, влекущий за собой присвоение оценок новым строкам.

Описанная процедура является, таким образом, процедурой последовательного определения оценок строк и столбцов. При этом формула (14) применяется поочередно к допустимым клеткам, стоящим в столбцах, уже имеющих оценку, для определения оценок строк и к клеткам с ненулевым производством, стоящим в строках, уже имеющих оценку, для определения оценок столбцов. Таким образом, процесс образования оценок есть в то же время процесс образования разветвляющейся сети клеток, начальные клетки которой лежат в строках с перерасходом.

В дальнейшем нам может понадобиться для любой клетки этой сети выделить из сети цепочку клеток, которая привела к рассматриваемой клетке от некоторой начальной клетки сети, т. е. от клетки, стоящей в строке с перерасходом. С этой целью при назначении оценки каждого столбца или строки следует фиксировать «происхождение» этой оценки, т. е. запоминать номер строки или столбца, оценка которого была использована при назначении этой оценки.

Процесс построения сети клеток и назначения этих оценок после конечного числа шагов приводит к одной из следующих пяти ситуаций.

1. В строках, подлежащих рассмотрению, отсутствуют клетки с ненулевым производством, кроме тех клеток, через которые были назначены оценки этих строк.

2. В столбцах, подлежащих рассмотрению, отсутствуют допустимые клетки, кроме тех, через которые были назначены оценки этих столбцов.

3. При рассмотрении некоторого столбца в нем нашлась допустимая клетка, принадлежащая строке с остатком сырья.

4. При рассмотрении некоторого столбца в нем нашлась допустимая клетка, принадлежащая строке, уже имеющей оценку, причем эта оценка обязана своим происхождением столбцу, отличному от рассматриваемого.

5. При рассмотрении некоторой строки в ней нашлась клетка с ненулевым производством, принадлежащая столбцу, уже имеющему оценку, причем эта оценка обязана своим происхождением строке, отличной от рассматриваемой.

Первые две ситуации, как будет показано ниже, означают, что искомая система оценок построена, и, следовательно, вспомогательная задача решена — исследуемый план обеспечивает минимальный перерасход сырья в строках, в которых этот перерасход допустим.

Возникновение третьей ситуации означает нарушение условия (12) для строки с остатком, содержащей найденную клетку, так как этой строке согласно алгоритму присвоена ненулевая оценка. Однако третья ситуация позволяет выявить цепочку клеток, соединяющую строку с перерасходом со строкой с остатком сырья. Наличие такой цепочки позволяет улучшить план путем перераспределения в клетках этой цепочки, что будет описано ниже.

Пятую ситуацию целесообразно исключить, сведя ее к четвертой следующим приемом. Пусть при рассмотрении строки i нашлась клетка (i, j), такая, что столбец j уже имеет оценку, обязанную своим происхождением строке i^*. Строка i^* также имеет оценку, причем эта оценка произошла от столбца, отличного от столбца j. Припишем столбцу j новую оценку на основании формулы (14), выписанной для клетки (ij). Теперь при рассмотрении столбца j мы обнаруживаем в нем допустимую клетку (i^*, j), стоящую в строке, уже имеющей оценку, причем эта оценка обязана своим происхождением столбцу, отличному от столбца j. Таким образом, мы пришли к четвертой ситуации. Рассмотрим ее.

Возникающая ситуация заключается в том, что в некоторой строке ν наряду с клеткой, заканчивающей цепочку клеток, идущую от строки с перерасходом, имеется другая клетка, через которую была определена оценка этой строки. Эта клетка также заканчивает некоторую другую цепочку клеток, идущую от какой-то строки с перерасходом. При этом каждая из двух цепочек приводит к своей оценке строки ν. Следовательно, какую бы оценку строки ν мы ни приняли, условие (14) будет нарушаться для одной из ее клеток.

При этом существенно, имеют ли обе упомянутые цепочки общую начальную часть или они идут от различных строк с перерасходом. Какой из этих двух случаев имеет место, легко установить, сравнив, например, номера строк, породивших каждую из цепочек.

Пусть цепочки идут от различных строк с перерасходом.

Примем за новую оценку строки ν бо́льшую из двух возможных оценок, после чего проанализируем ту цепочку, которая соответствует отмененной, т. е. меньшей, оценке. Этот анализ заключается в выявлении среди клеток цепочки первой клетки с нулевым производством (счет клеток ведем, начиная с клетки, стоящей в строке ν). Заметим, что такой клеткой может быть лишь клетка, имеющая нечетный номер.

В случае, если клетка с нулевым производством не будет обнаружена, появляется возможность улучшить план путем перераспределения производств в двух цепочках, идущих от строк с перерасходом до строки ν. (Алгоритм этого улучшения плана будет описан ниже.) Если же такая клетка найдется, то, как будет выяснено позже, перераспределение производств не может быть выполнено. Однако в этом случае появляется возможность такой корректировки оценок, которая обеспечивает выполнение равенства (14) для всех клеток, кроме последней клетки проанализированной части цепочки, т. е. клетки, для которой $x_{ij} = 0$, а для этой клетки обеспечивает выполнение неравенства (13). Это может быть достигнуто продлением цепочки, определившей оценку строки ν, за счет присоединения к ней проанализированной части другой цепочки, в результате чего обе цепочки будут смыкаться в обнаруженной клетке с $x_{ij}=0$, где выполнение равенства (14) необязательно. При этом, разумеется, необходимо переназначить оценки всех линий, принадлежащих вновь присоединенной части удлинившейся цепочки, исходя из принятой оценки строки ν. Кроме того, необходимо переназначить оценки всех строк и столбцов, обязанных своим происхождением этим линиям.

Такое переназначение следует проводить, начиная со строки ν. При этом предварительно нужно наметить путь движения по тем линиям, у которых следует переназначить оценки, а уже затем осуществить указанное переназначение.

С этой целью при движении по анализируемой цепочке от строки ν будем для каждого очередного столбца (строки) указывать в качестве строки (столбца), от которой произошла его оценка, предыдущую строку (столбец). Другими словами, в качестве строки, от которой произошла оценка столбца, содержащего первую клетку цепочки, укажем строку этой клетки, т. е. строку, получившую новую оценку; в качестве столбца, от которого произошла оценка строки, содержащей вторую клетку цепочки, укажем столбец, содержащий первую клетку цепочки, и так далее до тех пор, пока не придем к клетке с нулевым производством, обнаружение которой заканчивает анализ.

В результате выполнения этапа анализа, сопровождающегося изменением происхождения линий, у которых следует переназначить оценки, и завершающегося обнаружением клетки с $x_{ij} = 0$, намечен путь движения от строки ν по этим линиям.

Процесс переназначения оценок этих линий (начиная от строки ν) и всех линий, происходящих от них, может быть реализован описанным выше алгоритмом назначения оценок, если его дополнить следующим образом. Когда при просмотре некоторой строки (столбца) выявляется клетка с ненулевым производством (допустимая клетка), стоящая в столбце (строке), уже имеющем оценку, нужно проверить происхождение оценки этого столбца (строки). Если оно отлично от просматриваемой строки (столбца), то фиксируется 4-я (5-я) ситуация и начинается анализ одной из цепочек, описанный выше. Если же эта оценка произошла от просматриваемой строки (столбца), а условие (14), выписанное для найденной клетки, не имеет места (такая ситуация возникает после выполнения процедуры анализа для клеток проанализированной части цепочки), то следует переназначить эту оценку столбца (строки), применив формулу (14) для найденной клетки, а сам столбец (строку) следует включить в число столбцов (строк), подлежащих рассмотрению, с тем чтобы в дальнейшем были изменены оценки линий, обязанные своим происхождением этому столбцу (строке). Если же условие (14), выписанное для данной клетки, выполняется, то следует продолжить просмотр строки (столбца), не производя никаких дополнительных операций.

Дополненный таким образом, алгоритм назначения оценок должен быть продолжен после окончания анализа цепочки, причем предварительно строка ν должна быть записана в число строк, подлежащих рассмотрению.

Нетрудно видеть, что применение этого алгоритма в результате сделанного исправления происхождения столбцов и строк проанализированной части цепочки приведет к тому, что все оценки этих линий и оценки других линий, происходящие от них, после конечного числа шагов (случай наличия общей части обеих цепочек пока оставлен в стороне) будут переназначены. При этом условия (14) будут выполнены.

Что касается последней клетки проанализированной части цепочки, т. е. допустимой клетки, для которой $x_{ij} = 0$, то ее строка получит в результате переназначения бо́льшую оценку, а ее столбец сохранит свою оценку. Другими словами, для этой клетки будет выполняться условие (13).

Теперь рассмотрим случай, когда обе цепочки идут от одной строки с перерасходом и, следовательно, могут иметь общую начальную часть, которая разветвляется на две цепочки, смыкающиеся в дальнейшем одна с другой.

В этом случае появляется опасность того, что процесс переназначения окажется бесконечным. Такая ситуация возникает, если первая клетка с нулевым производством, найденная при анализе одной из цепочек, находится в общей начальной части обеих цепочек. Тогда процесс переназначения оценок при движении по проанализированной цепочке распространяется на другую цепочку через клетку, в которой произошло ветвление общей части обеих цепочек, и далее переназначение оценок происходит по замкнутой части и поэтому не может закончиться. Однако эта ситуация отсутствия клеток с нулевым производством в части проанализированной цепочки, лежащей вне общей начальной части обеих цепочек, дает возможность улучшить план, что будет показано ниже.

Итак, при возникновении четвертой ситуации вначале следует проверить, совпадают ли номера строк с перерасходом, начинающих обе цепочки. Если они не совпадают, то следует анализировать всю цепочку, приводящую к меньшей оценке строки. В противном случае следует выявить клетку, в которой произошло ветвление общей части обеих цепочек, и анализ цепочки проводить лишь до этой клетки.

Таким образом, дополнение алгоритма назначения оценок алгоритмом анализа цепочки с изменением происхождения линий и алгоритмом переназначения оценок дает возможность в случае возникновения четвертой ситуации продолжить процесс назначения и переназначения оценок, если среди клеток анализируемой цепочки есть клетки с $x_{ij} = 0$.

Покажем теперь, что возникновение первой или второй ситуации означает оптимальность имеющегося плана. Для этого припишем всем линиям, не имеющим оценок, нулевые оценки. Теперь совокупность допустимых клеток можно разбить на следующие три категории.

1. Допустимые клетки, строки и столбцы которых имеют нулевые оценки. Очевидно, что для них условия оптимальности плана (13), (14) выполняются.

2. Допустимые клетки, строки и столбцы которых имеют ненулевые оценки. Легко видеть, что описанный алгоритм обеспечивает выполнение соотношений (14) для всех клеток, для которых $x_{ij} > 0$. Если же для некоторой допустимой клетки $x_{ij} = 0$, то это соотношение может не выполняться, если эта клетка является последней клеткой в части цепочки клеток, идущей до некоторой строки, в которой была обнаружена четвертая ситуация. Но в этом случае оценка строки была увеличена по сравнению

с ранее имевшейся оценкой, удовлетворявшей условию (14). Поэтому для такой клетки имеет место соотношение (13).

3. Допустимые клетки с $x_{ij} = 0$, строки которых имеют ненулевые оценки, а столбцы — нулевые. В силу положительности оценок строк для этих клеток выполняются условия оптимальности (13).

Из сказанного вытекает, что полученная система оценок удовлетворяет всем условиям (13), (14), а следовательно, план оптимален и задача решена.

Остается убедиться в том, что процесс построения системы оценок (т. е. первая часть каждой итерации) после конечного числа шагов приводит или к корректировке плана, или к выявлению оптимальности плана. Заметим, что оценка каждой строки может принимать конечное число значений, ибо существует конечное число цепочек, ведущих от строк с перерасходом к рассматриваемой строке. Следовательно, и общее число совокупностей оценок конечно. Поскольку в процессе построения оценок оценки строк лишь повышаются, каждое новое назначение оценки приводит к новой совокупности оценок, откуда и следует конечность процесса построения оценок.

Б. Корректировка плана. Ко второй части итерации мы приходим в двух случаях: или когда возникла третья ситуация, или когда возникла четвертая ситуация и при этом среди клеток проанализированной части цепочки отсутствуют клетки с $x_{ij} = 0$.

Перед тем как рассматривать эти случаи, рассмотрим некоторые свойства оценок, построенных выше.

Рассмотрим цепочку допустимых клеток, связывающую строку с перерасходом с какой-нибудь строкой k.

Не уменьшая общности, с целью упрощения индексации примем, что строка с перерасходом имеет номер *1*, а цепочка состоит из следующих клеток: (*1*, *1*), (*2*, *1*), (*2*, *2*), (*3*, *2*), ..., $(k-1, k-1)$, $(k, k-1)$.

Оценки строк и столбцов, принадлежащих цепочке, в соответствии с описанным выше алгоритмом назначения оценок, равны:

$$u_1 = 1;$$
$$v_1 = -a_{11}u_1 = -a_{11};$$
$$u_2 = -\frac{v_1}{a_{21}} = \frac{a_{11}}{a_{21}};$$
$$v_2 = -a_{22}u_2 = -\frac{a_{22}a_{11}}{a_{21}};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v_{k-1} = -u_{k-1}a_{k-1,\,k-1};$$
$$u_k = -\frac{v_{k-1}}{a_{k,\,k-1}}.$$

Перераспределим неизвестные, соответствующие клеткам этой цепочки, по формулам:

$$x_{11}' = x_{11} - \Delta/a_{11} = x_{11} + \Delta/v_1;$$
$$x_{21}' = x_{21} + \Delta/a_{11} = x_{21} - \Delta/v_1;$$
$$x_{22}' = x_{22} - \frac{\Delta a_{21}}{a_{11}a_{22}} = x_{22} + \Delta/v_2; \tag{15}$$

$$x_{32}' = x_{32} + \frac{\Delta a_{11} a_{22}}{a_{21}} = x_{32} - \Delta / v_2;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x'_{k-1,\, k-1} = x_{k-1,\, k-1} + \Delta / v_{k-1};$$

$$x'_{k,\, k-1} = x_{k,\, k-1} - \Delta / v_{k-1}.$$

При таком перераспределении ни одно из условий (2) не нарушается и ни в одной строке, кроме *1*-й и k-й, величина расхода сырья не изменяется. При этом если $\Delta > 0$, то в *1*-й строке расход сырья уменьшается на величину Δ, а в k-й строке появляется перерасход $(-\Delta / v_{k-1}) \cdot a_{k,\, k-1}$ или Δ / u_k. Если же $\Delta < 0$, то в *1*-й строке перерасход увеличивается, а в k-й строке появляется остаток.

Величина Δ должна выбираться таким образом, чтобы не оказались нарушенными условия (3) неотрицательности неизвестных.

Поэтому при $\Delta > 0$ его следует выбирать в соответствии с неравенством

$$\Delta^+ \leqslant \min_s - (x_{ss} \cdot v_s) \qquad s = 1,2, \ldots, k-1.$$

Если же $\Delta < 0$, то оно должно удовлетворять соотношению

$$|\Delta^-| \leqslant \min_s - (x_{s+1,\, s} \cdot v_s)\, s = 1,2, \ldots, k-1.$$

Заметим, что значения x_{ss}, соответствующие нечетным клеткам цепочки (если перенумеровать их, начиная с клетки, стоящей в строке с перерасходом), все отличны от нуля. Это следует из правила построения оценок столбцов. Поэтому преобразования x_{ij} в клетках цепочки, соответствующие Δ^+ (т. е. ведущие к уменьшению перерасхода), всегда возможны. В то же время преобразования, соответствующие Δ^-, возможны не всегда, а лишь при условии, что среди четных клеток цепочки нет ни одной клетки с нулевым производством.

Перейдем теперь к описанию алгоритма корректировки плана, рассмотрев сначала случай обнаружения двух цепочек, ведущих от различных строк с перерасходом к одной и той же строке ν, затем случай обнаружения цепочки, ведущей от строки с перерасходом к строке с остатком сырья, и, наконец, случай обнаружения двух цепочек, ведущих от одной и той же строки с перерасходом.

1. Пусть к некоторой строке ν от различных строк с перерасходом идут две цепочки клеток, каждая из которых приводит к своей оценке строки ν. Пусть эти оценки есть u и u' и при этом

$$u > u'. \tag{16}$$

Выполним описанное выше преобразование переменных для клеток каждой из этих цепочек, подобрав Δ и Δ' таким образом, чтобы в рассматриваемой строке ν суммарный расход сырья не изменился. Это требование будет обеспечено, если

$$\Delta / u = -\Delta' / u'.$$

Отсюда

$$\Delta' = -\Delta \frac{u'}{u}. \tag{17}$$

При этом суммарный перерасход сырья по обеим строкам с перерасходом, от которых идут цепочки, уменьшится на величину

$$\Delta\left(1 - \frac{u'}{u}\right).$$

Поскольку наша цель — уменьшить перерасход, следует с учетом (16) выбрать Δ положительным. Как было сказано выше, соответствующее преобразование неизвестных для цепочки, приведшей к оценке u (большей оценке) строки ν, может быть сделано всегда. При этом Δ' оказывается отрицательным, и, следовательно, преобразования переменных, соответствующих клеткам другой цепочки, т. е. цепочки, приведшей к меньшей оценке строки ν, могут быть выполнены, если эта цепочка не имеет клеток с нулевыми производствами, а это было выяснено при ее анализе.

Пусть x — первоначальное значение неизвестного, соответствующего s-й нечетной клетке первой цепочки, т. е. той цепочки, которая привела к большей оценке строки ν, и для которой определяется Δ (отсчет клеток цепочки ведем от строки с перерасходом). В соответствии с условием неотрицательности (3) должно выполняться неравенство

$$x_s + \Delta / v_s \geqslant 0$$

или

$$\Delta \leqslant -v_s x_s.$$

Поскольку перерасход сырья, имевший место в строке с перерасходом, соответствующей первой цепочке, не должен стать отрицательным, должно выполняться неравенство

$$\Delta \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} - a_i,$$

где i — номер строки с перерасходом, о которой идет речь.

Пусть x_l — первоначальное значение неизвестного, соответствующего l-й четной клетке второй цепочки, т. е. цепочки, приведшей к меньшей оценке строки ν. В соответствии с условием неотрицательности (3) должно выполняться неравенство

$$x_l - \Delta' / v_l \geqslant 0$$

или с учетом (17)

$$\Delta \leqslant -v_l x_l \frac{u}{u'}.$$

Итак, в качестве величины Δ следует принять

$$\Delta = \min_{s,\, l}\left(-v_s x_s,\ -v_l x_l \frac{u}{u'},\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} - a_i \right), \tag{18}$$

где s — номера нечетных клеток первой цепочки (счет клеток цепочки ведется, начиная от строки с перерасходом);

l — номера четных клеток второй цепочки;

i — номер строки с перерасходом, начинающей первую цепочку.

Выполнив при выбранном Δ и определяемом через него по формуле (17) Δ' преобразования неизвестных в обеих цепочках по формулам (15), получим новый план вспомогательной задачи с меньшим перерасходом сырья, что означает конец рассматриваемой итерации.

Далее переходим к следующей итерации, если суммарный перерасход не обратился в нуль. В противном случае вспомогательная задача решена.

2. Пусть некоторая строка с перерасходом соединена цепочкой со строкой с остатком.

Выполним описываемые формулами (15) преобразования неизвестных, соответствующих этой цепочке, взяв в качестве величины Δ

$$\Delta = \min\left[-v_s x_s,\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} - a_i,\quad \left(a_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_{kj} \right) u_k \right],$$

где s — номера нечетных клеток цепочки (счет клеток ведется, начиная от строки с перерасходом);
i — номер строки с перерасходом, начинающей цепочку;
k — номер строки с остатком, кончающей цепочку.

В результате получим новый план вспомогательной задачи с меньшим перерасходом сырья. Если при этом суммарный перерасход сырья обратился в нуль, вспомогательная задача решена. В противном случае следует перейти к следующей итерации.

3. Пусть к некоторой строке ν от одной и той же строки с перерасходом идут две цепочки клеток, каждая из которых приводит к своей оценке строки ν (u и u', где $u > u'$). Пусть далее среди клеток цепочки, приводящей к меньшей оценке строки, не принадлежащих другой цепочке, отсутствуют клетки с нулевым производством.

В этом случае можно выполнить точно такое же преобразование, как и в случае 1. Однако Δ следует выбирать по-другому. Действительно, начальная часть обеих цепочек может в этом случае совпадать. Поэтому к переменным, соответствующим этой общей части, одновременно прибавляются некоторые величины и вычитаются некоторые другие величины.

Так, от переменного, соответствующего первой клетке, вычитается $-\Delta / v_1$, а прибавляется $-\Delta' / v_1$. Итого от него вычитается $-\frac{\Delta}{v_1}\left(1-\frac{u'}{u}\right)$.

К переменному, соответствующему второй клетке, прибавляется $-\Delta/v_1$, а вычитается $-\Delta'/v_1$. Итого к нему прибавляется $-\frac{\Delta}{v_1}\left(1-\frac{u'}{u}\right)$.

От переменного, соответствующего k-й нечетной клетке общей части двух цепочек, вычитается $-\Delta/v_k$, а прибавляется $-\Delta'/v_k$. Итого от него вычитается $-\frac{\Delta}{v_k}\left(1-\frac{u'}{u}\right)$.

К переменному, соответствующему r-й четной клетке общей части обеих цепочек, прибавляется $-\frac{\Delta}{v_r}$, а отнимается $-\frac{\Delta'}{v_r}$. Итого к нему прибавляется $-\frac{\Delta}{v_r}\left(1-\frac{u'}{u}\right)$.

Отсюда Δ должно находиться из соотношения

$$\Delta = \min_{s,\, l,\, k}\left|\; -v_s x_s, \quad -v_l x_l \frac{u}{u'}, \quad \frac{-v_k x_k}{1-\frac{u'}{u}} \quad \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} - a_i}{1-\frac{u'}{u}} \;\right|,$$

где s — номера нечетных клеток первой цепочки, не относящихся к общей части цепочек;
l — номера четных клеток второй цепочки, не относящихся к общей части цепочек;
k — номера нечетных клеток общей части цепочек;
i — номер строки с перерасходом, от которой идут цепочки.

В результате корректировки плана в этом случае также приходим к плану с меньшим перерасходом сырья, т. е. к новой итерации.

Остается рассмотреть вопрос о конечности числа итераций. С этой целью поставим в соответствие каждому плану набор ненулевых клеток (т. е. клеток, для которых $x_{ij} \neq 0$). Допустим, что все планы, возникающие в процессе решения задачи, обладают следующим свойством: совокупность ненулевых переменных плана обеспечивает минимум перерасхода сырья на множестве всех допустимых планов, соответствующих тому же набору ненулевых клеток, что и данный план.

Из наличия упомянутого свойства вытекает, что в процессе решения задачи не может встретиться двух различных планов с одним набором ненулевых клеток, ибо любой следующий план предусматривает строго меньший перерасход сырья, чем все предыдущие.

Поскольку число возможных наборов ненулевых клеток конечно, то конечно и число планов, которые будут образованы в процессе решения задачи, что доказывает конечность алгоритма решения вспомогательной задачи о минимизации перерасхода сырья при указанном выше допущении. Справедливость такого предположения не доказана, однако сформулированное свойство планов легко обеспечить, если решить для каждого плана задачу минимизации перерасхода сырья, принимая в качестве допустимых только ненулевые клетки этого плана. Тот факт, что в рассматриваемом случае для каждой допустимой клетки x_{ij} отличен от нуля, существенно упрощает алгоритм, а именно: каждая итерация (будем называть ее упрощенной) отличается от описанных выше тем, что если в результате процесса назначения оценок возникла пятая ситуация, то следует, не проводя анализа цепочки, переходить сразу к корректировке плана. В результате упрощенной итерации либо исчезает одна строка с перерасходом или остатком, либо обращается в нуль одна из ненулевых переменных плана, либо выясняется, что план оптимальным образом распределяет переменные в клетках своего набора ненулевых клеток.

В первых двух случаях следует провести еще одну упрощенную итерацию. Ясно, что число подряд следующих упрощенных итераций конечно в силу конечности числа клеток и строк. В результате такой серии упрощенных итераций приходим к плану, для которого справедливо сформулированное выше свойство оптимальности, положенное в основу доказательства конечности алгоритма.

На базе решения задачи о минимизации перерасхода сырья может быть построен алгоритм решения распределительной задачи.

4. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

1. Начальное преобразование матрицы стоимостей. В каждом столбце матрицы $\| C_{ij} \|$ находится минимальное число, и это число вычитается из всех чисел этого столбца. При этом в каждом столбце образуется хотя бы один нуль и все числа C_{ij} остаются неотрицательными.

2. Определение исходного плана вспомогательной задачи. В каждом столбце матрицы $\| C_{ij} \|$ находится нуль, и соответствующее неизвестное x_{ij} полагается равным b_j. В результате получен план вспомогательной задачи о минимуме перерасхода, в которой допустимыми клетками считаются клетки, для которых $C_{ij} = 0$.

3. Решение задачи о минимуме перерасхода, описанной в разделе 3. Если в результате ее решения найден план без перерасхода, то распределительная задача решена. Действительно, этот план является планом основной задачи. Он оптимален для преобразованной матрицы $\| C_{ij} \|$, так как имеет нулевую стоимость, в то время как планов с отрицательной стоимостью существовать не может. Следовательно, в силу теорем 1 и 2 он оптимален и для исходной матрицы. Если же в результате решения вспомогательной задачи найден план этой задачи

с минимально возможным перерасходом, то следует переход к следующему шагу.

4. Проверка невозможности решения задачи. Для каждой клетки подсчитывается величина

$$w_{ij} = v_j + a_{ij}u_i$$

и среди всех w_{ij} ищутся отрицательные. Если их нет, то задача решения не имеет. Действительно, система оценок u_i, v_j, построенная для плана производства $\| x_{ij} \|$, удовлетворяет системе условий оптимальности (13), (14), сформулированных не только для допустимых клеток, но и для всех клеток. Поэтому найденный план производства обеспечивает наименьший перерасход сырья среди всех планов, удовлетворяющих потребности пунктов b_j и осуществляемых не только через допустимые, но и через любые клетки. А это и значит, что не существует ни одного плана распределительной задачи. В противном случае, т. е. если существуют $w_{ij} < 0$, следует переход к следующему шагу.

5. Преобразование матрицы $\| C_{ij} \|$. Для всех $w_{ij} < 0$ определяются величины $\Delta_{ij} = -C_{ij} / w_{ij}$ и среди них находится минимальная (Δ). Заметим, что все отрицательные w_{ij}, а значит и те, которые соответствуют найденному Δ, находятся в клетках, лежащих в столбцах, имеющих ненулевую оценку, причем эти клетки не могут быть допустимыми, т. е. соответствующие $C_{ij} > 0$. Отсюда следует, что и все $\Delta_{ij} > 0$, а значит, найденное Δ строго положительно.

Производится преобразование матрицы $\| C_{ij} \|$ по формуле

$$C_{ij}' = C_{ij} + \Delta \cdot w_{ij}.$$

Это преобразование может рассматриваться как последовательное выполнение преобразования строк и преобразования столбцов, описанных в разделе 2:

$$C_{ij}'' = C_{ij} + \Delta v_j,$$
$$C_{ij}' = C_{ij}'' + a_{ij}\Delta u_i.$$

В результате выполнения этого преобразования допустимые клетки, для которых выполнялось условие (14), в том числе все клетки с ненулевым производством, остаются допустимыми, так как для них $w_{ij} = 0$. В то же время в столбцах, имеющих ненулевые оценки, появляется хотя бы одна новая допустимая клетка, что дает возможность продолжить решение вспомогательной задачи. Поэтому далее следует возврат к шагу 3.

Продолжение процесса назначения оценок приводит или к перераспределению производств с уменьшением перерасхода, или опять к проверке существования решения задачи, но уже с новыми оценками строк, причем все эти оценки не меньше старых и по крайней мере одна оценка увеличена. В силу конечности числа совокупностей оценок, о чем говорилось в разделе 3, чередование 3, 4 и 5-го шагов алгоритма через конечное число шагов приводит или к корректировке плана вспомогательной задачи, или к выводу о том, что распределительная задача не имеет решения.

Покажем, что общее число эквивалентных преобразований, которые могут быть сделаны в процессе решения распределительной задачи, конечно. Рассмотрим какое-либо эквивалентное преобразование. К нему привело решение вспомогательной задачи, после того как был найден ее оптимальный план. Как было показано выше, через конечное число шагов после рассматриваемого преобразования должна произойти корректировка плана. В результате получится новый план с меньшим перерасходом сырья. Соответствующий ему набор ненулевых клеток должен отличаться от набора, соответствующего старому плану в силу оптимальности последнего (иначе новый план был бы допустимым для старой вспомогательной задачи). По той же причине этот набор должен отличаться от всех наборов, соответствовавших ранее встречавшимся планам вспомогательных задач. Итак, конечная серия эквивалентных преобразований, не разделенных корректировкой плана, должна после конечного числа шагов породить свой набор ненулевых клеток. Общее число возможных наборов конечно, из чего вытекает конечность числа эквивалентных преобразований, а значит, и конечность алгоритма решения распределительной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Л. Лурье. Алгоритм решения распределительной задачи. В сб. Примен. матем. в экономич. исслед. Под ред. акад. В. С. Немчинова. Т. 2. 1961.
2. У. Х. Малков. Алгоритм решения распределительной задачи. Ж. выч. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 2, стр. 358—366.
3. H. M. Marcowitz. Consepts and computing procedure for certain X_{ij} programming problems. Proc. of the Second Symposium Engineer programming. Washington, 1955, p. 509—565.

Поступила в редакцию
15 VII 1964